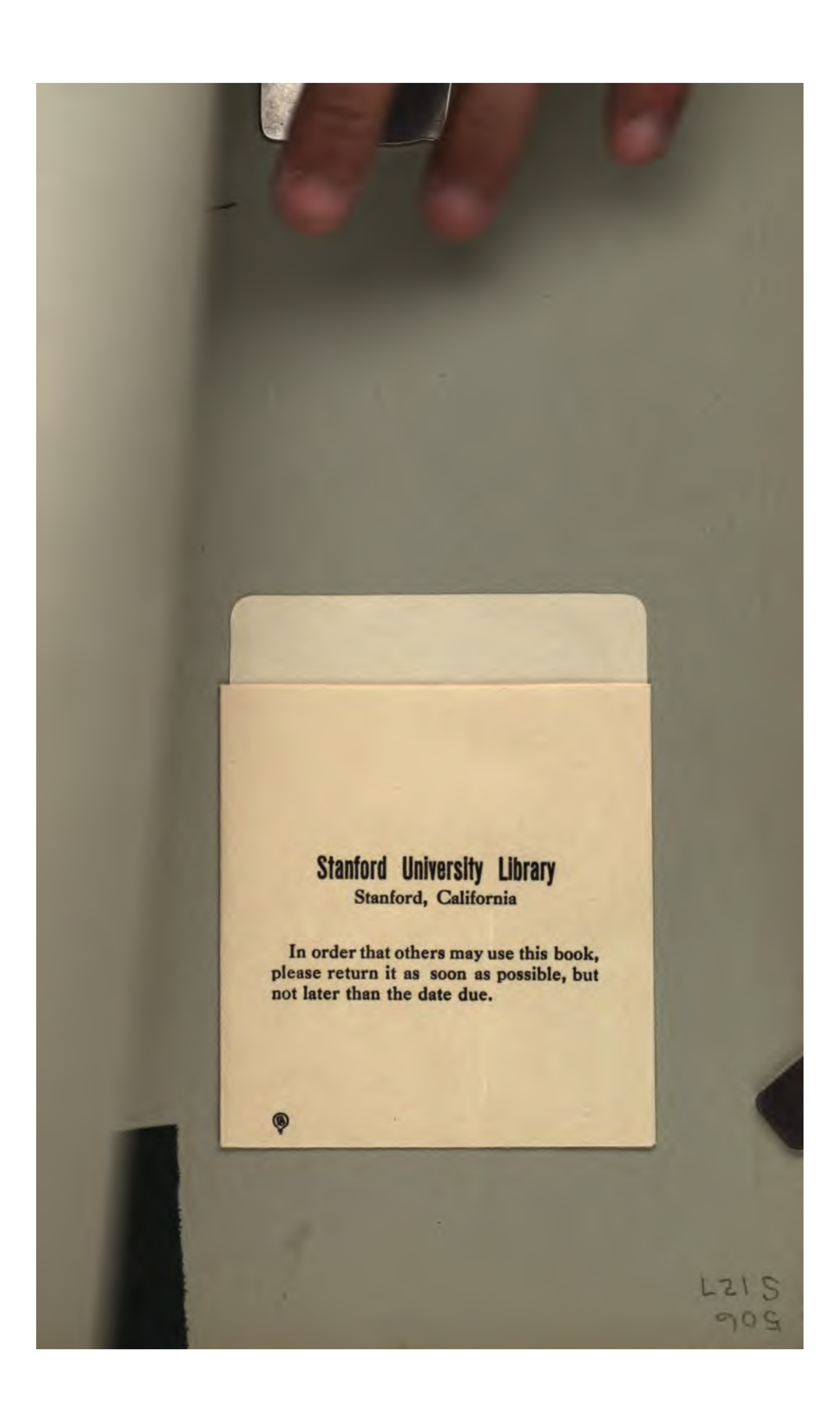

Stanford University Libraries
3 6105 027 416 457


Stanford University Library
Stanford, California
In order that others may use this book, please return it as soon as possible, but not later than the date due.
506
S127



ABHANDLUNGEN

VIERTER BAND.





ABHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



VIERTER BAND.

MIT NEUNZEHN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1855.

ABHANDLUNGEN

DER MATHEMATISCH-PHYSISCHEN CLASSE

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN.



ZWEITER BAND.

MIT NEUNZEHN TAFELN.

LEIPZIG

BEI S. HIRZEL.

1855.

INHALT.

Die nachfolgenden Untersuchungen beschäftigen sich mit den Fundamentallehren der theoretischen Musik oder Kanonik. Die neueren musikalischen Schriftsteller pflegen dieselbe als eine völlig abgeschlossene Wissenschaft zu betrachten, deren weiterer Anbau nicht sonderlich der Mühe lohne. Wenn nun zwar für die praktischen Zwecke der Musik als Kunst die nothwendigsten Grundlagen, theils auf empirischem theils auf theoretischem Wege, längst festgestellt sind, so bleibt doch in wissenschaftlicher Beziehung hier noch gar Manches zu thun übrig. Es fehlt zwar nicht an verdienstlichen und in ihrer Art gründlichen Werken über theoretische Musik. Die mir bekannt gewordenen leiden jedoch, soweit sie von Musikern herrühren, an einer Schwerfälligkeit, um nicht zu sagen Unbeholfenheit, welche die Folge einer mangelhaften mathematischen Auffassung des Gegenstandes ist, und von Mathematikern haben, soviel ich weiss, seit Euler nur Wenige einzelnen musikalischen Problemen ihre Aufmerksamkeit zugewendet. Euler's *tentamen novae theoriae musicae* aber ist von den Musikern ungünstig beurtheilt und als ein Werk bezeichnet worden, das mehr mathematische Speculation als musikalisch Brauchbares enthalte. Wenn nun Euler seine Aufgabe allgemeiner fasst, als es der praktische Zweck unmittelbar verlangt, und daher das ganze Feld der möglichen musikalischen Combinationen zu durchmustern beabsichtigt, so liegt hierin kein Grund zum Tadel, vielmehr ist dieses Verfahren echt wissenschaftlich; wenn er aber allerdings nicht überall die Forderungen des musikalischen Gehörs gebührend in Rechnung zieht, so musste dies freilich zu manchen unfruchtbaren Resultaten führen. Insbesondere musste seine ungünstige Beurtheilung der gleichschwebenden Temperatur, die namentlich seit Marpurg zu entschiedenerem Ansehen gelangte, ihn mit den Grundsätzen der Musik, wie sie sich nach ihm immer mehr befestigten, in Widerstreit bringen. Jedenfalls enthält aber Euler's Werk zwei mathematische Bestimmungen,

deren Benutzung seine Nachfolger sehr zum Nachtheil der wissenschaftlichen Behandlung der theoretischen Musik vernachlässigt haben; wir meinen seine Massbestimmung der Intervalle durch die Logarithmen der Schwingungsverhältnisse (p. 73) und die genäherten Ausdrücke derselben mit Hülfe der Kettenbrüche (p. 75). Zwar bedienen sich Marpurg, Türk u. A. bei Berechnung der Schwingungsverhältnisse der Logarithmen, jedoch nur zur Abkürzung der Rechnung. Dass aber der Logarithmus des Schwingungsverhältnisses eines Tons, dividirt durch den Logarithmus von 2, als des Schwingungsverhältnisses der Octave, das Intervall selbst ausdrückt, welches der Ton mit dem Grundton bildet, blieb unbeachtet*) und kam in Vergessenheit, so dass diese Bestimmung bei Herbart, der sich ihrer bedient**) und völlig selbständig auf sie gekommen zu seyn scheint, wie eine ganz neue sich darstellt. Gerade durch die allgemeine Anwendung jener beiden Eulerschen Principien erhält nun aber die ganze Lehre von den Tonverhältnissen eine Einfachheit und Klarheit, mit der die weitschweifige Behandlung durch Zusammensetzung der Schwingungsverhältnisse sehr zu ihrem Nachtheil contrastirt. Es ist aber nicht ein blosser methodischer Gewinn, der dadurch erlangt wird, sondern es ergeben sich auch wesentlich neue Resultate. Fürs Erste nämlich lässt sich mit Leichtigkeit nachweisen, dass jede ungleichschwebende Temperatur den innern musikalischen

---

*) Nur Lambert macht hiervon eine Ausnahme; beide Eulersche Bestimmungen kommen in seiner Abhandlung *sur le tempérament en musique (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1774, p. 55)* in Anwendung.

**) Zuerst in den Hauptpuncten der Metaphysik, Göttingen, 1807, § 14. (Werke, herausgegeben von Hartenstein, Bd. 3, S. 46), dann in mehreren psychologisch-musikalischen Abhandlungen, die sich im siebenten Bande der Gesammtausgabe der Werke beisammen finden. Durch Herbart's Schriften lernte ich diese Massbestimmung der Intervalle zuerst kennen und habe sie in der Abhandlung über die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle (Abhandlungen etc. herausgeg. von der Fürstl. Jablonowski'schen Gesellschaft, Leipzig, 1846) benutzt, ohne zu wissen, dass schon im Jahre 1739 Euler auf sie gekommen war. Die Anwendung der Kettenbrüche zur Auffindung abgekürzter Werthe der Intervalle lag so nahe, dass Jeder, dem diese bekannt geworden waren, von selbst darauf geführt werden musste. Im Uebrigen mag bemerkt werden, dass jene frühere Abhandlung in ihrem ersten Theile zwar Manches enthält, was auch hier, obwohl in vervollkommneter Gestalt, eine Stelle finden musste, in der Hauptsache aber einen ganz andern Zweck verfolgt als die gegenwärtige, die mit der Erklärung der ästhetischen Verhältnisse der Töne nichts zu thun hat, daher auch in keiner Weise auf Principien beruht, die als blos hypothetische angesehen werden können.

Zusammenhang der Intervalle nothwendig theilweise zerreisst, und dieser nur bei gleichschwebender Temperatur ungestört bleibt. Dabei findet man aber auch zweitens, dass es nicht blos eine, sondern eine Mehrheit von gleichschwebenden Temperaturen giebt, die in zwei Classen zerfallen, auf deren gemeinsamer Grenze die gewöhnliche gleichschwebende Temperatur steht, die man daher die mittlere nennen kann. In dieser nämlich sind, wie bekannt, die erhöhten Töne *Cis, Dis* u. s. w. von den erniedrigten *Des, Es* u. s. w. nur dem Namen nach verschieden, in jenen beiden Classen dagegen treten sie als wesentlich verschiedene Töne aus einander, und zwar liegen in der einen Classe *Cis, Dis* u. s. w. tiefer als *Des, Es* u. s. w. in der andern aber höher. Durch alle physikalische Schriften zieht sich eine Tabelle der Schwingungsverhältnisse der Töne, in welcher neben den bekannten feststehenden rationalen Verhältnissen der Haupttöne auch für die erhöhten und erniedrigten Töne rationale Schwingungsverhältnisse angegeben werden, und wonach den erhöhten eine tiefere Stelle als den ihnen nächstbenachbarten erniedrigten zugewiesen wird. Auf solche akustische Autorität hin ist diese Ansicht über die Lage jener Töne auch in die theoretisch-musikalischen Schriften übergegangen. Bei näherer Untersuchung erweist sich jedoch jene Tabelle hinsichtlich der Fixirung der erhöhten und erniedrigten Töne als illusorisch. Denn diese Fixirung ist nur für gewisse Tonarten richtig, für andre unrichtig und hat daher nicht absolute, sondern nur relative Gültigkeit. Man kann überhaupt gar nicht die Schwingungsverhältnisse und Intervalle der Töne *Cis, Dis* etc. *Ces, Des* etc. eben so absolut bestimmen wie die von *D, E, F* etc. Denn es ist unmöglich, aus den sieben Haupttönen und ihren einfachen Erhöhungen und Erniedrigungen Tonleitern zu bilden, die in allen Tonarten zugleich rein sind; es würde vielmehr zur Erfüllung dieser Forderung einer weit grössern Anzahl von Tönen bedürfen und selbst dann noch für die Willkür Spielraum übrig bleiben. Die moderne Musik verlangt aber für alle Tonarten aus einer mässigen Anzahl von Tönen wenigstens befriedigende Scalen, die demnach nicht durchaus reine, sondern nur temperirte, und zwar, wie schon bemerkt wurde, nur gleichschwebend temperirte Töne und Intervalle enthalten können. Es kann jedoch, wenn, wie dies auf den Streichinstrumenten geschieht, erniedrigte und erhöhte Töne wirklich unterschieden werden, diese Temperatur nicht die gewöhnliche gleichschwebende seyn. Sie kann aber auch nicht in die erste der beiden genannten Classen fallen, obwohl sich innerhalb derselben eine Temperatur angeben lässt,

die mehr als jede andere in der Gesammtheit der die Dur- und Molltonleiter bildenden Töne der Reinheit nahe kommt; denn bei den Modulationen durch enharmonische Verwechselung zeigt es sich, dass die erhöhten Töne *Cis*, *Dis* etc. höher liegen müssen als die ihnen nächstbenachbarten erniedrigten, also *Cis* höher als *Des*, *Dis* höher als *Es* u. s. f. Werden also diese Töne unterschieden, so muss die Temperatur in die zweite Classe fallen. In dieser Classe stehen aber die Terzen etwas höher als die der gewöhnlichen oder mittleren Temperatur, weichen also etwas mehr als diese von der Reinheit ab. Es kommt nun hierbei darauf an, eine solche Temperatur zu finden, die, bei unmerklicher Abweichung von der gewöhnlichen gleichschwebenden in den Haupttönen, die erhöhten und erniedrigten doch noch merklich genug unterscheidet. Diesen Forderungen scheint nun am besten diejenige Temperatur zu entsprechen, nach welcher das Intervall der Quinte $= \frac{31}{53}$ des Octavenintervalls ist, der Unterschied der nächstbenachbarten erhöhten und erniedrigten Töne $\frac{1}{9}$ des grossen ganzen Tons beträgt und die letzteren fast genau mit den gleichnamigen Tönen der Kirnbergerschen Temperatur zusammenfallen.

Dies sind die hauptsächlichsten Ergebnisse der nachfolgenden Untersuchungen. Nicht um musikalische Neuerungen, sondern um wissenschaftliche Aufklärung des Bestehenden ist es dabei zu thun. Diese ist aber um so mehr ein Bedürfniss, als einerseits namhafte musikalische Schriftsteller die auf den Streichinstrumenten factisch vorhandene Unterscheidung der erhöhten und erniedrigten Töne ganz mit Stillschweigen übergehen, man möchte sagen verleugnen und die Herrschaft der gleichschwebenden Temperatur der Tasteninstrumente auch für sie in Anspruch nehmen, andrerseits aber die gerühmte Reinheit der musikalischen Leistungen der Streichinstrumente die Meinung aufrecht erhält, als ob sich hier die Musik von jeder Temperatur befreien könnte, was unmöglich scheint, indem nicht nur die erhöhten und erniedrigten, sondern selbst mehrere Haupttöne, je nach der Verschiedenheit der Tonarten, verschieden gegriffen werden müssten, dies aber bei dem häufigen Wechsel der Tonarten grosse Unsicherheit erzeugen und ein Spiel *prima vista* unausführbar machen würde.*) Es muss daher allerdings

*) In völligem Gegensatz zu der wenigstens in Deutschland jetzt überwiegenden, wo nicht allgemein angenommenen Ansicht von der Geltung der gewöhnlichen gleichschwebenden Temperatur auch für die Streichinstrumente stehen die Resultate, die *Delezenne (Mémoire sur les valeurs numériques des notes de la gamme* im *Recueil de la*

auch diese Instrumente die gleichschwebende Temperatur beherrschen, jedoch nicht die gewöhnliche, sondern eine solche, die sich derselben zwar nahe anschliesst, doch aber die erhöhten und erniedrigten Töne von einander sondert und in solcher Weise fixirt, dass der musikalische Vortrag, wenn auch bald mehr bald weniger von diesen festen Bestimmungen abweichend, doch auf sie, als die mittleren, normalen, immer wieder zurückkommen muss.

---

société des sciences de Lille, 1827) aus seinen in Verbindung mit mehreren Künstlern angestellten Versuchen ziehen zu dürfen glaubt. Hiernach soll der geübte Violinist oder Cellist in der Durscale den grossen und kleinen Ton unterscheiden, also in der That eine reine Scala spielen, und sich von aller Temperatur frei halten. Gleichwohl erkennt Delezenne selbst in einer folgenden Abhandlung *(sur le nombre des modes musicaux,* ebendas. p. 67) die Nothwendigkeit einer Temperatur auch für die Streichinstrumente *(la nécessité d'un tempérament, même pour les instrumens à sons libres)* an, ohne jedoch anzugeben, von welcher Art diese Temperatur seyn soll. Eine Wiederholung und Erweiterung seiner Versuche wäre daher äussert wünschenswerth, da sich zuletzt nur auf experimentalem Wege wird feststellen lassen, welcher gleichschwebenden Temperatur sich das Spiel auf jenen Instrumenten am meisten nähert, und unter welchen Umständen etwa der Spieler von ihr zu Gunsten der Reinheit abweicht.

I.

BESTIMMUNG DER TÖNE AUS IHREN EINFACHSTEN SCHWINGUNGSVERHÄLTNISSEN.

§ 1.

Zwei oder mehrere Töne heissen gleich hoch, wenn die tönenden Körper, welche sie hervorbringen, in demselben Zeittheil gleichviele Schwingungen machen. Ist aber die Zahl dieser Schwingungen bei dem einen tönenden Körper grösser als bei dem andern, so nennen wir den Ton des ersteren höher als den des andern, und umgekehrt den des letztern tiefer als den Ton des ersteren Körpers.

Zwei gleichzeitig gegebene Töne machen auf den musikalischen Sinn entweder den Eindruck des Wohlklangs oder des Missklangs. Im ersteren Falle nennen wir sie consonirende, ihre Verbindung eine Consonanz, im andern Falle dissonirende und ihre Verbindung eine Dissonanz. Ob zwei Töne consoniren oder dissoniren, hängt von den Verhältnissen ab, in welchen die ihnen zugehörigen Schwingungsmengen stehen. Je einfacher diese Verhältnisse sind, um so wohlklingender ist die Verbindung der Töne.

§ 2.

Bei dieser nothwendigen Rücksicht auf die Verhältnisse der Schwingungszahlen der tönenden Körper ist es zweckmässig, absolute und relative Schwingungszahlen zu unterscheiden. Jene drücken die Menge der Schwingungen des tönenden Körpers in der Zeiteinheit (der Secunde) aus, diese sind die Verhältnisszahlen, welche angeben, wie viele Schwingungen oder Theile von Schwingungen ein tönender Körper innerhalb desselben Zeittheils macht, in welchem ein andrer nur einmal schwingt. Der dem letzteren zugehörige Ton heisst dann

der Grundton. Ist also die absolute Schwingungszahl des Tons $A = a$, die des Tons $B = b$, die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A als den Grundton $= y$, so ist $y = \frac{b}{a}$. Umgekehrt ist die relative Schwingungszahl von A in Bezug auf B als Grundton $= \frac{a}{b} = \frac{1}{y}$. Da, wenn $b \gtrless a$, $y \gtrless 1$ ist, so folgt, dass die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A grösser oder kleiner als 1 ist, je nachdem der Ton B höher oder tiefer ist als der Ton A.

Kommt ein dritter Ton C hinzu, dessen absolute Schwingungszahl $= c$, so ist seine relative in Bezug auf $A = \frac{c}{a}$, in Bezug auf $B = \frac{c}{b}$. Ist $\frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, so ist C ebensoviel höher als B, wie B höher als A, oder A ebensoviel tiefer als B, wie C höher als B. Da dann die relative Schwingungszahl von A in Bezug auf $B = \frac{a}{b}$, die von C in Bezug auf $B = \frac{c}{b} = \frac{b}{a}$, so ist das Product der relativen Schwingungszahlen zweier Töne, von denen der eine ebensoviel höher, wie der andre tiefer ist als ein und derselbe dritte Ton (ihr gemeinsamer Grundton), $= 1$. Ist daher die relative Schwingungszahl des einen $= y$, so ist die des andern der reciproke Werth $\frac{1}{y}$.

Da für beliebige Werthe von a, b, c immer $\frac{b}{a} \cdot \frac{c}{b} = \frac{c}{a}$, so folgt, dass die relative Schwingungszahl von C in Bezug auf A gleich ist dem Product aus der relativen Schwingungszahl von C in Bezug auf B in die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A.

§ 3.

Zwei Töne A, B bilden Consonanzen, wenn ihre absoluten Schwingungszahlen a, b in einem der Verhältnisse $1:1$, $1:2$, $2:3$, $3:4$, $4:5$, $5:6$ stehen.

1) Ist $a:b = 1:1$, also die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A, oder von A in Bezug auf B, $y = 1$, so heisst B die Prime von A, A die Prime von B.

2) Ist $a:b = 1:2$, also die relative Schwingungszahl von B in Bezug auf A, $y = 2$, so heisst B die Octave von A.

3) Ist $a:b = 2:3$, also $y = \frac{3}{2}$, so heisst B die Quinte von A.

4) Ist $a:b = 3:4$, also $y = \frac{4}{3}$, so heisst B die Quarte von A.

5) Ist $a:b = 4:5$, also $y = \frac{5}{4}$, so heisst B die grosse Terz von A.

6) Ist $a:b = 5:6$, also $y = \frac{6}{5}$, so heisst B die kleine Terz von A.

Da in den Fällen 2 bis 5 die relative Schwingungszahl von A in Bezug auf $B = \frac{1}{y}$, also der Reihe nach $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ ist, so heisst dann beziehungsweise A die umgekehrte oder untere Octave, Quinte, Quarte, grosse Terz, kleine Terz von B. Denn da die relativen Schwingungszahlen dieser Töne die reciproken Werthe derjenigen der Octave, Quinte u. s. f. sind, so liegt ein durch sie in Bezug auf A bestimmter Ton B' um ebensoviel tiefer als A wie B höher als A (§ 2). Im Gegensatz zu den unteren Octaven, Quinten u. s. w. kann man die Octaven, Quinten u. s. w. selbst auch die oberen nennen.

§ 4.

Beziehen sich die relativen Schwingungszahlen 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ auf einen und denselben Grundton, so sind durch sie fünf von diesem verschiedene (höhere), mit ihm aber consonirende Töne bestimmt. Man kann nun weiter aus ihnen die relativen Schwingungszahlen derjenigen Töne bestimmen, die mit jenen der Reihe nach consoniren, wenn man deren obere und untere Terzen, Quarten, Quinten und Octaven sucht, indem man jede der relativen Schwingungszahlen 2, $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$ sowohl mit jeder derselben als mit jedem der reciproken Werthe $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$ multiplicirt. Man erhält hierdurch drei Classen von Tönen, theils nämlich solche, deren relative Schwingungszahlen zwischen denen der Prime und Octave, also zwischen 1 und 2 liegen, theils solche, deren relative Schwingungszahlen > 2, theils endlich solche, für welche diese Zahlen < 1 sind. Wir bedürfen jedoch für unsern Zweck zunächst nur der Töne der ersten Classe und übergehen daher diejenigen Producte der relativen Schwingungszahlen, die > 2 und < 1 sind.

§ 5.

Hiernach erhalten wir nun, wenn wir von der Octave aus successiv zur Quinte, Quarte u. s. f. übergehen und, wo es höhere Töne giebt, diese zuerst bestimmen, folgende Resultate.

1) Die untere kleine Terz der Octave giebt die relative Schwingungszahl $y = 2 \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{3}$. Der Ton, dem sie zugehört, heisst die grosse Sexte.

2) Die untere grosse Terz der Octave giebt $y = 2 \cdot \frac{4}{5} = \frac{8}{5}$. Der zugehörige Ton heisst die kleine Sexte.

Die untere Quarte der Octave giebt $y = 2 \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, die Quinte.

Ebenso giebt die untere Quinte der Octave $y = 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, die Quarte.

3) Die kleine Terz der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} = \frac{9}{5}$, die grössere kleine Septime.

4) Die grosse Terz der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} = \frac{15}{8}$, die grosse Septime.

Die Quarte der Quinte giebt, wie schon aus 2 folgt, die Octave.

Die untere kleine Terz der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} = \frac{5}{4}$, die grosse Terz.

Hieraus folgt von selbst, dass die untere grosse Terz der Quinte die kleine Terz giebt.

5) Die untere Quarte der Quinte giebt $y = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}$, die grosse Secunde.

Die kleine Terz der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} = \frac{8}{5}$, die kleine Sexte; die grosse Terz der Quarte $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = \frac{5}{3}$, die grosse Sexte.

6) Die Quarte der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{9}$, die kleinere kleine Septime.

Die Quinte der Quarte giebt, wie sich nach 2 von selbst versteht, die Octave.

7) Die untere kleine Terz der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{10}{9}$, den kleinen ganzen Ton.

8) Die untere grosse Terz der Quarte giebt $y = \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{15}$, die kleine Secunde.

Dass die kleine Terz der grossen Terz und die grosse der kleinen die Quinte giebt, folgt schon aus 4; eben so aus 5, 4 und 3, dass die Quarte der grossen und kleinen Terz resp. die grosse und kleine Sexte, die Quinte der grossen und kleinen Terz resp. die grosse Septime und grössere kleine Septime. Es giebt aber

9) die grosse Terz der grossen Terz $y = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$, die übermässige Quinte;

10) die untere kleine Terz der grossen Terz $y = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{24}$, die übermässige Prime;

11) die kleine Terz der kleinen Terz $y = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{36}{25}$, die grössere verminderte Quinte.

§ 6.

Ordnen wir die gewonnenen neuen Töne nach der Grösse ihrer relativen Schwingungszahlen, so erhalten wir folgende Zusammenstellung:

grosse Septime,	$y = \frac{15}{8}$,
grössere kleine Septime,	$y = \frac{9}{5}$,
kleinere kleine Septime,	$y = \frac{16}{9}$,
grosse Sexte,	$y = \frac{5}{3}$,
kleine Sexte,	$y = \frac{8}{5}$,
übermässige Quinte,	$y = \frac{25}{16}$,
grössere verminderte Quinte,	$y = \frac{36}{25}$,
grosse Secunde,	$y = \frac{9}{8}$,
kleiner ganzer Ton,	$y = \frac{10}{9}$,
kleine Secunde,	$y = \frac{16}{15}$,
übermässige Prime,	$y = \frac{25}{24}$.

Vergleicht man diese Bestimmungen, theils unter einander, theils mit denen in § 3, so ergiebt sich, dass Quarte und Quinte, grosse Terz und kleine Sexte, kleine Terz und grosse Sexte, grosse Secunde und kleinere kleine Septime, kleiner ganzer Ton und grössere kleine Septime, endlich kleine Secunde und grosse Septime relative Schwingungszahlen haben, deren Product 2, also gleich der Schwingungszahl der Octave. Wegen der an Einerleiheit grenzenden Verwandschaft der Octave zum Grundton (welche weiter unten näher beleuchtet werden wird), pflegt daher in allen diesen Tonpaaren der eine Ton der umgekehrte des andern genannt zu werden. In diesem Sinne heissen die Sexten umgekehrte Terzen, die Septimen umgekehrte Secunden und die Quarte eine umgekehrte Quinte.

§ 7.

Durch Fortsetzung des in § 5 eingeschlagenen Verfahrens in Bezug auf die gewonnenen elf Töne erhalten wir weitere Tonbestimmungen. Es giebt nämlich

1) die untere Quarte der grossen Septime $y = \frac{15}{8} \cdot \frac{3}{4} = \frac{45}{32}$, die grössere übermässige Quarte;

2) die untere Quarte der grösseren kleinen Septime $y = \frac{9}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{20}$, eine alterirte Quarte;

3) die untere kleine Terz der kleineren kleinen Septime $y = \frac{16}{9} \cdot \frac{5}{6} = \frac{40}{27}$, eine alterirte Quinte;

4) die untere grosse Terz der kleineren kleinen Septime $y = \frac{16}{9} \cdot \frac{4}{5} = \frac{64}{45}$, die sogenannte falsche oder kleinere verminderte Quinte;

5) die untere Quinte der kleineren kleinen Septime $y = \frac{16}{9} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27}$, eine alterirte kleine Terz;

6) die untere kleine Terz der grossen Sexte $y = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{18}$, die kleinere übermässige Quarte;

7) die kleine Terz der kleinen Sexte $y = \frac{8}{5} \cdot \frac{6}{5} = \frac{48}{25}$, die grössere verminderte Octave;

8) die untere grosse Terz der kleinen Sexte $y = \frac{8}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{32}{25}$, die verminderte Quarte;

9) die grosse Terz der übermässigen Quinte $y = \frac{25}{16} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{64}$, eine alterirte Octave;

10) die untere kleine Terz der übermässigen Quinte $y = \frac{25}{16} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{96}$, die übermässige Terz (da dieser Werth zwischen den beiden gewöhnlichen Bestimmungen $\frac{625}{485}$ und $\frac{675}{512}$ in der Mitte liegt);

11) die untere Quarte der übermässigen Quinte $y = \frac{25}{16} \cdot \frac{3}{4} = \frac{75}{64}$, die grössere übermässige Secunde;

12) die kleine Terz der grösseren verminderten Quinte $y = \frac{36}{25} \cdot \frac{6}{5} = \frac{216}{125}$, die grössere verminderte Septime;

13) die untere grosse Terz der grösseren verminderten Quinte $y = \frac{36}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{144}{125}$, die grössere verminderte Terz;

14) die untere Quarte der grösseren vermind. Quinte $y = \frac{36}{25} \cdot \frac{3}{4} = \frac{27}{25}$, das grosse Limma;*)

15) die Quinte der grossen Secunde $y = \frac{9}{8} \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{16}$, eine alterirte grosse Sexte.

Aus dem kleinen ganzen Ton und der übermässigen Prime ergeben sich nur Töne, die schon zuvor bestimmt sind.

§ 8.

Auch jeder dieser funfzehn neuen Töne kann zu weiteren Tonbestimmungen benutzt werden. Wir übergehen jedoch die als »alterirte« bezeichneten, so wie das grosse Limma, so dass dann, nach der Grösse

*) Genau genommen bezeichnet dieses, so wie die später folgende Diesis, keinen Ton, sondern ein Komma, also im weitern Sinn ein Intervall. Wie indess Secunden, Terzen, Quarten u. s. w. Intervalle und Töne zugleich bezeichnen, so scheint es auch erlaubt, diesen Gebrauch auf die Kommata überzutragen, wo der durch sie bestimmte Ton eine Benennung erfordert.

geordnet, übrig bleiben die grössere verminderte Octave, grössere verminderte Septime, kleinere verminderte Quinte, grössere übrmässige Quarte, kleinere übermässige Quarte, übermässige Terz, verminderte Quarte, grössere übermässige Secunde, grössere verminderte Terz. Es giebt nun

1) die untere gr. Terz der grösseren verminderten Octave $y = \frac{48}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{192}{125}$, die verminderte Sexte (da dieser Werth zwischen den beiden gewöhnlichen Bestimmungen $\frac{972}{625}$ und $\frac{1024}{675}$ fast genau in der Mitte liegt).

Wir übergehen die untere gr. Terz der grösseren verminderten Septime $\frac{864}{625}$ und die untere Quarte derselben $\frac{162}{125}$, da jene der kleineren übermässigen Quarte, diese der übermässigen Terz sehr nahe kommt. Dagegen giebt

2) die kleine Terz der kleineren verminderten Quinte $y = \frac{64}{45} \cdot \frac{6}{5} = \frac{128}{75}$, die kleinere verminderte Septime;

3) die Quarte der kleineren verminderten Quinte $y = \frac{64}{45} \cdot \frac{4}{3} = \frac{256}{135}$. die kleinere verminderte Octave;

4) die untere grosse Terz der kleineren verminderten Quinte $y = \frac{64}{45} \cdot \frac{4}{5} = \frac{256}{225}$, die kleinere verminderte Terz;

5) die grosse Terz der grösseren übermässigen Quarte $y = \frac{45}{32} \cdot \frac{5}{4} = \frac{225}{128}$, die grössere übermässige Sexte;

6) die untere Quarte der grösseren übermässigen Quarte $y = \frac{45}{32} \cdot \frac{3}{4} = \frac{135}{128}$, das kleine Limma;

7) die grosse Terz der kleineren übermässigen Quarte $y = \frac{25}{18} \cdot \frac{5}{4} = \frac{125}{72}$, die kleinere übermässige Sexte;

8) die Quarte der kleineren übermässigen Quarte $y = \frac{25}{18} \cdot \frac{4}{3} = \frac{50}{27}$, eine alterirte grosse Septime;

9) die untere kleine Terz der kleineren übermässigen Quarte $y = \frac{25}{18} \cdot \frac{5}{6} = \frac{125}{108}$, die kleinere übermässige Secunde.

Wir übergehen die grosse Terz der übermässigen Terz, $\frac{625}{384}$, eine alterirte kleine Sexte, und die untere kleine Terz der übermässigen Terz, $\frac{625}{576}$, welche sehr nahe mit dem grossen Limma zusammentrifft. Dagegen giebt

10) die untere grosse Terz der verminderten Quarte $y = \frac{32}{25} \cdot \frac{4}{5} = \frac{128}{125}$, die kleine Diesis.

Wir übergehen die grosse Terz der grösseren übermässigen Secunde, $\frac{375}{256}$, welche nahe mit der alterirten Quinte $\frac{40}{27}$ zusammentrifft.

Die grössere verminderte Terz giebt, wenn man ihre kleine Terz nimmt, $\frac{864}{625}$, welcher Ton, wie schon erwähnt, nahe mit der kleineren übermässigen Quarte zusammentrifft.

§ 9.

Stellen wir jetzt die in den §§ 3 bis 8 bestimmten Töne nach der Grösse ihrer relativen Schwingungszahlen geordnet zusammen und drücken diese, zur leichteren Vergleichung ihrer Werthe, in Decimalbrüchen aus, so erhalten wir folgende Tabelle:

	y
1) Prime,	$\frac{1}{1} = 1,00000$
2) kleine Diesis,	$\frac{128}{125} = 1,02400$
3) übermässige Prime,	$\frac{25}{24} = 1,04167$
4) kleines Limma,	$\frac{135}{128} = 1,05469$
5) kleine Secunde,	$\frac{16}{15} = 1,06667$
6) grosses Limma,	$\frac{27}{25} = 1,08000$
7) kleiner ganzer Ton,	$\frac{10}{9} = 1,11111$
8) grosse Secunde,	$\frac{9}{8} = 1,12500$
9) kleinere verminderte Terz,	$\frac{256}{225} = 1,13778$
10) grössere verminderte Terz,	$\frac{144}{125} = 1,15200$
11) kleinere übermässige Secunde,	$\frac{125}{108} = 1,15740$
12) grössere übermässige Secunde,	$\frac{75}{64} = 1,17188$
13) alterirte kleine Terz,	$\frac{32}{27} = 1,18519$
14) kleine Terz,	$\frac{6}{5} = 1,20000$
15) grosse Terz,	$\frac{5}{4} = 1,25000$
16) verminderte Quarte,	$\frac{32}{25} = 1,28000$
17) übermässige Terz,	$\frac{125}{96} = 1,30208$
18) Quarte,	$\frac{4}{3} = 1,33333$
19) alterirte Quarte,	$\frac{27}{20} = 1,35000$
20) kleinere übermässige Quarte,	$\frac{25}{18} = 1,38889$
21) grössere übermässige Quarte,	$\frac{45}{32} = 1,40625$
22) kleinere verminderte Quinte,	$\frac{64}{45} = 1,42222$

	y
23) grössere verminderte Quinte,	$\frac{36}{25} = 1,44000$
24) alterirte Quinte,	$\frac{40}{27} = 1,48148$
25) Quinte,	$\frac{3}{2} = 1,50000$
26) verminderte Sexte,	$\frac{192}{125} = 1,52800$
27) übermässige Quinte,	$\frac{25}{16} = 1,56250$
28) kleine Sexte,	$\frac{8}{5} = 1,60000$
29) grosse Sexte,	$\frac{5}{3} = 1,66667$
30) alterirte grosse Sexte,	$\frac{27}{16} = 1,68750$
31) kleinere verminderte Septime,	$\frac{128}{75} = 1,70667$
32) grössere verminderte Septime,	$\frac{216}{125} = 1,72800$
33) kleinere übermässige Sexte,	$\frac{125}{72} = 1,73611$
34) grössere übermässige Sexte,	$\frac{225}{128} = 1,75781$
35) kleinere kleine Septime,	$\frac{16}{9} = 1,77778$
36) grössere kleine Septime,	$\frac{9}{5} = 1,80000$
37) alterirte grosse Septime,	$\frac{50}{27} = 1,85186$
38) grosse Septime,	$\frac{15}{8} = 1,87500$
39) kleinere verminderte Octave,	$\frac{256}{135} = 1,89630$
40) grössere verminderte Octave,	$\frac{48}{25} = 1,92000$
41) alterirte Octave,	$\frac{125}{64} = 1,95312$
42) Octave,	$\frac{2}{1} = 2,00000$

In dieser Tabelle haben je zwei Töne, von denen der eine eben so weit vom Anfang der ganzen Reihe, wie der andre vom Ende derselben entfernt ist (deren Numern also immer die Summe 43 geben), relative Schwingungszahlen, deren Product $= 2$ ist.

§ 10.

Im Vorstehenden sind aus den relativen Schwingungszahlen der Octave, Quinte, Quarte, grossen und kleinen Terz die aller übrigen Töne abgeleitet worden. Die jener fünf mit dem Grundton consonirenden Töne lassen sich aber auf drei reduciren. Denn sey allgemein die Schwingungszahl der grossen Terz $= T$, die der Quinte $= Q$, wo die der Octave $= 2$ ist, so ist die relative Schwingungszahl der Quarte

$= \frac{2}{Q}$, die der kleinen Terz $= \frac{Q}{T}$. Wiederholt man nun das in den §§ 5 bis 8 angewandte Verfahren in Bezug auf diese allgemeinen Ausdrücke der relativen Schwingungszahlen jener mit dem Grundton consonirenden Töne, und beachtet, dass $Q = \frac{3}{2}$, $T = \frac{5}{2^2}$, so erhält man die folgende Tabelle, welche die Form der Abhängigkeit der relativen Schwingungszahlen der Töne, sowohl von denen der Octave, Quinte und grossen Terz, als auch von den absoluten Zahlen 2, 3, 5 auf einen Blick übersehen lässt und so angeordnet ist, dass sich die Töne, deren relative Schwingungszahlen das Product 2 geben, gegenüberstehen.

	y		y
1) Prime,	$1 = 1$	42) Octave,	$2 = 2$
2) kleine Diesis,	$\frac{2}{T^3} = \frac{2^7}{5^3}$	41) alterirte Octave,	$T^3 = \frac{5^3}{2^6}$
3) übermässige Prime,	$\frac{T^2}{Q} = \frac{5^2}{2^3 . 3}$	40) gröss. vermind. Octave,	$\frac{2 . Q}{T^2} = \frac{2^4 . 3}{5^2}$
4) kleines Limma,	$\frac{Q^3 . T}{2^2} = \frac{3^3 . 5}{2^7}$	39) klr. vermind. Octave,	$\frac{2^2}{Q^3 . T} = \frac{2^8}{3^3 . 5}$
5) kleine Secunde,	$\frac{2}{Q . T} = \frac{2^4}{3 . 5}$	38) grosse Septime,	$Q . T = \frac{3 . 5}{2^3}$
6) grosses Limma,	$\frac{Q^3}{2 . T^2} = \frac{3^3}{5^2}$	37) alter. grosse Septime,	$\frac{2^2 . T^2}{Q^3} = \frac{2 . 5^2}{3^3}$
7) kleiner ganzer Ton,	$\frac{2 . T}{Q^2} = \frac{2 . 5}{3^2}$	36) grössere kl. Septime,	$\frac{Q^2}{T} = \frac{3^2}{5}$
8) grosse Secunde,	$\frac{Q^2}{2} = \frac{3^2}{2^3}$	35) kleinere kl. Septime,	$\frac{2^2}{Q^2} = \frac{2^4}{3^2}$
9) kleinere vermind. Terz,	$\frac{2^2}{Q^2 . T^2} = \frac{2^8}{3^2 . 5^2}$	34) gröss. übermäss. Sexte,	$\frac{Q^2 . T^2}{2} = \frac{3^2 . 5^2}{2^7}$
10) grössere vermind. Terz,	$\frac{Q^2}{T^3} = \frac{2^4 . 3^2}{5^3}$	33) kleinere übermäss. Sexte,	$\frac{2 . T^3}{Q^2} = \frac{5^3}{2^3 . 3^2}$
11) klr. übermäss. Secunde,	$\frac{2 . T^3}{Q^3} = \frac{5^3}{2^2 . 3^3}$	32) gröss. vermind. Septime,	$\frac{Q^3}{T^3} = \frac{2^3 . 3^3}{5^3}$
12) gröss. übermäss. Secunde,	$\frac{Q . T^3}{2} = \frac{3 . 5^3}{2^8}$	31) klr. vermind. Septime,	$\frac{2^2}{Q . T^3} = \frac{2^7}{3 . 5^3}$
13) alterirte kleine Terz,	$\frac{2^2}{Q^3} = \frac{2^5}{3^3}$	30) alter. grosse Sexte,	$\frac{Q^3}{2} = \frac{3^3}{2^4}$
14) kleine Terz,	$\frac{Q}{T} = \frac{2 . 3}{5}$	29) grosse Sexte,	$\frac{2 . T}{Q} = \frac{5}{3}$
15) grosse Terz,	$T = \frac{5}{2^2}$	28) kleine Sexte,	$\frac{2}{T} = \frac{2^3}{5}$
16) verminderte Quarte,	$\frac{2}{T^2} = \frac{2^5}{5^2}$	27) übermässige Quinte,	$T^2 = \frac{5^2}{2^4}$
17) übermässige Terz,	$\frac{T^3}{Q} = \frac{5^3}{2^5 . 3}$	26) verminderte Sexte,	$\frac{2 . Q}{T^3} = \frac{2^6 . 3}{5^3}$
18) Quarte,	$\frac{2}{Q} = \frac{2^2}{3}$	25) Quinte,	$Q = \frac{3}{2}$
19) alterirte Quarte,	$\frac{Q^2}{2 . T} = \frac{3^2}{2^2 . 5}$	24) alterirte Quinte,	$\frac{2^2 . T}{Q^2} = \frac{2^3 . 5}{3^2}$
20) klr. übermäss. Quarte,	$\frac{2 . T^2}{Q^2} = \frac{5^2}{2 . 3^2}$	23) gröss. vermind. Quinte,	$\frac{Q^2}{T^2} = \frac{2^2 . 3^2}{5^2}$
21) gröss. übermäss. Quarte,	$\frac{Q^3 . T}{2} = \frac{3^3 . 5}{2^5}$	22) klr. vermind. Quinte,	$\frac{2^2}{Q^2 . T} = \frac{2^6}{3^2 . 5}$

§ 11.

Man kann diese 40 zwischen der Prime und Octave liegende Töne in folgende acht Classen bringen.

I.

25) $y = Q = \frac{3}{2}$
8) $y = \frac{Q^2}{2} = \frac{3^2}{2^3}$
30) $y = \frac{Q^3}{2} = \frac{3^3}{2^4}$

II.

18) $y = \frac{2}{Q} = \frac{2^2}{3}$
35) $y = \frac{2^2}{Q^2} = \frac{2^4}{3^2}$
13) $y = \frac{2^2}{Q^3} = \frac{2^5}{3^3}$

III.

15) $y = T = \frac{5}{2^2}$
27) $y = T^2 = \frac{5^2}{2^4}$
41) $y = T^3 = \frac{5^3}{2^6}$

IV.

28) $y = \frac{2}{T} = \frac{2^3}{5}$
16) $y = \frac{2}{T^2} = \frac{2^5}{5^2}$
2) $y = \frac{2}{T^3} = \frac{2^7}{5^3}$

V.

38) $y = Q.T = \frac{3.5}{2^3}$
12) $y = \frac{Q.T^2}{2} = \frac{3.5^2}{2^6}$
21) $y = \frac{Q^2.T}{2} = \frac{3^2.5}{2^5}$
34) $y = \frac{Q^2.T^2}{2} = \frac{3^2.5^2}{2^7}$
4) $y = \frac{Q^3.T}{2^2} = \frac{3^3.5}{2^7}$

VI.

5) $y = \frac{2}{Q.T} = \frac{2^4}{3.5}$
31) $y = \frac{2^2}{Q.T^2} = \frac{2^7}{3.5^2}$
22) $y = \frac{2^2}{Q^2.T} = \frac{2^6}{3^2.5}$
9) $y = \frac{2^2}{Q^2.T^2} = \frac{2^8}{3^2.5^2}$
39) $y = \frac{2^3}{Q^3.T} = \frac{2^8}{3^3.5}$

VII.

3) $y = \frac{T^2}{Q} = \frac{5^2}{2^3.3}$
17) $y = \frac{T^3}{Q} = \frac{5^3}{2^5.3}$
14) $y = \frac{Q}{T} = \frac{2.3}{5}$
36) $y = \frac{Q^2}{T} = \frac{3^2}{5}$
23) $y = \frac{Q^2}{T^2} = \frac{2^2.3^2}{5^2}$
10) $y = \frac{Q^2}{T^3} = \frac{2^4.3^2}{5^3}$
32) $y = \frac{Q^3}{T^3} = \frac{2^3.3^3}{5^3}$
19) $y = \frac{Q^3}{2.T} = \frac{3^3}{2^2.5}$
6) $y = \frac{Q^3}{2.T^2} = \frac{3^3}{5^2}$

VIII.

40) $y = \frac{2.Q}{T^2} = \frac{2^4.3}{5^2}$
26) $y = \frac{2.Q}{T^3} = \frac{2^6.3}{5^3}$
29) $y = \frac{2.T}{Q} = \frac{5}{3}$
7) $y = \frac{2.T}{Q^2} = \frac{2.5}{3^2}$
20) $y = \frac{2.T^2}{Q^2} = \frac{5^2}{2.3^2}$
33) $y = \frac{2.T^3}{Q^2} = \frac{5^3}{2^3.3^2}$
11) $y = \frac{2.T^3}{Q^3} = \frac{5^3}{2^2.3^3}$
24) $y = \frac{2^2.T}{Q^3} = \frac{2^3.5}{3^3}$
37) $y = \frac{2^2.T^2}{Q^3} = \frac{2.5^2}{3^3}$

Man übersieht sogleich, dass die Töne der ersten und zweiten Classe nur von der Quinte, die der dritten und vierten nur von der

grossen Terz, die der vier letzten Classen von Quinte und grosser Terz zugleich abhängig sind. Die Producte aus je zweien einander gegenüberstehenden Ausdrücken sind durchgängig = 2. Der zweite Ton in diesen Paaren ist also immer ebenso als unterer Ton der Octave benannt wie der erste als oberer Ton des Grundtons.

§ 12.

Wir können aber auch in noch einfacherer Weise das Bildungsgesetz dieser Töne darstellen. Ueberall nämlich wo in den vorstehenden allgemeinen Ausdrücken durch Q und T der Nenner 2 vorkommt, zeigt dies an, dass der entsprechende Ton die untere Octave eines andern Tons ist, dessen Ausdruck durch Weglassung dieses Nenners erhalten wird. Eben so zeigt der Nenner 2^2 an, dass der entsprechende Ton die zweite untere Octave eines Tons ist, dessen Ausdruck durch Weglassung dieses Nenners sich ergiebt. In gleicher Weise zeigen die allgemeinen Ausdrücke, in denen 2 oder 2^2 als Factor des Zählers vorkommt, an, dass die ihnen entsprechenden Töne erste oder zweite obere Octaven von Tönen sind, deren Ausdrücke durch Weglassung dieser Factoren erhalten werden. Man kann also die im vorigen § aufgeführten Töne auf solche zurückführen, deren Ausdrücke nur Q und T ohne Zahlen-Coefficienten oder Zahlen-Nenner enthalten. Aus diesen Tönen ergeben sich also die vorstehenden, wenn man diejenigen unter ihnen, deren relative Schwingungszahlen > 2 sind, je nachdem sie < 4, oder > 4, aber < 8, resp. um eine oder zwei Octaven erniedrigt, diejenigen aber, deren relative Schwingungszahlen < 1 sind, je nachdem sie $> \frac{1}{2}$, oder $< \frac{1}{2}$, aber $> \frac{1}{4}$, resp. um eine oder zwei Octaven erhöht. Diese Töne nun, die wir mit denselben Numern bezeichnen wie die aus ihnen abzuleitenden, lassen sich mit den übrigen der im Vorigen aufgeführten 40 Töne zusammengenommen in folgende acht Classen bringen.

I.

25) $Q = \frac{3}{2}$; 8) $Q^2 = \frac{3^2}{2^2}$; 30) $Q^3 = \frac{3^3}{2^3}$.

II.

18) $\frac{1}{Q} = \frac{2}{3}$; 35) $\frac{1}{Q^2} = \frac{2^2}{3^2}$; 13) $\frac{1}{Q^3} = \frac{2^3}{3^3}$.

III.

15) $T = \frac{5}{2^2}$; 27) $T^2 = \frac{5^2}{2^4}$; 41) $T^3 = \frac{5^3}{2^6}$.

IV.

28) $\frac{1}{T} = \frac{2^2}{5}$; 16) $\frac{1}{T^2} = \frac{2^4}{5^2}$; 2) $\frac{1}{T^3} = \frac{2^6}{5^3}$.

V.

38) $Q.T = \frac{3.5}{2^3}$; 21) $Q^2.T = \frac{3^2.5}{2^4}$; 4) $Q^3.T = \frac{3^3.5}{2^5}$;
12) $Q.T^2 = \frac{3.5^2}{2^5}$; 34) $Q^2.T^2 = \frac{3^2.5^2}{2^6}$.

VI.

5) $\frac{1}{Q.T} = \frac{2^3}{3.5}$; 22) $\frac{1}{Q^2.T} = \frac{2^4}{3^2.5}$; 39) $\frac{1}{Q^3.T} = \frac{2^5}{3^3.5}$;
31) $\frac{1}{Q.T^2} = \frac{2^5}{3.5^2}$; 9) $\frac{1}{Q^2.T^2} = \frac{2^6}{3^2.5^2}$.

VII.

14) $\frac{Q}{T} = \frac{2.3}{5}$; 40) $\frac{Q}{T^2} = \frac{2^3.3}{5^2}$; 26) $\frac{Q}{T^3} = \frac{2^5.3}{5^3}$;
36) $\frac{Q^2}{T} = \frac{3^2}{5}$; 23) $\frac{Q^2}{T^2} = \frac{2^2.3^2}{5^2}$; 10) $\frac{Q^2}{T^3} = \frac{2^4.3^2}{5^3}$;
19) $\frac{Q^3}{T} = \frac{3^3}{2.5}$; 6) $\frac{Q^3}{T^2} = \frac{2.3^3}{5^2}$; 32) $\frac{Q^3}{T^3} = \frac{2^3.3^3}{5^3}$.

VIII.

29) $\frac{T}{Q} = \frac{5}{2.3}$; 7) $\frac{T}{Q^2} = \frac{5}{3^2}$; 24) $\frac{T}{Q^3} = \frac{2.5}{3^3}$;
3) $\frac{T^2}{Q} = \frac{5^2}{2^3.3}$; 20) $\frac{T^2}{Q^2} = \frac{5^2}{2^2.3^2}$; 37) $\frac{T^2}{Q^3} = \frac{5^2}{2.3^3}$;
17) $\frac{T^3}{Q} = \frac{5^3}{2^5.3}$; 33) $\frac{T^3}{Q^2} = \frac{5^3}{2^4.3^2}$; 11) $\frac{T^3}{Q^3} = \frac{5^3}{2^3.3^3}$.

§ 13.

Die Eigenthümlichkeit der Bildung jeder dieser acht Classen lässt sich, wie folgt, näher bezeichnen. In I werden die Töne von der Prime aus durch Aufsteigen, in II durch Herabsteigen nach Quinten bestimmt. In III ergeben sich die Töne ebenfalls von der Prime aus durch Aufsteigen, in IV durch Herabsteigen nach grossen Terzen. Die Töne der Classen I und II sind also nur von der relativen Schwingungszahl der Quinte, die der Classen III und IV nur von der der grossen Terz abhängig. Die Töne in V entstehen sowohl, wenn man von jedem Ton in III nach Quinten, als wenn man von jedem

Ton in I nach grossen Terzen aufsteigt. Die Töne in VI entstehen sowohl, wenn man von jedem Ton in IV nach Quinten, als wenn man von jedem Ton in II nach grossen Terzen herabsteigt. Die Töne in VII ergeben sich sowohl, wenn man von jedem Ton in IV nach Quinten auf-, als wenn man von jedem Ton in I nach grossen Terzen herabsteigt. Die Töne in VIII endlich ergeben sich sowohl, wenn man von jedem Ton in III nach Quinten herab-, als wenn man von jedem Ton in II nach grossen Terzen aufsteigt. Im Uebrigen erhellt von selbst, dass die sich der Reihe nach entsprechenden Töne der Classen I und II, III und IV, V und VI, VII und VIII reciproke Schwingungszahlen haben.

Es leuchtet ferner ein, dass in jeder dieser Classen die Bildung von Tönen ins Unbegrenzte geht, und zwar in I bis IV nur nach einer, in V bis VIII aber nach zwei Richtungen. Denn die ersten vier Classen stellen nur einfache Reihen, die übrigen aber Reihen von Reihen dar. Es ist leicht, das allgemeine Glied jeder dieser einfachen Reihen und Doppelreihen darzustellen. Es findet sich nämlich

für I, $Q^m = \frac{3^m}{2^m}$; für V, $Q^m . T^n = \frac{3^m . 5^n}{2^{m+2n}}$;

für II, $\frac{1}{Q^m} = \frac{2^m}{3^m}$; für VI, $\frac{1}{Q^m . T^n} = \frac{2^{m+2n}}{3^m . 5^n}$;

für III, $T^n = \frac{5^n}{2^{2n}}$; für VII, $\frac{Q^m}{T^n} = \frac{2^{2n-m} . 3^m}{5^n}$;

für IV, $\frac{1}{T^n} = \frac{2^{2n}}{5^n}$; für VIII, $\frac{T^n}{Q^m} = \frac{5^n}{2^{2n-m} . 3^m}$.

Hieraus ergiebt sich die wichtige Folge, dass, wie weit man auch in der Bestimmung von den Tönen nach dem angegebenen Bildungsgesetz gehen möge, man doch niemals auf eine obere oder untere Octave eines nach demselben Gesetz bestimmten Tons kommt. Denn da die relative Schwingungszahl der k-ten Octave irgend eines Tons. dessen relative Schwingungszahl $= a$, durch $2^k . a$ ausgedrückt wird, so wäre es nur denkbar, dass Töne der Classen II, IV, VI, VII (wenn $2n > m$) und VIII (wenn $2n < m$) obere Octaven andrer, nach demselben Bildungsgesetz bestimmter Töne wären. Giebt man nun den allgemeinen Gliedern dieser Classen der Reihe nach die Formen k-ter Octaven, nämlich
$2^k . \frac{2^{m-k}}{3^m}$; $2^k . \frac{2^{2n-k}}{5^n}$; $2^k . \frac{2^{m+2n-k}}{3^m . 5^n}$; $2^k . \frac{2^{2n-m-k} . 3^m}{5^n}$; $2^k . \frac{5^n}{2^{2n-m+k} . 3^m}$;
so müsste es in den acht Classen Töne geben, deren Schwingungszahlen die Formen

$$\frac{2^{m-k}}{3^m}, \quad \frac{2^{2n-k}}{5^n}, \quad \frac{2^{m+2n-k}}{3^m \cdot 5^n}, \quad \frac{2^{2n-m-k} \cdot 3^m}{5^n}, \quad \frac{5^n}{2^{2n-m+k} \cdot 3^m}$$

haben, was nicht der Fall ist, wie die Vergleichung mit den angegebenen Formen der allgemeinen Glieder lehrt. Auf ganz ähnliche Weise lässt sich leicht erweisen, dass eben so wenig ein nach dem angegebenen Bildungsgesetz bestimmter Ton irgend eine untere Octave eines andern seyn kann. Hieraus folgt, dass in der ganzen Reihe der so bestimmten Töne keine Periodicität statt findet. Man kann jedoch jeden erhaltenen Ton um 1, 2, 3 ... Octaven erhöhen und erniedrigen, und hierdurch zwischen je zwei nächsten Octaven, mögen sie hoch oder tief liegen, immer gleich viele Töne bestimmen, die zu den sie einschliessenden Octaven in denselben Verhältnissen stehen.

Endlich ist auch leicht zu ersehen, dass kein Ton der einen Classe mit einem Ton einer andern Classe zusammenfallen kann. Denn es müsste dann entweder $\frac{3^m}{2^m} = \frac{5^n}{2^{2n}}$, d. i. wenn $2n > m$, $3^m \cdot 2^{2n-m} = 5^n$, wenn $2n < m$, $3^m = 2^{m-2n} \cdot 5^n$, oder $\frac{3^m \cdot 5^n}{2^{m+2n}} = \frac{2^{2n-m} \cdot 3^m}{5^n}$, d. i. $5 = 2^2$ seyn, was beides unmöglich ist.

II.

BESTIMMUNG DER TONINTERVALLE.

§ 14.

Das musikalische Gehör unterscheidet die Höhe der Töne weder nach dem geometrischen noch nach den arithmetischen Verhältnissen ihrer Schwingungszahlen. Denn angenommen das Erste, so müsste das Ohr die Höhe der Octave doppelt, die der Quinte $\frac{3}{2}$mal, die der Quarte $\frac{4}{3}$mal so gross als die der Prime finden u. s. f., was nicht der Fall und überhaupt eine dem Gehör ganz fremde Art der Schätzung der Töne ist. Angenommen das Zweite, so sind, wenn α die absolute Schwingungszahl des Grundtons, die absoluten Schwingungszahlen seiner 1sten, 2ten, 3ten ...... $(n-1)$ten, $n$ten Octave der Reihe nach 2α, 4α, 8α ..... $2^{n-1}\alpha$, $2^n\alpha$. Dann müsste dem Gehör der Unterschied zwischen der 1sten und 2ten Octave 2mal, der zwischen der 2ten und 3ten 4mal, der zwischen der $(n-1)$ten und $n$ten Octave 2^{n-1}mal so gross erscheinen als der Unterschied zwischen der ersten Octave und dem Grundton; es müsste das Gehör nach denselben Verhältnissen zwischen je zwei nächsten Octaven um so mehr Töne unterscheiden, je höher dieselben liegen, indess es doch zwischen denselben, wie hoch oder tief sie liegen mögen, nur immer dieselben Tonunterschiede, nicht mehr und nicht weniger empfindet. Allerdings aber unterscheidet es Differenzen der Töne, die sich auf ihre verschiedenen Höhen beziehen, nur sind dieselben nicht die ihrer Schwingungszahlen, obwohl diese ihre Höhe bestimmen. Heissen nun diese Differenzen die Intervalle der Töne, und wird hierbei der Grundton als derjenige Ton angesehen, in Beziehung auf welchen die Verschiedenheit der übrigen Töne durch Zahlen bestimmt werden soll, so fragt es sich, auf welche Weise dies geschehen muss, und in welchem Zusammenhang diese Zahlenbestimmungen der Intervalle mit den Schwingungszahlen stehen.

§ 15.

Hierauf giebt nun folgende Betrachtung Antwort. Die relativen Schwingungszahlen der successiven Octaven irgend eines angenommenen Grundtons bilden mit diesem die geometrische Reihe

$$2^0,\ 2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \ldots\ldots\ 2^n,$$

die Exponenten der Glieder derselben die arithmetische Reihe

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\ldots\ n.$$

Ist nun, wie bisher, y die relative Schwingungszahl irgend eines zwischen dem Grundton und seiner ersten Octave liegenden Tons, so kann man sich dieselbe als eine Potenz von 2 vorstellen, deren Exponent x zwischen 0 und 1 liegen muss, so dass also

$$y = 2^x, \qquad (1)$$

woraus folgt

$$x = \frac{\log y}{\log 2}. \qquad (2)$$

Bedient man sich der gemeinen Briggischen Logarithmen, so ist $\log 2 = 0{,}30103$, daher dann

$$x = 3{,}32190 \,.\, \log y. \qquad (3)$$

Bedient man sich aber solcher Logarithmen, deren Basis $= 2$, so wird $\log_2 2 = 1$, daher dann

$$x = \log_2 y. \qquad (4)$$

Da die relativen Schwingungszahlen der Töne, die um $1, 2, 3, \ldots . n$ Octaven höher liegen, der Reihe nach $2y,\ 2^2y,\ 2^3y,\ \ldots .\ 2^ny$ sind, so ergiebt sich aus der Gleichung (1)

$$2^ny = 2^{x+n},$$

woraus folgt

$$x + n = \frac{\log(2^ny)}{\log 2} = \log_2(2^ny). \qquad (5)$$

Eben so folgt für die Töne, welche um $1,\ 2,\ 3,\ \ldots .\ n$ Octaven tiefer liegen als der Ton, den y bezeichnet, und deren relative Schwingungszahlen also der Reihe nach $\frac{y}{2}, \frac{y}{2^2}, \frac{y}{2^3}, \ldots . \frac{y}{2^n}$ sind,

$$\frac{y}{2^n} = 2^{x-n},$$

daher

$$x - n = \frac{\log\left(\frac{y}{2^n}\right)}{\log 2} = \log_2\left(\frac{y}{2^n}\right). \qquad (6)$$

Es kann also mittels der Formeln (2) bis (6) für jeden Ton, dessen relative Schwingungszahl gegeben ist, zwischen welchen Octaven des Grundtons er liegen möge, der Exponent x von 2 gefunden werden, der eine dieser Schwingungszahl gleiche Potenz giebt.

Sey nun die relative Schwingungszahl eines Tons, der höher liegt als der durch y gegebene, $= y'$, der Exponent von 2, der eine dem Werthe von y' gleiche Potenz giebt, $= x'$, so ist nach dem Vorstehenden

$$y' = 2^{x'}, \quad x' = \log_2 y';$$

daher

$$\frac{y'}{y} = 2^{x'-x}; \tag{7}$$

$$x' - x = \log_2 \left(\frac{y'}{y}\right). \tag{8}$$

Offenbar wird $x' - x = 1$, wenn $y' = 2y$, also der zweite Ton die Octave des ersten; es wird $\gtrless 1$, je nachdem $y' \gtrless 2y$. Diese Differenz $x' - x = \log_2 y' - \log_2 y$, also die Differenz der Logarithmen der relativen Schwingungszahlen y', y bestimmt nun, wie sich sogleich deutlicher zeigen wird, die Grösse des Intervalls zwischen den beiden durch y, y' gegebenen Tönen.

§ 16.

Die Musik misst bekanntlich die Grösse der Intervalle der Töne, deren sie sich bedient, nach Zwölfteln der Octave ab, die sie halbe Töne nennt. Wir können nun untersuchen, wie weit diese Bestimmung mit der gegebenen logarithmischen zusammentrifft. Die Töne, welche die Musik, wenigstens auf den Tasteninstrumenten, ausschliesslich verwendet, sind die Prime, kleine und grosse Secunde, kleine und grosse Terz, Quarte, (grössere) übermässige Quarte, Quinte, kleine und grosse Sexte, (kleinere) kleine Septime, grosse Septime und Octave, also die Töne, deren relative Schwingungszahlen in § 9 unter Nr. 1, 5, 8, 14, 15, 18, 21, 25, 28, 29, 35, 38 und 42 angegeben sind. Berechnen wir nun nach der Formel (3) im vorigen § die Werthe ihrer Intervalle x mit dem Grundton, stellen diese mit den Werthen x_1 nach Zwölfteln der Octave zusammen und bemerken endlich die Unterschiede beider Werthe, so ergiebt sich folgende Tabelle:

	x	x_1	$x - x_1$
Prime	0,00000	$0 = 0,00000$	0,00000
kleine Secunde	0,09311	$\frac{1}{12} = 0,08333$	0,00978
grosse Secunde	0,16992	$\frac{2}{12} \doteq 0,16667$	0,00325
kleine Terz	0,26303	$\frac{3}{12} = 0,25000$	0,01303
grosse Terz	0,32193	$\frac{4}{12} = 0,33333$	— 0,01140
Quarte	0,41504	$\frac{5}{12} = 0,41667$	— 0,00163
übermässige Quarte	0,49186	$\frac{6}{12} = 0,50000$	— 0,00814
Quinte	0,58496	$\frac{7}{12} = 0,58333$	0,00163
kleine Sexte	0,67807	$\frac{8}{12} = 0,66667$	0,01140
grosse Sexte	0,73697	$\frac{9}{12} = 0,75000$	— 0,01303
kleine Septime	0,83008	$\frac{10}{12} = 0,83333$	— 0,00325
grosse Septime	0,90689	$\frac{11}{12} = 0,91667$	— 0,00978
Octave	1,00000	$1 = 1,00000$	0,00000

§ 17.

Um zuvörderst diese Differenzen unter $x - x_1$ auf ein fasslicheres Mass zurückzuführen, können wir sie in Theilen der reinen grossen Secunde oder des grossen ganzen Tons, dessen Intervall $= 0,16992$, ausdrücken. Alsdann ergiebt sich

für die	$x - x_1$
kleine Secunde / grosse Septime	$\pm \frac{1}{17,4}$ grosser ganzer Ton
grosse Secunde / kleine Septime	$\pm \frac{1}{52,1}$,, ,, ,,
kleine Terz / grosse Sexte	$\pm \frac{1}{13}$,, ,, ,,
grosse Terz / kleine Sexte	$\mp \frac{1}{14,9}$,, ,, ,,
Quarte / Quinte	$\mp \frac{1}{103,6}$,, ,, ,,
übermässige Quarte	$- \frac{1}{20,9}$,, ,, ,,

Diese Differenzen sind jedoch weder Abweichungen der Theorie von der Erfahrung, noch zeigen sie eine unvollkommene musikalische

Schätzung der Intervalle an, sondern sie beruhen darauf, dass, wo in der Musik die Messung der Intervalle durch Zwölftel der Octave in aller Strenge richtig ist, die relativen Schwingungszahlen der Töne von den einfachen rationalen Schwingungsverhältnissen in der That abweichen, daher die Töne nicht mehr akustisch reine sind. Wir können die relativen Schwingungszahlen, die ihnen dann zukommen, leicht berechnen. Aus § 15 (2) folgt nämlich, wenn man $x = \frac{m}{12}$ setzt,

$$\log y_1 = 0{,}3010300 \, . \, \frac{m}{12} = 0{,}0250858 \, . \, m$$

Giebt man nun m successiv die Werthe 1, 2, 3, ... 11, so erhält man die folgenden Werthe von y_1, denen wir zur Vergleichung die obengefundenen reinen relativen Schwingungszahlen gegenüberstellen, und die wir zugleich in den irrationalen (genäherten) Verhältnisszahlen ausdrücken, die dann an die Stelle der rationalen Verhältnisse treten.

	y	y_1
kleine Secunde	$\frac{16}{15} = 1{,}06667$	$1{,}05946 = \frac{15{,}89190}{15}$
grosse Secunde	$\frac{9}{8} = 1{,}12500$	$1{,}12246 = \frac{8{,}97968}{8}$
kleine Terz	$\frac{6}{5} = 1{,}20000$	$1{,}18921 = \frac{5{,}94605}{5}$
grosse Terz	$\frac{5}{4} = 1{,}25000$	$1{,}25992 = \frac{5{,}03968}{4}$
Quarte	$\frac{4}{3} = 1{,}33333$	$1{,}33484 = \frac{4{,}00452}{3}$
übermässige Quarte	$\frac{45}{32} = 1{,}40625$	$1{,}41421 = \frac{45{,}25472}{32}$
Quinte	$\frac{3}{2} = 1{,}50000$	$1{,}49831 = \frac{2{,}99662}{2}$
kleine Sexte	$\frac{8}{5} = 1{,}60000$	$1{,}58740 = \frac{7{,}93700}{5}$
grosse Sexte	$\frac{5}{3} = 1{,}66667$	$1{,}68179 = \frac{5{,}04537}{3}$
kleine Septime	$\frac{16}{9} = 1{,}77778$	$1{,}78180 = \frac{16{,}03620}{9}$
grosse Septime	$\frac{15}{8} = 1{,}87500$	$1{,}88775 = \frac{15{,}10200}{8}$

§ 18.

Wir wollen jetzt für sämmtliche in § 9 bestimmte Töne die Grösse ihrer Intervalle mit dem Grundton berechnen. Dies kann auf sehr einfache Weise geschehen, wenn wir die in § 10 aufgefundenen Ausdrücke der relativen Schwingungszahlen sämmtlicher Töne durch diejenigen der Quinte und grossen Terz benutzen. Alle jene Ausdrücke sind nämlich unter der allgemeinen Form

$$y = 2^m \, . \, Q^n \, . \, T^p$$

enthalten, wo m, n, p theils positive, theils negative ganze Zahlen, theils Null sind. Hieraus folgt nun als allgemeiner Ausdruck des Intervalls x zwischen dem durch y bestimmten Ton und dem Grundton

$$x = \frac{\log y}{\log 2} = m + n \cdot \frac{\log Q}{\log 2} + p \cdot \frac{\log T}{\log 2},$$

oder wenn wir zur Abkürzung $\frac{\log Q}{\log 2} = q$ und $\frac{\log T}{\log 2} = t$ setzen, wo also q und t die Intervalle der Quinte und der grossen Terz mit dem Grundton bezeichnen,

$$x = m + nq + pt.$$

Hierdurch ergiebt sich nun, wenn man die jedem Ton zukommenden Werthe vom m, n und p setzt und dabei, zur Erlangung grösserer Schärfe, die Werthe $q = 0{,}5849625$ und $t = 0{,}3219281$ zum Grunde legt, folgende Tabelle der Intervalle, in welcher je zwei gleich weit vom Anfang und Ende abstehende (deren Numern also die Summe 43 geben) einander zum Octavenintervall ergänzen, indem ihre Summe = 1 ist.

		x	
1)	Prime,	0	$= 0{,}00000$
2)	kleine Diesis,	$1 - 3t$	$= 0{,}03422$
3)	übermässige Prime,	$2t - q$	$= 0{,}05889$
4)	kleines Limma,	$3q + t - 2$	$= 0{,}07682$
5)	kleine Secunde,	$1 - q - t$	$= 0{,}09311$
6)	grosses Limma,	$3q - 2t - 1$	$= 0{,}11103$
7)	kleiner ganzer Ton,	$1 - 2q + t$	$= 0{,}15200$
8)	grosse Secunde,	$2q - 1$	$= 0{,}16992$
9)	kleinere verminderte Terz,	$2 - 2q - 2t$	$= 0{,}18622$
10)	grössere verminderte Terz,	$2q - 3t$	$= 0{,}20414$
11)	kleinere übermässige Secunde,	$1 - 3q + 3t$	$= 0{,}21090$
12)	grössere übermässige Secunde,	$q + 2t - 1$	$= 0{,}22882$
13)	alterirte kleine Terz,	$2 - 3q$	$= 0{,}24511$
14)	kleine Terz,	$q - t$	$= 0{,}26303$
15)	grosse Terz,	t	$= 0{,}32193$
16)	verminderte Quarte,	$1 - 2t$	$= 0{,}35614$
17)	übermässige Terz,	$3t - q$	$= 0{,}38082$
18)	Quarte,	$1 - q$	$= 0{,}41504$
19)	alterirte Quarte,	$3q - t - 1$	$= 0{,}43296$
20)	kleinere übermässige Quarte,	$1 - 2q + 2t$	$= 0{,}47393$
21)	grössere übermässige Quarte,	$2q + t - 1$	$= 0{,}49185$

		x
22)	kleinere verminderte Quinte,	$2-2q-t = 0{,}50815$
23)	grössere verminderte Quinte,	$2q-2t = 0{,}52607$
24)	alterirte Quinte,	$2-3q+t = 0{,}56704$
25)	Quinte,	$q = 0{,}58496$
26)	verminderte Sexte,	$1+q-3t = 0{,}61918$
27)	übermässige Quinte,	$2t = 0{,}64386$
28)	kleine Sexte,	$1-t = 0{,}67807$
29)	grosse Sexte,	$1-q+t = 0{,}73697$
30)	alterirte grosse Sexte,	$3q-1 = 0{,}75489$
31)	kleinere verminderte Septime,	$2-q-2t = 0{,}77118$
32)	grössere verminderte Septime,	$3q-3t = 0{,}78910$
33)	kleinere übermässige Sexte,	$1-2q+3t = 0{,}79586$
34)	grössere übermässige Sexte,	$2q+2t-1 = 0{,}81378$
35)	kleinere kleine Septime,	$2-2q = 0{,}83008$
36)	grössere kleine Septime,	$2q-t = 0{,}84800$
37)	alterirte grosse Septime,	$2-3q+2t = 0{,}88897$
38)	grosse Septime,	$q+t = 0{,}90689$
39)	kleinere verminderte Octave,	$3-3q-t = 0{,}92318$
40)	grössere verminderte Octave,	$1+q-2t = 0{,}94111$
41)	alterirte Octave,	$3t = 0{,}96578$.
42)	Octave,	$1 = 1{,}00000$

§ 19.

Die theoretische Musik bedient sich noch andrer kleiner Intervalle als der kleinsten unter den hier bestimmten und nennt sie Kommata.*) Obgleich wir ihrer ganz entbehren können, da man ganz einfach eine anschauliche Vorstellung von der Grösse eines Intervalls erhält, wenn man es nach Theilen des grossen ganzen Tons (der reinen grossen Secunde) bestimmt, wovon wir in § 17 bereits Gebrauch gemacht haben, so mögen doch, um die Vergleichung mit manchen Angaben der älteren Theoretiker zu erleichtern, hier einige der am meisten gebrauchten erwähnt und in Theilen der Octave und des grossen ganzen Tons bestimmt werden.

*) Zu ihnen gehören auch schon das grosse und kleine Limma und die kleine Diesis.

1) Das Komma der Alten, der neunte Theil des ganzen Tons, also = 0,01888 der Octave; es wird eingetheilt in zwei Schismata; ein Schisma ist also = 0,00944 der Octave.

2) Das syntonische Komma, das Intervall zwischen dem kleinen ganzen Ton und der grossen Secunde, wofür $x = 4q - t - 2 = 0{,}01792 = \frac{1}{9{,}4}$ grosser ganzer Ton. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl $y = \frac{Q^4}{2^3 . T} = \frac{3^4}{2^4 . 5} = \frac{81}{80} = 1{,}01250$.

3) Die grosse Diesis, das Intervall zwischen dem syntonischen Komma und der übermässigen Prime, wofür $x = 3t - 5q + 2 = 0{,}04097 = \frac{1}{4{,}1}$ grosser ganzer Ton. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl $y = \frac{2^2 . T^3}{Q^5} = \frac{2 . 5^3}{3^5} = \frac{250}{243} = 1{,}02881$.

4) Der diatonische halbe Ton, das Intervall zwischen dem syntonischen Komma und der kleinen Secunde, daher $x = 3 - 5q = 0{,}07519 = \frac{1}{2{,}3}$ grosser ganzer Ton. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl $y = \frac{2^3}{Q^5} = \frac{2^8}{3^5} = \frac{256}{243} = 1{,}05350$.

5) Der verminderte kleine halbe Ton (übermässige Prime), das Intervall zwischen der kleinen Diesis und der übermässigen Prime, daher $x = 5t - q - 1 = 0{,}02468 = \frac{1}{6{,}9}$ grosser ganzer Ton; wozu die relative Schwingungszahl $y = \frac{T^5}{2Q} = \frac{5^5}{3 . 2^{10}} = \frac{3125}{3072} = 1{,}01696$ gehört.

6) Der Drittheilston, das Intervall zwischen der grossen Diesis und der kleinen Secunde, daher $x = 4q - 4t - 1 = 0{,}05214 = \frac{1}{3{,}3}$ grosser ganzer Ton; wozu die relative Schwingungszahl $y = \frac{Q^4}{2 . T^4} = \frac{2^3 . 3^4}{5^4} = \frac{648}{625} = 1{,}03680$ gehört.

Auf das ditonische oder pythagorische Komma werden wir an einer späteren Stelle kommen.

§ 20.

Es mag nicht unbemerkt bleiben, dass man auch ohne Logarithmen wenigstens zu einer genäherten Bestimmung der Intervalle gelangen kann. Für sehr nahe liegende Töne ist nämlich das Intervall proportional dem um 1 verminderten Quotienten aus der (relativen oder absoluten) Schwingungszahl des niedrigeren Tons in die des höheren. Denn setzt man in § 15, (8) $y' = y + y' - y$, so wird $x' - x = \log_2 \left(1 + \frac{y' - y}{y}\right)$.

Ist nun $\frac{y'-y}{y}$ so klein, dass seine Potenzen vernachlässigt werden können, so wird*)

$$x' - x = \frac{1}{\log \text{nat } 2} \cdot \frac{y'-y}{y} = 1{,}44269 \cdot \frac{y'-y}{y};$$

woraus erhellt, dass $x' - x$ proportional $\frac{y'}{y} - 1$ ist. Nach dieser Formel wird z. B. gefunden: das Intervall der kleinen Secunde mit dem Grundton, für welches $\frac{y'-y}{y} = \frac{1}{15}$, 0,09618 anstatt 0,09311; das der übermässigen Prime, wo $\frac{y'-y}{y} = \frac{1}{25}$, 0,05770 anstatt 0,05889; das der kleinen Diesis, wo $\frac{y'-y}{y} = \frac{3}{128}$, 0,03350 statt 0,03422; das syntonische Komma, für welches $\frac{y'-y}{y} = \frac{1}{81}$, 0,01781 statt 0,01792 u. s. f. Genauer können wir aus der Proportionalität von $x' - x$ zu $\frac{y'}{y} - 1$ in folgender Weise die Intervalle der in § 16 aufgeführten Haupttöne mit dem Grundton bestimmen. Es ist

für das Intervall zwischen	$\frac{y'}{y} - 1$
Prime und kleiner Secunde,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Secunde und grosser Secunde,	$\frac{7}{128} = 0{,}05469$
grosser Secunde und kleiner Terz,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Terz und grosser Terz,	$\frac{1}{24} = 0{,}04167$
grosser Terz und Quarte,	$\frac{7}{15} = 0{,}06667$
Quarte und übermässiger Quarte,	$\frac{7}{128} = 0{,}05469$
übermässiger Quarte und Quinte,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
Quinte und kleiner Sexte,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Sexte und grosser Sexte,	$\frac{1}{24} = 0{,}04167$
grosser Sexte und kleiner Septime,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$
kleiner Septime und grosser Septime,	$\frac{7}{128} = 0{,}05469$
grosser Septime und Octave,	$\frac{1}{15} = 0{,}06667$

Die Summe aller dieser Werthe ist = 0,71410. Macht man dieselbe, da sie offenbar dem Intervall zwischen Prime und Octave entspricht, zur Einheit und drückt die obigen successiven Intervalle in Theilen dieser Einheit aus, so sind ihre Werthe folgende:

---

*) Wie sich auch unmittelbar durch Differentiation der Formel $x = \frac{\lg n\, y}{\lg n\, 2}$ ergiebt, wenn man $dx = x' - x$ und $dy = y' - y$ setzt.

0,09336; 0,07659; 0,09336; 0,05835; 0,09336; 0,07659;
0,09336; 0,09336; 0,05835; 0,09336; 0,07659; 0,09336.

Bildet man nun successiv die Summen der 2, 3, 4, ... 11 ersten von diesen zwölf Werthen, so erhält man, mit Wiederholung des ersten Werthes der Reihe, folgende Zahlen:

0,09336; 0,16995; 0,26331; 0,32166; 0,41502; 0,49161;
0,58497; 0,67833; 0,73668; 0,83004; 0,90663,

die in der That die Intervalle der kleinen und grossen Secunde, kleinen und grossen Terz, Quarte, übermässigen Quarte, Quinte, kleinen und grossen Sexte, kleinen und grossen Septime theils bis auf drei, theils bis auf vier Decimalen richtig darstellen.

§ 21.

Seyen z, z' die absoluten Schwingungszahlen der Töne, deren relative y, y', und deren Intervalle mit dem Grundton x, x' sind. Da nun $\frac{z'}{z} = \frac{y'}{y}$, so ist nach der im vorigen § angewandten Formel auch

$$x' - x = \log_2 \left(1 + \frac{z' - z}{z}\right),$$

oder, wenn wir $x' - x = \Delta x$ und $z' - z = \Delta z$ setzen,

$$\Delta x = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)}{\log 2}.$$

Diese Formel giebt an, um wie viel sich im Verhältniss zum Intervall der Octave das Intervall x eines Tones, dessen absolute Schwingungszahl $= z$, ändert, wenn sich diese Schwingungszahl um Δz ändert. Um die Aenderung des Intervalls x in Theilen des Intervalls des grossen ganzen Tons zu erhalten, sey $\Delta x = n \cdot \frac{\log \frac{9}{8}}{\log 2}$, wo also n das Verhältniss der Aenderung von x zum Intervall des grossen ganzen Tons ausdrückt; alsdann wird

$$n = \frac{\log\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right)}{\log 9 - \log 8} = 19{,}54994 \cdot \log\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right). \quad (1)$$

Umgekehrt ergiebt sich hieraus

$$\log\left(1 + \frac{\Delta z}{z}\right) = 0{,}05115 \cdot n. \quad (2)$$

Nach dieser Formel ist folgende Tabelle berechnet.

n	$\frac{\Delta z}{z}$		
0,1	0,01185	nahe	$\frac{1}{84,4}$
0,2	0,02384	,,	$\frac{1}{42,6}$
0,25	0,02988	,,	$\frac{1}{33,5}$
0,3	0,03596	,,	$\frac{1}{27,8}$
0,4	0,04824	,,	$\frac{1}{20,7}$
0,5	0,06066	,,	$\frac{1}{16,5}$
0,6	0,07320	,,	$\frac{1}{13,7}$
0,7	0,08594	,,	$\frac{1}{11,6}$
0,75	0,09235	,,	$\frac{1}{10,8}$
0,8	0,09880	,,	$\frac{1}{10,1}$
0,9	0,11182	,,	$\frac{1}{8,9}$
1	0,12500	=	$\frac{1}{8}$

Wenn also die Zahl der Schwingungen eines Tons sich um ihren achten Theil vermehrt, so erhöht sich der Ton um eine grosse Secunde, wenn sie sich aber um $\frac{1}{84,4}$ vermehrt, so erhöht sich der Ton um $\frac{1}{10}$ der grossen Secunde. Die folgende Tabelle enthält eine Reihe kleinerer Werthe, von denen nur der erste nach der Formel berechnet ist, die übrigen nach einfacher Proportion aus ihm abgeleitet sind.

n	$\frac{\Delta z}{z}$		
$\frac{1}{15}$	0,00789	nahe	$\frac{1}{127}$
$\frac{1}{20}$	0,00592	,,	$\frac{1}{169}$
$\frac{1}{25}$	0,00474	,,	$\frac{1}{209}$
$\frac{1}{30}$	0,00395	,,	$\frac{1}{253}$
$\frac{1}{35}$	0,00338	,,	$\frac{1}{296}$
$\frac{1}{40}$	0,00296	,,	$\frac{1}{338}$
$\frac{1}{45}$	0,00263	,,	$\frac{1}{380}$
$\frac{1}{50}$	0,00237	,,	$\frac{1}{422}$
$\frac{1}{60}$	0,00197	,,	$\frac{1}{508}$
$\frac{1}{70}$	0,00169	,,	$\frac{1}{592}$
$\frac{1}{80}$	0,00148	,,	$\frac{1}{676}$
$\frac{1}{90}$	0,00132	,,	$\frac{1}{758}$
$\frac{1}{100}$	0,00118	,,	$\frac{1}{847}$

Das $\bar{a}$ unsrer Stimmgabeln macht im Mittel 880 Schwingungen, folglich das reine $\bar{g}$, wie sich ergiebt, wenn man mit $\frac{9}{10}$ multiplicirt, 792 Schwingungen. Das $\bar{g}$ der Tasteninstrumente aber soll, wie in § 16 gezeigt wurde, um $\frac{1}{103,6}$ des ganzen Tons tiefer stehen. Setzt man daher in der Formel (2) $n = \frac{1}{103,6}$, so ergiebt sich $\frac{\Delta z}{z} = 0,001137$, daher $\Delta z = 0,900504$; folglich muss das $\bar{g}$ der Tasteninstrumente, genau gestimmt, $\frac{9}{10}$ einer Schwingung weniger machen als das reine $\bar{g}$. Das reine $\bar{e}$ macht, wie sich ergiebt, wenn man 880 mit $\frac{3}{4}$ multiplicirt, 660 Schwingungen. Das $\bar{e}$ der Tasteninstrumente soll aber um $\frac{1}{14,9}$ ganzen Ton höher stehen. Die Formel (2) giebt $\frac{\Delta z}{z} = 0,007936$, daher $\Delta z = 5,23776$; folglich muss das $\bar{e}$ der Tasteninstrumente nahe $5\frac{1}{4}$ Schwingungen mehr machen als das reine $\bar{e}$.*)

*) Nach Delezenne's Versuchen (s. die oben angeführte Abhandlung im *Recueil des travaux de la soc. des sc. de Lille p. 5 ff.*) vermag das feinste musikalische Gehör noch zwei Töne zu unterscheiden, die nur um 0,2807 des syntonischen Komma's differiren, wenn diese Töne nicht gleichzeitig, sondern w e c h s e l s w e i s e gehört werden. Diese Differenz ist $= 0,00503$ der Octave oder $= \frac{1}{33,8}$ des ganzen Tons und entspricht dem 287sten Theil der Schwingungszahl des tieferen Tons. Nach demselben unterscheidet

§ 22.

Die durch die Intervalle ausgedrückten Unterschiede der Töne lassen sich auf eine dem Gefühlseindruck, den sie machen, entsprechende Weise versinnlichen. Denkt man sich nämlich das Intervall 1 der Octave mit dem Grundton als den Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser also $= \frac{1}{2\pi} = 0{,}15915$ seyn muss, so werden alle übrigen Intervalle Bogen dieses Kreises, deren zugehörige Mittelpunktswinkel sich leicht bestimmen lassen. Denn offenbar ist, wenn der dem Intervall x entsprechende Winkel $= w$,

$$360^0 : w = 1 : x; \quad \text{also } w = x \,.\, 360^0.$$

Hiernach ergeben sich für die dreizehn Hauptintervalle folgende Werthe von w, denen wir unter w' die Werthe beifügen, die den durch Zwölftel der Octave ausgedrückten Intervallen der Tasteninstrumente entsprechen.

	w	w'
1) Prime	0° 0′	0°
2) kleine Secunde	33° 31′	30°
3) grosse Secunde	61° 10′	60°
4) kleine Terz	94° 10′	90°
5) grosse Terz	115° 53′	120°
6) Quarte	149° 24′	150°
7) übermässige Quarte	177° 42′	180°
8) Quinte	210° 36′	210°
9) kleine Sexte	244° 7′	240°
10) grosse Sexte	265° 19′	270°
11) kleine Septime	298° 50′	300°
12) grosse Septime	326° 29′	330°
13) Octave	360° 0′	360°

dagegen das ungeübte Ohr genau nur die Hälfte dieser Differenz oder $\frac{1}{16{,}9}$ ganzen Ton. Der Unterschied zweier gleichzeitig gehörter Töne wird bemerkbar, wenn er 0,84 Komma $= \frac{1}{11{,}8}$ ganzer Ton beträgt, was dem 96sten Theil der Schwingungszahl des tieferen Tons entspricht; er ist mehr als evident bei 1,11 Komma $= \frac{1}{8{,}5}$ ganzer Ton oder $\frac{1}{64}$ der Schwingungszahl. Grösser ist die Reizbarkeit des Ohrs bei consonirenden Tönen. Das feine Gehör der Musiker unterschied bei Delezenne eine Differenz der Quinte von 0,1461 Komma $= \frac{1}{67{,}5}$ ganzer Ton, das ungeübte Ohr wieder nur die Hälfte. Bei der grossen Terz betrug der merkbare Unterschied nur 0,284 Komma oder $\frac{1}{33{,}4}$ ganzer Ton.

Diese Werthe von w und w' mit ihren zugehörigen Bogen stellen die Figuren 1 und 2 dar. Man kann in ihnen den Halbmesser nach seinen verschiedenen Lagen als das der Lage des Tons gegen den Grundton entsprechende Bild ansehen. *Oc* stellt dann den Grundton, Od^b die kleine Secunde, *Od* die grosse Secunde, Oe^b die kleine Terz vor u. s. w.; durch *Oh*, die grosse Septime, kehrt endlich in *Oc*, der Octave, der Ton zur Lage des Grundtons zurück. Im Uebrigen rechtfertigt sich hier die Benennung der Sexten und Septimen als umgekehrter Terzen und Secunden auch anschaulich. Denn lässt man den Halbmesser, nachdem er den ganzen Umfang des Kreises beschrieben, umkehren, so sind die Secunden und Terzen, die er dann von der Octave aus erzeugt, die Septimen und Sexten des Grundtons. Ebenso fällt die durch diese umgekehrte Drehung beschriebene Quarte mit der Quinte des Grundtons zusammen.*)

§ 23.

Diese Drehung des Halbmessers giebt jedoch von der Veränderung, welche der Ton erleidet, wenn er von dem Grundton allmälig zur Octave übergeht, nur ein unvollständiges Bild; denn die Octave ist bei aller Verwandtschaft mit dem Grundton doch ein von diesem unterscheidbarer Ton. Man sagt nun zwar, sie sey der Grundton in einer höheren Lage, ohne aber darüber eine deutliche Auskunft zu geben. Nahe genug liegt hier die Bemerkung, dass, da die Aenderung der Töne eine allmälige ist, diese höhere Lage nicht plötzlich, erst mit der Octave, eintreten kann, sondern ein stetiger Uebergang zu ihr stattfinden muss.

Wir erhalten hierüber eine völlig genügende Aufklärung, wenn wir der Gleichung $y = 2^x$, die den Zusammenhang zwischen der relativen Schwingungszahl y eines Tons und seinem Intervall x mit dem Grundton darstellt, eine angemessene geometrische Auslegung geben. Wie nämlich die Werthe von x durch Bogen eines Kreises, so können die Werthe von y durch gerade Linien dargestellt werden, die in den Endpunkten jener Bogen senkrecht auf der Ebene des Kreises stehen. Offenbar liegen dann diese die Werthe von y darstellenden Geraden in der krummen Fläche eines Cylinders, der jenen Kreis zur Basis hat, ihre Endpunkte in einer sich um den Cylinder windenden logarithmischen

*) Auf diese bildliche Darstellung hat uns eine Stelle in Newton's Optik (*Lib. I. Pars II. Prop. VI*) geleitet, auf die wir im II. Anhang zurückkommen.

Spirale. Da für $x = 0$, $y = 1$, so ist der Abstand des dem Grundton entsprechenden Punktes dieser Spirale von der Basis des Cylinders $= 1$; und da für $x = 1$, $y = 2$, so ist der Abstand des der Octave entsprechenden Punktes doppelt so gross. Jeder zwischenliegende Ton, für welchen immer $1 > x > 0$ und $2 > y > 1$, hat seinen entsprechenden Punkt in der Spirale. Hiernach stellen also x und y die Coordinaten einer logarithmischen Spirale auf der Fläche eines geraden Cylinders dar, und kann y als die absolute Höhe des Tons, x als seine Abweichung von der Richtung des Grundtons bezeichnet werden.

§ 24.

Setzt man $y - 1 = u$, so drückt u die relative Höhe des durch die relative Schwingungszahl y gegebenen Tons in Bezug auf die Höhe seines Grundtons, oder kürzer die Erhebung des Tons über den Grundton aus; dann ist also

$$u = 2^x - 1.$$

Die Werthe von u werden dargestellt durch die Abstände der Punkte der Spirale von der Ebene des Kreises, die parallel zu der Ebene der Basis durch den Punkt der Spirale gelegt wird, welcher dem Grundton entspricht; oder x und y sind die Coordinaten der Spirale, welche sich auf diesen der Basis parallelen Schnitt des Cylinders beziehen.

Dies veranschaulicht Figur 3, in der $c\ e_1\ g_1\ h\ c$ den eben bezeichneten Kreis, $c\ e\ g\ h\ \bar{c}$ die Spirale auf der Cylinderfläche perspectivisch darstellt. Wie man leicht erkennt, bezeichnen die Buchstaben c, d^b, d, e^b, e u. s. w. die den gleichnamigen Tönen in der Spirale entsprechenden Punkte; die Bogen cd^b_1, cd_1, ce^b_1, ce_1 u. s. f. oder die ihnen zugehörigen Mittelpunktswinkel cOd^b_1, cOd_1, cOe^b_1, cOe_1 u. s. w. stellen die Abweichungen der Töne d^b_1, d_1, e^b_1, e_1 u. s. w. von der Richtung des Grundtons c oder die Intervalle dar; ferner die Geraden $d^bd^b_1$, dd_1, $e^be^b_1$, ee_1 u. s. w. die Erhebungen derselben Töne über den Grundton. Die Töne selbst endlich, deren Verschiedenheit von dem Grundton hiernach eine aus der Abweichung und Erhebung zusammengesetzte ist, werden nach beiden Unterschieden ihrer Lage gegen denselben dargestellt durch die Linien $1d^b$, $2d$, $3e^b$, $4e$ u. s. f., die den Halbmessern Od^b_1, Od_1, Oe^b_1, Oe_1 u. s. f. des Grundkreises resp. parallel sind. Der Octave entspricht also die Linie $12\bar{c}$, welche der Oc parallel ist. Man kann demnach sagen,

dass die Octave zwar nicht mit dem Grundton zusammenfällt, aber dessen nächster paralleler Ton ist.

Nach dieser Darstellung ist nun das der stetigen Aufeinanderfolge der Töne entsprechende Bild nicht sowohl die logarithmische Spirale auf der Cylinderfläche, als vielmehr die Schraubenfläche, welche ein Halbmesser des Cylinders beschreibt, wenn er in der Axe des Cylinders sich erhebt und sich zugleich um dieselbe dreht, und zwischen Erhebung und Drehung die Relation $u = 2^x - 1$, oder was dasselbe, $x = \log_2(1 + u)$ stattfindet. Hebt man, wie in der musikalischen Tonfolge *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, *a*, *h*, $\bar{c}$ geschieht, nur eine bestimmte Anzahl von Tönen, mit Ueberspringung der zwischenliegenden, aus, so geben die ihnen entsprechenden Linien das Bild einer Wendeltreppe. Die Ausdrücke Tonleiter, Tonstufen sind also, wenn man zugleich an die Windung der Leiter denkt, in der That sehr treffend gewählt.

Fig. 4 stellt in verkleinertem Massstab der Höhen den auf den Axenschnitt des Cylinders projicirten Lauf der Spirale der Töne durch mehrere Octaven dar. Da die relative Schwingungszahl der ersten unteren Octave des Grundtons der Spirale $= \frac{1}{2}$ ist, so nimmt die zu dieser führende Windung hinsichtlich der Höhe einen halb so grossen Raum ein als die Windung, welche vom Grundton zur ersten oberen Octave führt. Aus gleichem Grunde nimmt die von der ersten zur zweiten unteren Octave führende Windung den vierten Theil des Raums der ersten obern ein; dagegen streckt sich die Windung von der ersten obern Octave zur zweiten obern durch einen doppelt so grossen Raum als der ist, welchen die Windung zwischen dem Grundton und der ersten obern Octave einnimmt u. s. f.*)

*) So viel mir bekannt, hat zuerst W. Opelt (Ueber die Natur der Musik. Plauen und Leipzig, 1834. S. 43) die obige cylindrische Spirale zur Versinnlichung der Tonreihe benutzt. Von der Schraubenfläche, die mir das Bild erst zu vervollständigen scheint, macht er keinen Gebrauch.

III.

VON DER NOTHWENDIGKEIT DER TEMPERATUR ÜBERHAUPT, INSBESONDERE DER GLEICHSCHWEBENDEN.

§ 25.

Die Musik ist, schon um der Leichtigkeit ihrer Ausübung willen, genöthigt, sich auf eine mässige Anzahl von Tönen zu beschränken. Bei der Auswahl derselben geht sie von der Tonreihe aus, welche die diatonische Dur-Scala heisst und als die einfachste natürlich-wohlgefällige Tonfolge (die Grundlage aller Melodie) betrachtet wird. Sie besteht bekanntlich aus dem Grundton oder der Prime, grossen Secunde, grossen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, grossen Septime und Octave. An sie schliesst sich die diatonische Moll-Scala an, deren Bau, wenigstens nach der gewöhnlichen Ansicht, sich dadurch von der Durscala unterscheidet, dass beim Aufsteigen von der Prime zur Octave die kleine Terz an die Stelle der grossen, beim Herabsteigen von der Octave zur Prime aber überdies noch die kleine Septime und Sexte resp. an die Stelle der grossen Septime und Sexte tritt. Die moderne Musik verlangt aber noch weiter, dass die zum musikalischen Gebrauch ausgewählten Töne von der Art seyn sollen, dass von jedem derselben, wenn er zum Grundton oder zur Octave eines Grundtons gemacht wird, mittels der ausgewählten Töne auf- und abwärts sowohl eine Dur- als eine Mollscala sich darstellen lässt. Der Bezeichnung nach unterscheidet die Musik mindestens 21 (mit Einschluss der Octave 22) Töne, nämlich die sieben Haupttöne C, D, E, F, G, A, H und die zwischen liegenden erhöhten und erniedrigten $C^{\#}$, $D^{\#}$, $E^{\#}$, $F^{\#}$, $G^{\#}$, $A^{\#}$, $H^{\#}$; D^{b}, E^{b}, F^{b}, G^{b}, A^{b}, H^{b}, c^{b}, die in den gangbaren Dur- und Moll-Tonarten vorkommen. Die ungewöhnlicheren Tonarten machen doppelte Erhöhungen und Erniedrigungen der Haupttöne nothwendig und würden also die

Zahl der Töne vermehren. Ob die erhöhten und erniedrigten wirklich oder nur der Bezeichnung nach von einander verschieden sind, lassen wir zunächst unerörtert, eben so dies, wie gross ihre Verschiedenheit von den Haupttönen ist, auf welche sie sich beziehen. Beides wird sich von selbst aus den Stellen ergeben, die sie in den Scalen der Tonarten einnehmen, in denen sie sich als nothwendige Mittelglieder zwischen den Haupttönen einschalten. Denn diese Stellen bestimmen vermöge des Gesetzes der Tonleitern ihr Intervall und ihre relative Schwingungszahl in Bezug auf den Grundton der Tonart und können daher als die Definitionen der in jeder Tonart vorkommenden erhöhten und erniedrigten Töne betrachtet werden.

§ 26.

Setzen wir nämlich, um die Grössen der Intervalle, anstatt durch Decimalbrüche, einfacher durch ganze Zahlen auszudrücken, das Intervall der Octave mit dem Grundton = 1000, so erhalten die Intervalle, welche die Dur-Tonleiter bilden, folgende Werthe:

gr. Secunde,	gr. Terz,	Quarte,	Quinte,	gr. Sexte,	gr. Septime,
170	322	415	585	737	907

deren Genauigkeit, da ein Tausendtel der Octave = $\frac{1}{170}$ des ganzen Tons, für unsern Zweck vollkommen zureichend ist. Eben so sind dann die Werthe der Intervalle, welche die Moll-Tonleiter charakterisiren, folgende:

kleine Terz,	kleine Sexte,	kleine Septime
263	678	830

Wir können nun hieraus für jede Tonart, in welcher das Intervall des Grundtons mit dem absoluten Grundton *C* gegeben ist, die Intervalle finden, welche die Töne ihrer Dur- und Moll-Scala mit *C* bilden, wenn wir das Intervall des Grundtons successiv zu den obigen Intervallen der grossen Secunde, grossen (kleinen) Terz, Quarte, Quinte, grossen (kleinen) Sexte, grossen (kleinen) Septime addiren, und, wenn wir die Töne in der gewöhnlichen musikalischen Weise bezeichnen, die Intervalle der erhöhten und erniedrigten Haupttöne mit *C* bestimmen, woraus sich dann auch ihre relativen Schwingungszahlen ableiten lassen. Wir führen dies zuerst in Bezug auf die erhöhten Töne aus.

1) Für *C*-dur ist

$$C = 0,\ D = 170,\ E = 322,\ F = 415,\ G = 585,\ A = 737,\ H = 907.$$

2) Für *G*-dur wird durch Addition von 585 zu diesen Scalenwerthen

$$G = 585,\ A = 755,\ H = 907,\ c = 1000,\ d = 1170,\ e = 1322,\ f^{\#} = 1492;$$

wodurch $f^{\#}$ bestimmt ist und $F^{\#} = 492$ folgt, zugleich aber auch erhellt, dass hier A einen um 18 höhern Werth hat als in *C*-dur.

3) Für *D*-dur wird eben so

$$D = 170,\ E = 340,\ F^{\#} = 492,\ G = 585,\ A = 755,\ H = 907,\ c^{\#} = 1077;$$

wo $F^{\#}$ denselben Werth wie in *G*-dur hat, und $C^{\#} = 77$ wird, E aber einen um 18 höhern Werth erhält als in *C*- und *G*-dur.

4) Für *A*-dur ergiebt sich, wenn nach *C*-dur $A = 737$ gesetzt wird,

$$A = 737,\ H = 907,\ c^{\#} = 1059,\ d = 1152,\ e = 1322,\ f^{\#} = 1474,\ g^{\#} = 1644,$$

also $C^{\#} = 59$, $F^{\#} = 474$, $G^{\#} = 644$; zugleich $D = 152$.

5) Für *E*-dur wird, vorausgesetzt, dass $E = 322$,

$$E = 322,\ F^{\#} = 492,\ G^{\#} = 644,\ A = 737,\ H = 907,\ c^{\#} = 1059,\ d^{\#} = 1229;$$

also $C^{\#} = 59$ wie in *A*-dur, $D^{\#} = 229$, $F^{\#} = 492$, wie in *G*- und *D*-dur, $G^{\#} = 644$, wie in *A*-dur.

6) Für *H*-dur wird

$$H = 907,\ c^{\#} = 1077,\ d^{\#} = 1229,\ e = 1322,\ f^{\#} = 1492,\ g^{\#} = 1644,\ a^{\#} = 1814;$$

also $C^{\#} = 77$, wie in *D*-dur; $D^{\#} = 229$, wie in *E*-dur; $F^{\#} = 492$, wie in *G*-, *D*- und *E*-dur; $G^{\#} = 644$, wie in *A*- und *E*-dur; $A^{\#} = 814$.

7) Für *Fis*-dur ergiebt sich eine doppelte Reihe von Bestimmungen, je nachdem $F^{\#} = 474$ oder $= 492$ gesetzt wird, von denen keine der andern vorgezogen werden kann, indess wir in *A*-, *E*- und *D*-dur, da diese Grundtöne fest bestimmt sind, die Werthe $A = 755$, $E = 340$, $D = 152$, die sich aus *G*-, *D*- und *A*-dur ergeben, zum Grunde zu legen nicht wagen konnten. Es ist daher entweder

$$F^{\#} = 474,\ G^{\#} = 644,\ A^{\#} = 796,\ H = 889,\ c^{\#} = 1059,\ d^{\#} = 1211,\ e^{\#} = 1381;$$

woraus die neuen Bestimmungen von $A^{\#} = 796$, $H = 889$ und $D^{\#} = 211$ folgen und $E^{\#} = 381$ sich ergiebt; oder es ist

$$F^{\#} = 492,\ G^{\#} = 662,\ A^{\#} = 814,\ H = 907,\ c^{\#} = 1077,$$
$$d^{\#} = 1229,\ e^{\#} = 1399;$$

wo $E^{\#} = 399$ wird, die übrigen Bestimmungen aber mit zuvorgefundenen übereinstimmen.

8) Eben so ergiebt sich für *Cis*-dur eine Doppelscala, nämlich entweder

$$C^{\#} = 59,\ D^{\#} = 229,\ E^{\#} = 381,\ F^{\#} = 474,\ G^{\#} = 644,$$
$$A^{\#} = 796,\ H^{\#} = 966;$$

wo nur $H^{\#} = 966$ neu ist; oder es wird

$$C^{\#} = 77,\ D^{\#} = 247,\ E^{\#} = 399,\ F^{\#} = 492,\ G^{\#} = 662,$$
$$A^{\#} = 814,\ H^{\#} = 984;$$

wo also $D^{\#} = 247$, $H^{\#} = 984$, die übrigen Werthe nicht neu sind.

Untersuchen wir die Moll-Tonarten, welche auf erhöhte Töne führen, so ergiebt sich

9) Für *A*-moll

$$A = 737,\ H = 907,\ c = 1000,\ d = 1152,\ e = 1322,$$
$$f = 1415,\ g = 1567;$$

wo $G = 567$ eine neue Bestimmung ist.

10) Für *E*-moll wird

$$E = 322,\ F^{\#} = 492,\ G = 585,\ A = 737,\ H = 709,$$
$$c = 1000,\ d = 1152;$$

woraus keine neuen Bestimmungen folgen.

11) Für *H*-moll wird

$$H = 907,\ c^{\#} = 1077,\ d = 1170,\ e = 1322,\ f^{\#} = 1492,$$
$$g = 1585,\ a = 1737;$$

woraus ebenfalls nicht Neues folgt.

12) *Fis*-moll giebt für $F^{\#} = 474$,

$$F^{\#} = 474,\ G^{\#} = 644,\ A = 737,\ H = 889,\ c^{\#} = 1059,$$
$$d = 1152,\ e = 1304;$$

wo nur $E = 304$ neu ist; für $F^{\#} = 492$ aber wird

$$F^{\#} = 492,\ G^{\#} = 662,\ A = 755,\ H = 907,\ c^{\#} = 1077,$$
$$d = 1170,\ e = 1322;$$

worin keine neue Bestimmung enthalten ist.

13) *Cis*-moll giebt entweder

$$C^{\#} = 59,\ D^{\#} = 229,\ E = 322,\ F^{\#} = 474,\ G^{\#} = 644,$$
$$A = 737,\ H = 889;$$

oder

$$C^{\#} = 77,\ D^{\#} = 247,\ E = 340,\ F^{\#} = 492,\ G^{\#} = 662,$$
$$A = 755,\ H = 907;$$

welche Werthe sämmtlich nicht neu sind.

14) Für *Gis*-moll wird entweder

$$G^{\#} = 644,\ A^{\#} = 814,\ H = 907,\ c^{\#} = 1059,\ d^{\#} = 1229,$$
$$e = 1322,\ f^{\#} = 1474;$$

oder

$$G^{\#} = 662,\ A^{\#} = 832,\ H = 925,\ c^{\#} = 1077,\ d^{\#} = 1247,$$
$$e = 1340,\ f^{\#} = 1492;$$

wo $A^{\#} = 832$ und $H = 925$ neue Bestimmungen sind.

15) *Dis*-moll endlich giebt entweder

$$D^{\#} = 211,\ E^{\#} = 381,\ F^{\#} = 474,\ G^{\#} = 626,\ A^{\#} = 796,$$
$$H = 889,\ c^{\#} = 1041;$$

wo $G^{\#} = 626$ und $C^{\#} = 41$ neu sind; oder

$$D^{\#} = 229,\ E^{\#} = 399,\ F^{\#} = 492,\ G^{\#} = 644,\ A^{\#} = 814,$$
$$H = 907,\ c^{\#} = 1059;$$

wo keine neuen Werthe erscheinen; oder endlich

$$D^{\#} = 247,\ E^{\#} = 417,\ F^{\#} = 510,\ G^{\#} = 662,\ A^{\#} = 832,$$
$$H = 925,\ c^{\#} = 1077;$$

wo $E^{\#} = 417$ und $F^{\#} = 510$ neue Bestimmungen sind.

Offenbar könnten auch die aufgefundenen dritten Werthe von $C^{\#}$, $F^{\#}$, $G^{\#}$ in den gleichnamigen Dur- und Moll-Tonarten zu Grunde gelegt werden, was wiederum zu neuen Bestimmungen führen würde.

§ 27.

Versuchen wir in gleicher Weise die Bestimmung der erniedrigten Haupttöne.

1) *F*-dur giebt

$$F = 415,\ G = 585,\ A = 737,\ H^{b} = 830,\ c = 1000,$$
$$d = 1152,\ e = 1322;$$

wo $H^{b} = 830$, alles Uebrige schon bekannt ist.

2) Für *B*-dur wird

$$H^b = 830,\ c = 1000,\ d = 1152,\ e^b = 1245,\ f = 1415,\ g = 1567,\ a = 1737;$$

woraus $E^b = 245$ folgt; die übrigen Bestimmungen sind nicht neu.

3) Für *Es*-dur wird

$$E^b = 245,\ F = 415,\ G = 567,\ A^b = 660,\ H^b = 830,\ c = 982,\ d = 1152;$$

wo $A^b = 660$ und $c = 982$ neu sind.

4) Für *As*-dur wird

$$A^b = 660,\ H^b = 830,\ c = 982,\ d^b = 1075,\ e^b = 1245,\ f = 1397,\ g = 1567;$$

woraus folgt $D^b = 75$, $F = 397$.

5) Für *Des*-dur ergiebt sich

$$D^b = 75,\ E^b = 245,\ F = 397,\ G^b = 490,\ A^b = 660,\ H^b = 812,\ c = 982;$$

also $G^b = 490$, $H^b = 812$.

6) Für *Ges*-dur wird

$$G^b = 490,\ A^b = 660,\ H^b = 812,\ c^b = 905,\ d^b = 1075,\ e^b = 1227,\ f = 1397;$$

wo $c^b = 905$ und $E^b = 227$ neu sind.

Die gefundenen zweiten Werthe von $E^b = 227$ und $H^b = 812$ könnten wieder in *Es*-dur und *B*-dur zum Grunde gelegt werden. Wir übergehen jedoch die Ausführung und wenden uns zu den Moll-Tonarten. Hier giebt

7) *D*-moll

$$D = 170,\ E = 340,\ F = 433,\ G = 585,\ A = 755,\ H^b = 848,\ c = 1000;$$

wo $F = 433$ und $H^b = 848$ neu sind.

8) *G*-moll giebt

$$G = 585,\ A = 755,\ H^b = 848,\ c = 1000,\ d = 1170,\ e^b = 1263,\ f = 1415;$$

woraus folgt $E^b = 263$.

9) Für *C*-moll wird

$$C = 0,\ D = 170,\ E^b = 263,\ F = 415,\ G = 585,\ A^b = 678,\ H^b = 830;$$

wo $A^b = 678$ neu ist.

10) Für *F*-moll wird

$F = 415$, $G = 585$, $A^b = 678$, $H^b = 830$, $c = 1000$,
$d^b = 1093$, $e^b = 1245$;

also $D^b = 93$.

11) Für *B*-moll wird entweder

$H^b = 830$, $c = 1000$, $d^b = 1093$, $e^b = 1245$, $f = 1415$,
$g^b = 1508$, $a^b = 1660$;

wo $G^b = 508$ neu; oder

$H^b = 848$, $c = 1018$, $d^b = 1111$; $e^b = 1263$, $f = 1433$,
$g^b = 1526$, $a^b = 1678$;

wo $c = 1018$, $D^b = 111$, $G^b = 526$ neu.

12) Für *Es*-moll wird entweder

$E^b = 227$, $F = 397$, $G^b = 490$, $A^b = 642$, $H^b = 812$,
$c^b = 905$, $d^b = 1057$;

wo $A^b = 642$ und $D^b = 57$ neu sind; oder

$E^b = 245$, $F = 415$, $G^b = 508$, $A^b = 660$, $H^b = 830$,
$c^b = 923$, $d^b = 1075$;

wo $c^b = 923$ neu; oder

$E^b = 263$, $F = 433$, $G^b = 526$, $A^b = 678$, $H^b = 848$,
$c^b = 941$, $d^b = 1093$;

wo $c^b = 941$ neu ist.

13) Für *As*-moll endlich ist entweder

$A^b = 642$, $H^b = 812$, $c^b = 905$, $d^b = 1057$, $e^b = 1227$,
$f^b = 1320$, $g^b = 1472$;

woraus folgt $F^b = 320$ und $G^b = 472$; oder

$A^b = 660$, $H^b = 830$, $c^b = 923$, $d^b = 1075$, $e^b = 1245$,
$f^b = 1338$, $g^b = 1490$;

woraus $F^b = 338$; oder

$A^b = 678$, $H^b = 848$, $c^b = 941$, $d^b = 1093$, $e^b = 1263$,
$f^b = 1356$, $g^b = 1508$;

woraus $F^b = 356$.

Es könnten nun wieder die aus den Moll-Tonarten gefundenen neuen Bestimmungen den Dur-Tonarten zum Grunde gelegt werden, was abermals auf neue Werthe führen würde. Unser Zweck ist jedoch schon durch die gewonnenen Resultate völlig erreicht.

§ 28.

Es zeigt sich nämlich, dass sich die Intervalle zwischen den erhöhten und erniedrigten Haupttönen und dem Grundton, folglich auch

ihre relativen Schwingungszahlen gar nicht schlechthin, sondern nur bedingungsweise bestimmen lassen, nämlich unter der Voraussetzung, dass die Scala einer oder der andern Tonart, in der sie vorkommen, rein sey, d. h. aus reinen Intervallen bestehe. Es erhellt nun aber aus dem Vorstehenden, dass wenn jeder dieser Töne nur einen Werth hat, diese Reinheit für alle Tonarten zugleich unmöglich ist, ja dass dieselbe sogar für die Haupttöne mehrfache Werthe erfordern würde, so dass dieselben Tonbezeichnungen, je nach der Verschiedenheit der Tonarten, verschiedene Bedeutung haben müssten. Die Reinheit aller Tonarten ist also eine Forderung, der in praktisch ausführbarer Weise nicht Genüge geleistet werden kann. Es kommt daher zunächst in Frage, ob sich aus den gefundenen mehrfachen Werthen der erhöhten und erniedrigten Haupttöne eine solche Auswahl treffen lässt, dass die Abweichungen von der Reinheit, die dadurch in den meisten Tonarten entstehen müssen, dem musikalischen Gehör entweder unmerklich oder doch erträglich sind.

§ 29.

Eine Auswahl dieser Art bietet nun zunächst folgende Tabelle dar, die sich, soweit sie die relativen Schwingungszahlen (y) betrifft (denen wir die Intervalle (x) beigefügt haben), in allen physikalischen Lehrbüchern und akustischen Schriften, mit geringen Modificationen in einzelnen Bestimmungen, wiederholt.

	y	x		y	x
C	$1 = 1,000$	0,000	G^b	$\frac{36}{25} = 1,440$	0,526
$C^{\#}$	$\frac{25}{24} = 1,042$	0,059	G	$\frac{3}{2} = 1,500$	0,585
D^b	$\frac{16}{15} = 1,067$	0,093	$G^{\#}$	$\frac{25}{16} = 1,562$	0,644
D	$\frac{9}{8} = 1,125$	0,170	A^b	$\frac{8}{5} = 1,600$	0,678
$D^{\#}$	$\frac{125}{108} = 1,157$	0,211	A	$\frac{5}{3} = 1,667$	0,737
E^b	$\frac{6}{5} = 1,200$	0,263	$A^{\#}$	$\frac{125}{72} = 1,736$	0,796
E	$\frac{5}{4} = 1,250$	0,322	H^b	$\frac{16}{9} = 1,778$	0,830
F^b	$\frac{32}{25} = 1,280$	0,356	H	$\frac{15}{8} = 1,875$	0,907
F	$\frac{4}{3} = 1,333$	0,415	c^b	$\frac{48}{25} = 1,920$	0,941
$F^{\#}$	$\frac{25}{18} = 1,389$	0,474	c	$2 = 2,000$	1,000

Man kann aus ihr für jede Tonart die Grösse der die Dur- und Moll-scala bildenden Intervalle bestimmen, wenn man das Intervall des Grundtons von den Intervallen der Töne, welche von ihm die grosse Secunde, kleine und grosse Terz u. s. w. sind, subtrahirt. Hierdurch ergeben sich folgende zwei Tabellen, in denen wieder zur Vereinfachung das Intervall der Octave = 1000 angenommen ist.

I. Dur.

Grundton	gr. Secunde	gr. Terz	Quarte	Quinte	gr. Sexte	gr. Septime
C	170	322	415	585	737	907
G	152	322	415	585	737	889
D	152	304	415	567	737	889
A	170	322	433	585	737	907
E	152	322	415	585	737	889
H	152	304	415	567	737	889
F#	170	322	433	585	737	882 *
C#	152	297 *	415	585	737	882 **
F	170	322	415	585	755	907
H^b	170	340	433	585	755	907
E^b	152	322	415	567	737	907
A^b	152	322	415	585	737	907
D^b	170	322	433	585	737	907
G^b	152	304	415	567	737	889

II. Moll.

Grundton	gr. Secunde	kl. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	kl. Septime
A	170	263	433	585	678	848
E	152	263	415	585	678	848
H	152	263	415	567	678	830
F#	170	263	433	585	696	848
C#	152	263	415	585	678	848
G#	152	263	415	567	678	830
D#	145	263	433	585	696	848
D	152	245	415	567	660	830
G	152	245	415	585	678	830
C	170	263	415	585	678	830
F	170	263	415	585	678	848
H^b	170	263	433	585	696	848
E^b	152	263	415	567	678	830
A^b	152	263	415	585	678	848

*) Es ist hier, so wie in Tab. II, angenommen, dass *E*#, was in der obigen Tabelle übergangen wird, = F^b sey, was ein von den übrigen Bestimmungen der grossen Terz weniger abweichendes Resultat giebt als die Annahme, dass *E*# = *F* sey.

**) Hier ist, wie in Tab. II, angenommen, dass das in der Tabelle übergangene *H*# = c^b und nicht = *c* sey, da erstere Annahme besser mit den übrigen Werthen der grossen Septime übereinstimmt.

§ 30.

Von diesen Tabellen zeigt nun die erste nur in *C*-dur eine Scala, deren Intervalle rein sind. Von den übrigen Dur-Tonarten sind die Scalen in *G*-dur und *E*-dur, in *A*-dur und *Des*-dur, in *D*-dur, *H*-dur und *Ges*-dur unter einander völlig gleich, und zwar weichen *E*-dur und *G*-dur in der grossen Secunde und grossen Septime, *A*-dur und *Des*-dur nur in der Quarte, *D*-dur, *H*-dur und *Ges*-dur aber in der grossen Secunde, grossen Terz, Quinte und grossen Septime von der reinen *C*-dur-Scala ab. Was die andern einzeln stehenden Tonarten betrifft, so weicht *F*-dur nur in der grossen Sexte, *As*-dur nur in der grossen Secunde, *Fis*-dur in der Quarte und grossen Septime, *Cis*-dur in der grossen Secunde, grossen Terz und grossen Septime, *B*-dur in der grossen Terz, Quarte und grossen Sexte, *Es*-dur in der grossen Secunde und Quinte von der Reinheit ab.

Die zweite Tabelle zeigt nur *C*-moll rein. Von den anderen Molltonarten sind die Scalen in *E*-, *Cis*- und *As*-moll, in *Fis*- und *B*-moll, in *H*-, *Gis*- und *Es*-moll unter einander gleich, und zwar weichen *E*,- *Cis*- und *As*-moll in der grossen Secunde und kleinen Septime, *Fis*- und *B*-moll in der Quarte, kleinen Sexte und kleinen Septime, *H*-, *Gis*- und *Es*-moll in der grossen Secunde und Quinte von der reinen Mollscala ab. Was die übrigen Tonarten betrifft, so weicht von der Reinheit ab *F*-moll in der kl. Septime, *A*-moll in der Quarte und kl. Septime, *G*-moll in der grossen Secunde und kleinen Terz, *D*-moll in der grossen Secunde, kleinen Terz, Quinte und kleinen Sexte, *Dis*-moll in der grossen Secunde, Quarte, kleinen Sexte und kleinen Septime.

Untersuchen wir die Grösse dieser Abweichungen, so finden wir die der grossen Secunde in *Dis*-moll $= 0{,}025$ der Octave d. i., da $0{,}170$ der grosse ganze Ton, $= \frac{1}{6{,}8}$ des ganzen Tons, in allen übrigen abweichenden Tonarten $= 0{,}018$ der Octave, nahe $= \frac{1}{9{,}4}$ ganzer Ton, was nach § 19 dem syntonischen Komma entspricht. Die Abweichung der kleinen Terz von der Reinheit ist in *D*- und *G*-moll $= 0{,}018$ Octave, entsprechend dem syntonischen Komma. Die grosse Terz ist in *D*-dur, *H*-dur und *Ges*-dur um ein syntonisches Komma tiefer, in *B*-dur um eben so viel höher als die reine, in *Cis*-dur steht sie um $0{,}025$ Octave $= \frac{1}{6{,}8}$ ganzen Ton tiefer. Alle abweichenden Quarten stehen um ein syntonisches Komma höher, alle abweichenden Quinten um ebensoviel tiefer als die reinen. Um

dasselbe Komma steht die kleine Sexte in *D*-moll gegen die reine zu tief, in *Fis*-, *Dis*- und *B*-moll zu hoch; desgleichen steht die grosse Sexte um ebensoviel in *F*- und *B*-dur zu hoch. Die abweichende kleine Septime steht durchgängig um ein syntonisches Komma höher als die reine; die grosse Septime endlich steht in *Fis*- und *Cis*-dur um 0,025 Octave $= \frac{1}{6,8}$ ganzer Ton, in den übrigen abweichenden Tonarten um ein syntonisches Komma zu tief.

Diese Abweichungen von $\frac{1}{9,4}$ und $\frac{1}{6,8}$ ganzer Ton sind viel zu beträchtlich, als dass sie nicht dem musikalischen Gehör, zumal bei Quarten und Quinten, anstössig seyn sollten. Man kann daher behaupten, dass die obigen akustischen Bestimmungen, ausser in *C*-dur und *C*-moll, keine einzige ganz befriedigende Scala geben, daher musikalisch unbrauchbar sind. Eine andre Auswahl unter den gefundenen mehrfachen Werthen der erhöhten und erniedrigten Töne würde zwar für mehrere Tonarten bessere, für andere aber immer wieder mangelhafte Scalen geben.*)

§ 31.

Erhellt nun hieraus die Unmöglichkeit, bei der Annahme von 19 verschiedenen Tönen Werthe derselben zu finden, welche in allen Tonarten reine Scalen geben, so besteht diese Unmöglichkeit fort, auch wenn 21 Töne unterschieden werden, nämlich E^* und H^* selbständige Werthe erhalten, was nur auf *Fis*-dur, *Cis*-dur und *Dis*-moll Einfluss hat. Noch viel weniger aber kann von reinen Scalen die Rede seyn, wenn sich die Zahl der Töne, wie dies auf den Tasteninstrumenten der Fall ist, auf 12 reducirt. Es bleibt also nur übrig zu versuchen, ob sich die Intervalle der die Scalen bildenden Töne, und mit ihnen ihre relativen Schwingungszahlen so abändern lassen, dass mit Aufopferung der völligen Reinheit in allen Tonarten eine genäherte Reinheit der Scalen erhalten wird. Diese nothwendige Abänderung der Tonbestimmungen heisst nun bekanntlich die Temperatur der Töne. Je nachdem durch sie das Intervall eines Tons mit dem Grundton grösser oder kleiner gemacht wird als das reine, sagt man dass der Ton aufwärts oder abwärts schwebe. Die Temperatur kann nun entweder so beschaffen seyn, dass einige Tonarten durch sie reiner werden als die andern, oder von

*) Vgl. hierüber den I. Anhang.

der Art, dass alle Tonarten gleichviel von der Reinheit abweichen, also in allen Tonarten die gleichnamigen Intervalle von den reinen gleichviel verschieden sind. Die erstere Art der Temperatur heisst die ungleichschwebende, die andre die gleichschwebende. Wir wollen zunächst diejenige ungleichschwebende Temperatur in einfacher Weise ableiten, die vor allen andern für die beste gilt, die Kirnbergersche.

§ 32.

Beschränkt man sich auf die zwölf Töne der Tasteninstrumente und setzt also $C^\# = D^b$, $D^\# = E^b$, $E^\# = F$, $F^b = E$, $F^\# = G^b$, $G^\# = A^b$, $A^\# = H^b$, $H^\# = c$, $c^b = H$, so bleiben nur zwölf Tonarten in Dur und in Moll übrig, nämlich *C*-, *G*-, *D*-, *A*-, *E*-, *H*-, *F*-, *B*-, *Es*-, *As*-, *Des*-, *Ges*-dur, und *A*-, *E*-, *H*-, *Fis*-, *Cis*-, *Gis*-, *D*-, *G*-, *C*-, *F*-, *B*-, *Es*-moll. Da nun die Intervalle der sieben Haupttöne vollkommen sicher bestimmt sind, so kommt es vor Allem darauf an, ihre akustischen Werthe möglichst beizubehalten und dennoch für die nach ihnen benannten Tonarten möglichst reine Scalen zu finden. Vergleicht man nun zunächst die in § 26 und 27 gefundenen Scalenwerthe für *C*-, *G*-, *D*-, *E*- und *F*-dur, so wie für *E*-, *H*-, *D*- und *G*-moll, so zeigt es sich, dass wenn in allen diesen Tonarten die Scalen rein seyn sollten, in *C*-, *E*-, und *F*-dur, so wie in *E*- und *H*-moll $A = 0{,}737$, dagegen in den übrigen Tonarten $A = 0{,}755$ seyn müsste. Wir werden nun für alle diese Scalen in Bezug auf *A* eine genäherte Reinheit erhalten, wenn wir das Mittel aus diesen Werthen, mit Berücksichtigung der Zahl ihres Vorkommens, nehmen, was $= \frac{1}{9}(5 . 0{,}737 + 4 . 0{,}755) = 0{,}745$ ist. Hierzu gehört die relative Schwingungszahl 1,676, die von $1{,}677 = \frac{270}{161}$ nur wenig differirt.

Durch Annahme dieses Werthes von *A* wird nun in *A*-dur $C^\# = 0{,}067$, $F^\# = 0{,}482$, $G^\# = 0{,}652$. Da nun in *D*-dur, *H*-dur und *H*-moll $C^\# = 0{,}077$, dagegen in *E*-dur $C^\# = 0{,}059$; da ferner $D^b = C^\#$ in *F*-moll $= 0{,}093$, so ergiebt sich im Mittel $C^\# = D^b = \frac{1}{6}(0{,}059 + 0{,}067 + 3 . 0{,}077 + 0{,}093) = 0{,}075$, wozu die relative Schwingungszahl des diatonischen halben Tons (§ 19) $\frac{256}{243}$ gehört.

Ferner ist in *E*-dur und *H*-dur $D^\# = 0{,}229$, in *G*-moll und *C*-moll $E^b = 0{,}263$, in *F*-moll aber $E^b = 0{,}245$. Hieraus folgt im Mittel $D^\# = E^b = \frac{1}{5}(2 . 0{,}229 + 0{,}245 + 2 . 0{,}263) = 0{,}246$, wozu die relative Schwingungszahl 1,186 gehört, welche $\frac{32}{27} = 1{,}185$ nahe kommt.

Weiter ist in *G*-dur, *D*-dur, *E*-dur, *H*-dur, *E*-moll und *H*-moll $F^{\#} = 0{,}492$, in *A*-dur, wie bemerkt, $F^{\#} = 0{,}482$; daher im Mittel $F^{\#} = G^{b} = \frac{1}{7}(0{,}482 + 6 \,.\, 0{,}492) = 0{,}491$, wozu die relative Schwingungszahl 1,405 gehört, die nahe gleich $\frac{45}{32} = 1{,}406$ ist.

In *A*-dur wird, wie bemerkt wurde, $G^{\#} = 0{,}652$, in *E*-dur und *H*-dur ist aber $G^{\#} = 0{,}644$; in *C*-moll und *F*-moll $A^{b} = 0{,}678$. Hieraus folgt im Mittel $G^{\#} = A^{b} = \frac{1}{5}(2 \,.\, 0{,}644 + 0{,}652 + 2 \,.\, 0{,}678) = 0{,}659$. Die zugehörige relative Schwingungszahl ist 1,579, die nahe gleich $\frac{128}{81} = 1{,}580$.

Endlich ist in *H*-dur $A^{\#} = 0{,}814$, in *F*-dur, *C*-moll und *F*-moll $H^{b} = 0{,}830$, in *D*-moll und *G*-moll aber $H^{b} = 0{,}848$. Hieraus folgt im Mittel $A^{\#} = H^{b} = 0{,}833$, wozu die relative Schwingungszahl 1,781 gehört, die sich $\frac{16}{9} = 1{,}778$ nähert.

Stellen wir nun alle diese Werthe mit denen der unverändert gebliebenen Haupttöne zusammen, so ergiebt sich folgende Tabelle, in der die Werthe unter x genau der vorstehenden Berechnung entsprechen, die unter y' (welche die eigentliche Kirnbergersche Temperatur darstellen) die nächsten, jenen zukommenden relativen Schwingungszahlen sind, x' endlich die genauen Werthe darstellt, die zu den Werthen von y' gehören.

	x	y'	x'
C	0,000	$1 = 1{,}000$	0,000
$C^{\#} = D^{b}$	0,075	$\frac{256}{243} = 1{,}053$	0,075
D	0,170	$\frac{9}{8} = 1{,}125$	0,170
$D^{\#} = E^{b}$	0,246	$\frac{32}{27} = 1{,}185$	0,245
$E = F^{b}$	0,322	$\frac{5}{4} = 1{,}250$	0,322
$E^{\#} = F$	0,415	$\frac{4}{3} = 1{,}333$	0,415
$F^{\#} = G^{b}$	0,491	$\frac{45}{32} = 1{,}406$	0,492
G	0,585	$\frac{3}{2} = 1{,}500$	0,585
$G^{\#} = A^{b}$	0,659	$\frac{128}{81} = 1{,}580$	0,660
A	0,745	$\frac{270}{161} = 1{,}677$	0,746
$A^{\#} = H^{b}$	0,833	$\frac{16}{9} = 1{,}778$	0,830
$H = c^{b}$	0,907	$\frac{15}{8} = 1{,}875$	0,907
$H^{\#} = c$	1,000	$2 = 2{,}000$	1,000

§ 33.

Um die Güte dieser Temperatur zu prüfen, brauchen wir blos zu untersuchen, welche Werthe sie den die Scalen bildenden Intervallen in jeder der zwölf Tonarten beilegt. Es ist zu diesem Behuf nur nöthig, für jeden Ton den ihm nach der vorstehenden Tabelle unter x' zukommenden Werth zu setzen und in jeder Tonart den Werth des Grundtons von den Werthen der übrigen ihr zugehörigen Töne abzuziehen. Zur Abkürzung setzen wir auch hier die Octave = 1000. Wir erhalten dann folgende Tabelle:

Grundton	gr. Sec.	kl. Terz	gr. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	gr. Sext.	kl. Sept.	gr. Sept.
C	170	245	322	415	585	660	746	830	907
G	161	245	322	415	585	660	737	830	907
D	152	245	322	415	576	660	737	830	907
A	161	254	329	424	576	669	746	839	914
E	170	263	338	424	585	678	753	848	923
H	168	263	338	415	585	678	753	839	923
F	170	245	322	415	585	660	755	830	907
H^b	170	263	340	415	585	678	755	839	906
$D^{\#} = E^b$	170	247	340	415	585	660	755	830	925
$G^{\#} = A^b$	170	254	340	415	585	662	755	832	925
$C^{\#} = D^b$	170	245	340	417	585	671	755	832	925
$F^{\#} = G^b$	168	254	338	415	583	678	753	832	923

Vergegenwärtigt man sich nun, dass die reinen Intervalle, der grossen Secunde = 170, der kleinen Terz = 263, der grossen Terz = 322, der Quarte = 415, der Quinte = 585, der kleinen Sexte = 678, der grossen Sexte = 737, der kleinen Septime = 830, der grossen Septime = 907 sind, so lässt die vorstehende Tabelle den Grad der Reinheit, den nach dieser Temperatur jede Tonart hat, leicht erkennen. Nur in Einem Intervall weichen von der Reinheit ab *C*-dur (in der grossen Sexte), *G*-dur (in der grossen Secunde), *B*-moll (in der kleinen Septime) und *H*-moll (in der kleinen Septime), wenn wir die geringe Abweichung in der grossen Secunde nicht beachten. Dagegen sind schon *E*-dur und *H*-dur, noch mehr *B*-, *Es*-, *As*- und *Des*-dur, eben so *C*-, *G*-, *D*-, *F*- und *Des*-moll wegen der Abweichungen der grossen und resp. der kleinen Terz, die hier die Grösse eines syntonischen Komma's erreichen, sehr hart. Man kann diese Härte mildern und die Temperatur verbessern, wenn man die in der Tabelle des vorigen §'s unter x enthaltenen Werthe

annimmt. Noch geringer werden die anstössigen Abweichungen von der Reinheit, wenn man auf dieselbe Weise für E und D einen temperirten Werth sucht, wie dies im vorigen § für A geschehen ist, und mit Rücksicht hierauf die erhöhten und erniedrigten Haupttöne bestimmt. Aber indem hiermit die härtesten Tonarten gemildert werden, vermindert sich die Reinheit der übrigen, zwar nicht über die erlaubte Grenze, aber doch so, dass der Charakter der Temperatur, der auf der fast völligen Reinheit mehrerer Tonarten beruht, verloren geht und dieselbe sich mehr einer gleichschwebenden Temperatur nähert, ohne doch deren Vollkommenheit zu erreichen.

Abgesehen hiervon bleibt aber auch noch die Ausstellung übrig, dass diese Temperatur den innern Zusammenhang der Intervalle grossentheils zerreisst. Denn die Tabelle zeigt z. B., dass schon für die Grundtöne C, G, D kleine Terz und grosse Sexte, grosse Terz und kleine Sexte sich nicht genau zur Octave ergänzen, dass für den Grundton D dies nicht einmal in Beziehung auf Quarte und Quinte, und für die Grundtöne D^b und G^b dies in Bezug auf dieselben Intervalle wenigstens nicht genau statt hat. Aehnliches findet sich bei den übrigen Grundtönen. Dieser Mangel ist aber, wie wir sogleich zeigen werden, nothwendiger Weise allen ungleichschwebenden Temperaturen gemeinsam und wird nur durch gleichschwebende Temperatur verhütet.

§ 34.

Den inneren Zusammenhang der Intervalle stellen die in § 18 entwickelten allgemeinen Ausdrücke derselben dar, welche die Abhängigkeit aller von der Octave, Quinte und grossen Terz nachweisen, und durch welche alle zwischen den Intervallen möglichen Beziehungen gegeben sind. Zu diesen Beziehungen gehören nun die, dass die Intervalle der Quarte und Quinte, der Terzen und Sexten, Secunden und Septimen einander zum Intervall der Octave ergänzen müssen. Wir können an dem Beispiel der Quarte und Quinte leicht zeigen, dass dieser Zusammenhang zwischen beiden nothwendig aufgehoben ist, sobald diesen Intervallen in verschiedenen Tonarten verschiedene Grössen beigelegt werden, also eine ungleichschwebende Temperatur statt findet. Aus § 18 ergeben sich nämlich folgende allgemeine Bestimmungen der Intervalle der Haupttöne mit dem Grundton $C = 0$.

$C = 0$

$G = q$	$F = 1 - q$
$D = 2q - 1$	$H^b = 2 - 2q$
$A = 3q - 1$	$E^b = 2 - 3q$
$E = 4q - 2$	$A^b = 3 - 4q$
$H = 5q - 2$	$D^b = 3 - 5q$
$F^\# = 6q - 3$	$G^b = 4 - 6q$
$C^\# = 7q - 4$	$c^b = 5 - 7q$
$G^\# = 8q - 4$	$F^b = 5 - 8q$
$D^\# = 9q - 5$	
$A^\# = 10q - 5$	
$E^\# = 11q - 6$	
$H^\# = 12q - 6$	

§ 36.

Diese Bestimmungen geben nun für alle Tonarten gleichmässig folgende Werthe der die Dur- und Moll-Scalen bildenden Intervalle:

gr. Secunde,	gr. Terz,	Quarte,	Quinte,	gr. Sexte,	gr. Septime
$2q - 1$	$4q - 2$	$1 - q$	q	$3q - 1$	$5q - 2$
	kl. Terz,	kl. Sexte,	kl. Septime		
	$2 - 3q$	$3 - 4q$	$2 - 2q$.		

Hiernach ist also das allgemeine Schema der Durscala:

$$0,\ 2q - 1,\ 4q - 2,\ 1 - q,\ q,\ 3q - 1,\ 5q - 2,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$$2q - 1,\ 2q - 1,\ 3 - 5q,\ 2q - 1,\ 2q - 1,\ 2q - 1,\ 3 - 5q;$$

das allgemeine Schema der Mollscala (in der Form des Herabsteigens)

$$0,\ 2q - 1,\ 2 - 3q,\ 1 - q,\ q,\ 3 - 4q,\ 2 - 2q,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$$2q - 1,\ 3 - 5q,\ 2q - 1,\ 2q - 1,\ 3 - 5q,\ 2q - 1,\ 2q - 1.$$

In beiden kommen also nur zwei Stufen, $2q - 1$ und $3 - 5q$ vor. Das Schema der reinen Durscala dagegen ist

$$0,\ 2q - 1,\ t,\ 1 - q,\ q,\ 1 - q + t,\ q + t,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$$2q - 1,\ 1 - 2q + t,\ 1 - q - t,\ 2q - 1,\ 1 - 2q + t,\ 2q - 1,\ 1 - q - t;$$

das Schema der reinen Mollscala

$$0,\ 2q - 1,\ q - t,\ 1 - q,\ q,\ 1 - t,\ 2 - 2q,\ 1,$$

mit der Stufenfolge

$2q-1,\ 1-q-t,\ 1-2q+t,\ 2q-1,\ 1-q-t,\ 1-2q+t,\ 2q-1.$

Die reinen Scalen enthalten also drei verschiedene Stufen, nämlich $2q-1$, $1-2q+t$ und $1-q-t$, von denen die beiden ersten nur gleich sind, wenn $t=4q-2$, wo dann die dritte $=3-5q$ wird. Dass in der ungleichschwebenden Temperatur die Zahl und Grösse der Stufen, je nach der verschiedenen Reinheit der Tonarten, viel mannichfaltiger seyn muss, liegt in der Natur der Sache und findet in der oben ausgeführten Kirnbergerschen Temperatur seine Bestätigung. Tonleitern mit nicht mehr als zweierlei Stufen, $2q-1$ und $3-5q$, von denen die erstere grösser ist als die zweite, wenn $q>\frac{4}{7}>0{,}5714285...$, besitzt also nur die gleichschwebende Temperatur. Die grössere Stufe ist das Doppelte der kleineren nur, wenn $q=\frac{7}{12}$.

§ 37.

Ohne für jetzt schon zu erörtern, ob die a. E. des § 35 bestimmten Töne der gleichschwebenden Temperatur sämmtlich von einander verschieden sind oder zum Theil zusammenfallen, geht aus jenen Ausdrücken hervor, dass bei dieser Temperatur, welchen Werth auch immerhin das Intervall der temperirten Quinte q haben mag, sämmtliche Töne durch Fortschreitungen nach Quinten und Quarten (unteren Quinten) bestimmt werden können. Schreiben wir nämlich um der grösseren Einfachheit willen statt $\bar{c}$, $\bar{\bar{c}}$, $\bar{\bar{\bar{c}}}$, ..., $\bar{d}$, $\bar{\bar{d}}$, $\bar{\bar{\bar{d}}}$ ... u. s. w. c_1, c_2, c_3 ..., d_1, d_2, d_3 ... u. s. w., so erhalten wir aus jenen Formeln folgende Bestimmungen:

$$C=0,\ G=q,\ d=2q,\ a=3q,\ e_1=4q,\ h_1=5q,\ f^{\#}_2=6q,$$
$$c^{\#}_3=7q,\ g^{\#}_3=8q,\ d^{\#}_4=9q,\ a^{\#}_4=10q,\ e^{\#}_5=11q,\ h^{\#}_5=12q;$$

andrerseits, wenn wir zur Abkürzung $1-q=q'$ setzen,

$$F=q',\ H^b=2q',\ e^b=3q',\ a^b=4q',\ d^b_1=5q',\ g^b_1=6q',$$
$$c^b_2=7q',\ f^b_2=8q'.$$

In beiden Reihen ist aber hiermit die Fortschreitung nicht schlechthin geschlossen. Bezeichnen wir nämlich die doppelt, dreifach, vierfach erhöhten Haupttöne durch $c^{\#\#}$, $c^{3\#}$, $c^{4\#}$, $d^{\#\#}$, $d^{3\#}$, $d^{4\#}$ u. s. f. und eben so die doppelt, drei- und vierfach erniedrigten durch c^{bb}, c^{3b}, c^{4b} u. s. w., so kann man die Tonbestimmungen in beiden Reihen, wie folgt, fortsetzen. Es folgt auf $h^{\#}_5$

$f_6^{\sharp\sharp\sharp} = 13q$, $c_7^{\sharp\sharp\sharp} = 14q$, $g_7^{\sharp\sharp\sharp} = 15q$, $d_8^{\sharp\sharp\sharp} = 16q$, $a_8^{\sharp\sharp\sharp} = 17q$, $e_9^{\sharp\sharp\sharp} = 18q$.
$h_9^{\sharp\sharp\sharp} = 19q$,
$f_{10}^{3\sharp} = 20q$, $c_{11}^{3\sharp} = 21q$, $g_{11}^{3\sharp} = 22q$, $d_{12}^{3\sharp} = 23q$, $a_{12}^{3\sharp} = 24q$, $e_{13}^{3\sharp} = 25q$.
$h_{13}^{3\sharp} = 26q$,
$f_{14}^{4\sharp} = 27q$, $c_{15}^{4\sharp} = 28q$ u. s. f.

Eben so folgt auf f_2^b
$h_2^{bb} = 9q'$, $e_3^{bb} = 10q'$, $a_3^{bb} = 11q'$, $d_4^{bb} = 12q'$, $g_4^{bb} = 13q'$, $c_5^{bb} = 14q'$,
$f_5^{bb} = 15q'$,
$h_5^{3b} = 16q'$, $e_6^{3b} = 17q'$, $a_6^{3b} = 18q'$, $d_7^{3b} = 19q'$, $g_7^{3b} = 20q'$, $c_8^{3b} = 21q'$,
$f_8^{3b} = 22q'$,
$h_8^{4b} = 23q'$, $e_9^{4b} = 24q'$ u. s. f.

Alle diese mehrfach erhöhten und erniedrigten Haupttöne können nun auf den Raum zwischen dem Grundton und seiner Octave übergetragen werden, und so würden zwischen diese Grenzen unendlich viele Töne fallen, wenn alle diese Bestimmungen wirklich verschiedene Töne gäben. Es lässt sich aber zeigen, dass dies zwar der Fall ist, wenn q das Intervall der reinen Quinte bezeichnet, dass jedoch die Verschiedenheit eine endliche Grenze erreicht, wenn q das Intervall einer irgendwie temperirten Quinte darstellt.

Da nämlich nach § 15, (2) der genaue Ausdruck des Intervalls der reinen Quinte $= \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$, des Intervalls der reinen Quarte $= \frac{\log \frac{4}{3}}{\log 2}$ ist, so verhält sich das Intervall der Quinte zu dem der Octave wie $\log \frac{3}{2} : \log 2$, das Intervall der Quarte zu dem der Octave wie $\log \frac{4}{3} : \log 2$. Hieraus folgt die Incommensurabilität der Intervalle der reinen Quinte und Quarte mit dem der Octave. Dasselbe Resultat giebt die Vergleichung ihrer relativen Schwingungszahlen. Ständen nämlich die genannten Intervalle in rationalen Verhältnissen, so müsste die Vervielfachung des Quintenintervalls auf irgend eine Octave des Grundtons führen, daher es irgend eine ganze positive Zahl n geben, für welche $\left(\frac{3}{2}\right)^n$ oder $\left(\frac{4}{3}\right)^n$ einer ganzen positiven Potenz von 2 gleich würde, was unmöglich ist.

Wird dagegen die Quinte temperirt, so dass ihr Intervall zu dem der Octave in dem rationalen Verhältniss $m : n$ steht, also $= \frac{m}{n}$ ist, wo m und n relative Primzahlen sind, so müssen dann immer n temperirte Quinten genau gleich m Octaven seyn, so dass die $n$te Quinte irgend eines Tons mit der $m$ten Octave desselben Tons, die $(n+1)$te, $(n+2)$te, $(n+3)$te Quinte u. s. f. mit der $m$ten Octave der 1sten, 2ten, 3ten Quinte

u. s. w. jenes Tons zusammenfällt. Dasselbe gilt von der Quarte, Terz u. s. w. Ein solcher Cyclus von temperirten Quinten, Quarten, Terzen, die eine runde Zahl von Octaven ausfüllen, heisst ein Quinten-, Quarten-, Terzen-Cirkel.

§ 38.

Aus den vorstehenden allgemeinen Ausdrücken der erhöhten und erniedrigten Haupttöne der gleichschwebenden Temperatur ergeben sich nun auch eben so allgemeine Bestimmungen der Werthe ihrer einfachen und mehrfachen Erhöhungen und Erniedrigungen d. i. der Grösse der Intervalle zwischen den Haupttönen selbst und den erhöhten und erniedrigten Haupttönen. Es sind nämlich

1) die Intervalle

$C^{\#} - C$, $D^{\#} - D$, $E^{\#} - E$, $F^{\#} - F$, $G^{\#} - G$, $A^{\#} - A$, $H^{\#} - H$,
$C^{\#\#} - C^{\#}$, $D^{\#\#} - D^{\#}$, $E^{\#\#} - E^{\#}$, $F^{\#\#} - F^{\#}$, $G^{\#\#} - G^{\#}$, $A^{\#\#} - A^{\#}$, $H^{\#\#} - H^{\#}$,
$C^{3\#} - C^{\#\#}$, $D^{3\#} - D^{\#\#}$, $E^{3\#} - E^{\#\#}$ u. s. w.,

desgleichen die Intervalle

$C - C^{b}$, $D - D^{b}$, $E - E^{b}$, $F - F^{b}$, $G - G^{b}$, $A - A^{b}$, $H - H^{b}$,
$C^{b} - C^{bb}$, $D^{b} - D^{bb}$, $E^{b} - E^{bb}$, $F^{b} - F^{bb}$, $G^{b} - G^{bb}$, $A^{b} - A^{bb}$, $H^{b} - H^{bb}$,
$C^{bb} - C^{3b}$, $D^{bb} - D^{3b}$, $E^{bb} - E^{3b}$ u. s. w.,

sämmtlich unter einander gleich, nämlich $= 7q - 4$. Hieraus folgt

2) dass die Intervalle

$C^{\#\#} - C$, $D^{\#\#} - D$, $E^{\#\#} - E$ u. s. w. doppelt so gross als die Intervalle
$C^{\#} - C$, $D^{\#} - D$, $E^{\#} - E$ u. s. w.,

desgleichen, dass die Intervalle

$C - C^{bb}$, $D - D^{bb}$, $E - E^{bb}$ u. s. w. doppelt so gross als die Intervalle
$C - C^{b}$, $D - D^{b}$, $E - E^{b}$ u. s. w.,
also sämmtlich $= 2(7q - 4)$; eben so, dass die Intervalle

$C^{3\#} - C$, $D^{3\#} - D$, $E^{3\#} - E$ u. s. w. dreimal so gross als die Intervalle
$C^{\#} - C$, $D^{\#} - D$, $E^{\#} - E$ u. s. w.

und eben so, dass

$C - C^{3b}$, $D - D^{3b}$, $E - E^{3b}$ u. s. w. dreimal so gross als
$C - C^{b}$, $D - D^{b}$, $E - E^{b}$ u. s. w.,
also sämmtlich $= 3(7q - 4)$ sind u. s. f.

3) Die Intervalle

$D - C$, $E - D$; $G - F$, $A - G$, $H - A$,
$D^{\#} - C^{\#}$, $E^{\#} - D^{\#}$, $G^{\#} - F^{\#}$, $A^{\#} - G^{\#}$, $H^{\#} - A^{\#}$,
$D^{\#\#} - C^{\#\#}$, $E^{\#\#} - D^{\#\#}$, $G^{\#\#} - F^{\#\#}$, $A^{\#\#} - G^{\#\#}$, $H^{\#\#} - A^{\#\#}$,
$D^{3\#} - C^{3\#}$, $E^{3\#} - D^{3\#}$ u. s. w.,

desgleichen die Intervalle

$D^{b} - C^{b}$, $E^{b} - D^{b}$, $G^{b} - F^{b}$, $A^{b} - G^{b}$, $H^{b} - A^{b}$,
$D^{bb} - C^{bb}$, $E^{bb} - D^{bb}$, $G^{bb} - F^{bb}$, $A^{bb} - G^{bb}$, $H^{bb} - A^{bb}$,
$D^{3b} - C^{3b}$, $E^{3b} - D^{3b}$ u. s. w.

sind ebenfalls unter einander gleich, nämlich $= 2q - 1$, also gleich der grössern Tonstufe.

4) Eben so sind endlich die Intervalle

$F - E$, $c - H$, $F^{\#} - E^{\#}$, $c^{\#} - H^{\#}$, $F^{\#\#} - E^{\#\#}$, $c^{\#\#} - H^{\#\#}$,
$F^{3\#} - E^{3\#}$, $c^{3\#} - H^{3\#}$ u. s. w.,

desgleichen die Intervalle

$F^{b} - E^{b}$, $c^{b} - H^{b}$, $F^{bb} - E^{bb}$, $c^{bb} - H^{bb}$, $F^{3b} - E^{3b}$; $c^{3b} - H^{3b}$ u. s. w.

sämmtlich unter einander gleich, nämlich $= 3 - 5q$, also gleich der kleineren Tonstufe. Sie sind den Intervallen unter 1) aber nur dann gleich, wenn $q = \frac{7}{12}$.

§ 39.

Führen wir jetzt den die gleichschwebende Temperatur allgemein charakterisirenden Werth des Intervalls der grossen Terz $t = 4q - 2$ in die Tabelle des § 18 ein, so erhalten die dort benannten Intervalle folgende Ausdrücke, die wir, wie sie sich zum Intervall der Octave ergänzen, paarweise gegenüberstellen.

	x		x
Prime	0	Octave	1
kl. Diesis	$7 - 12q$	alterirte Octave	$12q - 6$
übermäss. Prime kls. Limma	$7q - 4$	gröss. / klr. vermind. Octave	$5 - 7q$
kl. Secunde grs. Limma	$3 - 5q$	gr. Septime alter. gr. Septime	$5q - 2$
klr. ganz. Ton gr. Secunde	$2q - 1$	gröss. / klr. kl. Septime	$2 - 2q'$
kl. / gr. vermind. Terz	$6 - 10q$	gröss. / klr. übermäss. Sexte	$10q - 5$
klr. / gr. übermäss. Secunde	$9q - 5$	gröss. / klr. vermind. Septime	$6 - 9q$
alter. kl. Terz kl. Terz	$2 - 3q$	alter. gr. Sexte gr. Sexte	$3q - 1$
gr. Terz	$4q - 2$	kl. Sexte	$3 - 4q$
vermind. Quarte	$5 - 8q$	übermäss. Quinte	$8q - 4$
übermäss. Terz	$11q - 6$	vermind. Sexte	$7 - 11q$
Quarte alterirte Quarte	$1 - q$	Quinte alter. Quinte	q
klr. / gröss. übermäss. Quarte	$6q - 3$	gröss. / klr. vermind. Quinte	$4 - 6q$

Die Buchstabenbezeichnungen der Töne, welche durch diese Ausdrücke bestimmt werden, finden sich, mit Ausnahme derer für $6 - 9q$, $6 - 10q$, $7 - 11q$, $7 - 12q$, a. E. des § 35. Was diese noch übrigen vier betrifft, so ersieht man aus § 37 leicht, dass $6 - 9q = H^{bb}$, $6 - 10q = E^{bb}$, $7 - 11q = A^{bb}$ und $7 - 12q = D^{bb}$ ist. Da ferner eine Reihe von Intervallen, die, wenn t und q rein sind, verschiedene Werthe haben, wie die vorstehende Tabelle zeigt, zusammenfallen, sobald $t = 4q - 2$ wird, so gestattet dies für die gleichschwebende Temperatur eine vereinfachte Benennung der Intervalle, welche folgende Tafel zugleich mit den Bezeichnungen der dadurch bestimmten Töne übersehen lässt. Dass hier, gleichwie E^{bb} die verminderte Terz und H^{bb} die verminderte Septime heisst, so D^{bb} die verminderte Secunde genannt wird, rechtfertigt sich eben so von selbst, wie dass, nach Analogie von $E^{\#}$, als der übermässigen Terz, und $A^{\#}$, der übermässigen Sexte, $H^{\#}$ der Name der übermässigen Septime beigelegt ist.

		x			x
C,	Prime,	0	c,	Octave,	1
D^{bb},	vermind. Secunde,	$7-12q$	$H^{\#}$,	übermäss. Septime,	$12q-6$
$C^{\#}$,	übermäss. Prime,	$7q-4$	c^{b},	vermind. Octave,	$5-7q$
D^{b},	kleine Secunde,	$3-5q$	H,	grosse Septime,	$5q-2$
D,	grosse Secunde,	$2q-1$	H^{b},	kleine Septime,	$2-2q$
E^{bb},	vermind. Terz,	$6-10q$	$A^{\#}$,	übermäss. Sexte,	$10q-5$
$D^{\#}$,	übermäss. Secunde,	$9q-5$	H^{bb},	vermind. Septime,	$6-9q$
E^{b},	kleine Terz,	$2-3q$	A,	grosse Sexte,	$3q-1$
E,	grosse Terz,	$4q-2$	A^{b},	kleine Sexte,	$3-4q$
F^{b},	vermind. Quarte,	$5-8q$	$G^{\#}$,	übermäss. Quinte,	$8q-4$
$E^{\#}$,	übermäss. Terz,	$11q-6$	A^{bb},	vermind. Sexte,	$7-11q$
F,	Quarte,	$1-q$	G,	Quinte,	q
$F^{\#}$,	übermäss. Quarte,	$6q-3$	G^{b},	vermind. Quinte,	$4-6q$

IV.

VON DEN VERSCHIEDENEN ARTEN DER GLEICHSCHWEBENDEN TEMPERATUR.

§ 40.

Wir haben bisher die gleichschwebende Temperatur nach ihrem allgemeinen Begriffe aufgefasst, wonach sie diejenige Modification der reinen Intervalle und relativen Schwingungszahlen der Töne ist, wodurch die gleichbenannten Intervalle in allen Tonarten gleiche Grösse erhalten, mithin alle Scalen von der reinen Scala gleichviel abweichen. Es ergab sich, dass diese Modification durch die Gleichung $t = 4q - 2$ bestimmt ist, in der aber, wenn die grosse Terz nicht um ein syntonisches Komma oder $\frac{1}{9,6}$ gr. ganz. Ton von der Reinheit abweichen soll, q kleiner als das Intervall der reinen Quinte seyn muss. Ohne nun hier schon näher zu erörtern, ob diese Abweichung unter allen Umständen unstatthaft ist, leuchtet doch von selbst ein, dass, wenn es einen Werth von q giebt, der, ohne die Reinheit der Quinte merklich zu vermindern, nicht nur die grosse Terz, sondern auch die übrigen scalenbildenden Töne der Reinheit möglichst nahe bringt, dieser allen andern (unter übrigens gleichen Umständen) vorzuziehen seyn wird. Bevor wir aber einen solchen Werth zu finden versuchen, wird es nicht unzweckmässig seyn, allgemein zu erörtern, welchen Einfluss die Temperirung der Quinte auf die übrigen scalenbildenden Töne ausübt. Was nun zuerst die Quarte betrifft, so schwebt sie, da ihr Intervall $= 1 - q$, immer um ebensoviel auf- oder abwärts als die Quinte ab- oder aufwärts schwebt. Von den übrigen Tönen kommen nur noch in Betracht die grosse Secunde, deren temperirtes Intervall $= 2q - 1$, und deren reines $= 0,16992$; ferner die kleine Terz, deren temperirtes Intervall $= 2 - 3q$, und deren reines $= 0,26303$; die grosse Terz, deren temperirtes Intervall $= 4q - 2$, und deren reines $= 0,32193$; die grosse Septime, deren temperirtes

Intervall $= 5q - 2$, und deren reines $= 0{,}90689$ ist. Durch diese Töne sind kleine und grosse Sexte und kleine Septime vermöge der Ergänzungen zur Octave gegeben.

Hiernach ist nun die Abweichung der grossen Secunde von der Reinheit, oder ihre Schwebung $0{,}16992 - 2q + 1$, und die grosse Secunde schwebt $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem dieser Ausdruck $\gtrless 0$, also je nachdem

$$1{,}16992 - 2q \gtrless 0, \text{ d. i. } q \lessgtr 0{,}58496.$$

Da nun 0,58496 das Intervall der reinen Quinte, so schwebt die grosse Secunde zugleich mit der Quinte ab- und aufwärts. Ferner ist die Schwebung der kleinen Terz

$$0{,}26303 - 2 + 3q \gtrless 0, \text{ je nachdem } q \gtrless 0{,}57899.$$

Die kleine Terz schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem die temperirte Quinte $\gtrless 0{,}57899$.

Ebenso ist die Schwebung der grossen Terz

$$0{,}32193 - 4q + 2 \gtrless 0, \text{ je nachdem } q \lessgtr 0{,}58048.$$

Die grosse Terz schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem die temperirte Quinte $\lessgtr 0{,}58048$.

Endlich ist die Schwebung der grossen Septime

$$0{,}90689 - 5q + 2 \gtrless 0, \text{ je nachdem } q \lessgtr 0{,}58138.$$

Die grosse Septime schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\ \text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem die temperirte Quinte $\lessgtr 0{,}58138$.

Hieraus folgt: 1) wenn $q > 0{,}58496$, also die Quinte aufwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz aufwärts, die grosse Septime aufwärts;

2) wenn $q < 0{,}58496$, aber $> 0{,}58138$, also die Quinte um weniger als $0{,}00358 = \frac{1}{47{,}2}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz aufwärts, die grosse Septime aufwärts;

3) wenn $q < 0{,}58138$, aber $> 0{,}58048$, also die Quinte um weniger als $0{,}00448 = \frac{1}{34{,}7}$ gr. ganz. Ton, aber um mehr als $\frac{1}{47{,}2}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz aufwärts, die grosse Septime abwärts;

4) wenn $q < 0,58048$, aber $> 0,57899$, also die Quinte um weniger als $0,00597 = \frac{1}{28,3}$ gr. ganz. Ton, aber um mehr als $\frac{1}{34,7}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz abwärts, die grosse Terz abwärts, die grosse Septime abwärts;

5) wenn $q < 0,57899$, also die Quinte um mehr als $\frac{1}{28,3}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebt, so schwebt die kleine Terz aufwärts, die grosse Terz abwärts, die grosse Septime abwärts.

§ 41.

Die erste und einfachste Bestimmung von q, welche zu einer befriedigenden gleichschwebenden Temperatur führt, erhält man, wenn man auf das Bedürfniss der Musik, sich auf eine möglichst kleine Anzahl von Tönen zu beschränken, Rücksicht nimmt und dabei insbesondere die Tasteninstrumente ins Auge fasst. Da diese nämlich erhöhte und erniedrigte Haupttöne nicht unterscheiden können, sondern die nächstbenachbarten in einen mittleren Ton zusammenziehen, so ist für sie, wovon schon in § 32 Gebrauch gemacht wurde,

$$C^{\#} = D^{b},\ D^{\#} = E^{b},\ E^{\#} = F,\ F^{b} = E,\ F^{\#} = G^{b},\ G^{\#} = A^{b},\ A^{\#} = H^{b},$$
$$H^{\#} = c,\ c^{b} = H.$$

Setzen wir nun in diese Gleichungen die a. E. des § 35 für die gleichschwebende Temperatur ganz im Allgemeinen gefundenen Intervallwerthe ein, so giebt jede derselben die Bedingungsgleichung

$$12q = 7;\ \text{woraus also folgt}\ q = \tfrac{7}{12}.$$

Dies giebt nun die bis jetzt allein bekannte gleichschwebende Temperatur, bei welcher die grosse Secunde $= \frac{2}{12}$, die kleine Terz $= \frac{3}{12}$, die grosse Terz $= \frac{4}{12}$ und die grosse Septime $= \frac{11}{12}$ wird, also die zwölf Töne und ihre Intervalle diejenigen Bestimmungen erhalten, die schon in § 16 und 17 bemerkt und hinsichtlich ihrer Abweichungen von den reinen Intervallen und den relativen Schwingungszahlen der dieselben bildenden Töne untersucht worden sind. Eine unmittelbare Folge dieser Zusammenziehung der Töne (die also auch für die Bestimmung derselben nach ungleichschwebender Temperatur gilt) ist, dass die in § 39 unterschiedenen 26 Intervalle sich auf 13 reduciren. Es wird nämlich

Prime verminderte Secunde	$= 0$	Octave übermäss. Septime	$= 1$
übermässige Prime kleine Secunde	$= \frac{1}{12}$	vermind. Octave grosse Septime	$= \frac{11}{12}$
grosse Secunde vermind. Terz	$= \frac{2}{12}$	kleine Septime übermäss. Sexte	$= \frac{10}{12}$
übermäss. Secunde kleine Terz	$= \frac{3}{12}$	vermind. Septime grosse Sexte	$= \frac{9}{12}$
grosse Terz verminderte Quarte	$= \frac{4}{12}$	kleine Sexte übermäss. Quinte	$= \frac{8}{12}$
übermässige Terz Quarte	$= \frac{5}{12}$	vermind. Sexte Quinte	$= \frac{7}{12}$
übermäss. Quarte verminderte Quinte	$= \frac{5}{12}$		

Hiernach sind dann diese paarweise zusammenfallenden Intervalle und die durch sie bestimmten Töne nur dem Namen nach von einander verschieden, und so entsteht als eine Folge dieser gleichschwebenden Temperatur das, was man jetzt ziemlich allgemein die »Mehrdeutigkeit der Töne« zu nennen pflegt. Die heutige theoretische Musik macht diese gleichschwebende Temperatur ausschliesslich zur Basis der Compositionslehre, wozu sie sich sowohl durch ihre Einfachheit als durch ihre Verwirklichung auf dem universellsten Instrument, dem Pianoforte, vorzüglich empfiehlt. Die praktische Musik dagegen weicht auf allen Instrumenten, welche die Hervorbringung des richtigen Tons der Geschicklichkeit des Spielers überlassen und daher nicht zu einer Zusammenziehung der erhöhten und erniedrigten Haupttöne genöthigt sind, von dieser Temperatur wesentlich ab. Denn es ist Thatsache, dass auf den Streichinstrumenten und im Gesange *Cis* und *Des*, *Dis* und *Es* u. s. w. *wirklich* unterschieden werden, und dass gerade durch diese Unterscheidung der feinere musikalische Sinn sich vorzüglich befriedigt fühlt.*) Es fragt sich nun, wie

*) Es muss befremden, diese Thatsache nicht nur in den musikalischen Lehrbüchern, sondern selbst in praktischen Anleitungen gänzlich ignorirt, ja geradezu verleugnet zu sehen. So sagt z. B. Marx (allgemeine Musiklehre, 4. Aufl. S. 41): »*c* — *cis* klingt wie *c* — *des*, *h* — *c* ist ebenso gross wie *b* — *h* oder *c* — *cis*.« Die Wahrheit ist aber, dass nur *c* — *cis* und *b* — *h* einerseits, *c* — *des* und *h* — *c* andrerseits streng gleich, nicht aber jene Intervalle diesen im Allgemeinen gleich sind; denn die Grösse

diese Thatsache mit der gleichschwebenden Temperatur, an welche die moderne Musik unabänderlich gebunden ist, sich vereinigen lässt: ob jene Abweichungen nur als gelegentliche Ausnahmen von der Regel zu betrachten sind, oder ihnen ein bestimmtes Gesetz, ein festes Princip zum Grunde liegt.

§ 42.

Um nun zu untersuchen, ob es ausser dem Werthe $\frac{7}{12}$, der auf die bekannte gleichschwebende Temperatur führt (die wir von jetzt an zur Abkürzung die gewöhnliche Temperatur nennen wollen), noch andre Werthe von q giebt, welche den allgemeinen Forderungen einer gleichschwebenden Temperatur gnügen, bieten sich uns zwei Wege dar. Da nämlich $q = \frac{7}{12}$ einen Näherungswerth der reinen Quinte darstellt, so kann zuerst in Frage kommen, welche andre genäherte Werthe der reinen Quinte es ausserdem giebt, und welche von ihnen den musikalischen Forderungen entsprechen. Die Gleichung $q = \frac{7}{12}$ hat aber auch die Bedeutung, dass 12 Quinten nahe gleich 7 Octaven sind, dass also, wenn man vom Grundton aus nach temperirten Quintenintervallen von der Grösse $\frac{7}{12}$ fortschreitet, die 12te Quinte mit der 7ten Octave zusammentrifft, woraus der gemeine Quintencirkel entsteht (vgl. § 37). Da bis auf 8 Decimalstellen genau das reine Quintenintervall $= 0,58496250$ ist, so wird das Zwölffache hiervon $= 7,01955500$. Es übertrifft also das Intervall von 12 Quinten das von 7 Octaven um $0,01955$ oder nahe um $\frac{1}{8,7}$ gr. ganz. Ton, ein Intervall, welches das ditonische oder pythagorische Komma heisst, und dem die relative Schwingungszahl $\frac{531441}{524288}$ entspricht. Es kann nun nach dieser Auslegung des Werthes $\frac{7}{12}$ der temperirten Quinte zweitens untersucht werden, ob es ausser dem gemeinen noch andre Quintencirkel giebt, die in noch grösserer Schärfe auf ein rationales Verhältniss des Intervalls der Quinte zu dem der Octave führen und sonst den musikalischen Anforderungen entsprechen. Ob diese beiden Wege zu einem und demselben Endziele leiten, oder einer dem andern vorzuziehen ist, kann sich erst durch den weiteren Verfolg derselben ergeben.

---

jener ersteren wird durch $7q - 4$, die der letzteren durch $3 - 5q$ ausgedrückt, welche Werthe nur wenn $q = \frac{7}{12}$, also nur in der gleichschwebenden Temperatur der Tasteninstrumente zusammenfallen. Aehnliche Behauptungen wie die vorstehenden kann man in Spohr's Violinschule lesen.

§ 43.

Was nun den ersten dieser beiden Wege betrifft, so giebt es zwar unzählig viele genäherte Werthe des reinen Quintenintervalls, die sich in rationalen Brüchen ausdrücken lassen. Diejenigen aber, welche sich diesem Werth mit steigender Genauigkeit nähern und ihn in den kleinsten Zahlen darstellen, erhält man, wenn jenes Intervall durch einen Kettenbruch ausgedrückt wird. Nun ist das Intervall der reinen Quinte $= \frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$. Man könnte also diesen Ausdruck in einen Kettenbruch verwandeln. Da jedoch derselbe mit mehr als zureichender Genauigkeit durch 0,5849625 oder $\frac{46797}{80000}$ dargestellt wird, so ist es einfacher, diesen Werth durch einen Kettenbruch auszudrücken. Hierdurch wird nun

$$\frac{46797}{80000} = \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{23+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2}}}}}}}}}}}}$$

woraus sich nach bekannter Methode die genäherten Werthe

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}5;\quad \tfrac{3}{5} = 0{,}6;\quad \tfrac{7}{12} = 0{,}5833333;\quad \tfrac{24}{41} = 0{,}5853659;$$

$$\tfrac{31}{53} = 0{,}5849057;\quad \tfrac{179}{306} = 0{,}5849673;\quad \tfrac{389}{665} = 0{,}5849624;\ \text{u. s. f.}$$

ergeben, die abwechselnd kleiner und grösser als der wahre Werth sind. Von diesen Werthen ist nun der dritte das Quintenintervall der gewöhnlichen Temperatur. Der vierte $\frac{24}{41}$ giebt eine um 0,0004034 oder $\frac{1}{124,8}$ gr. ganz. Ton aufwärts schwebende, also so gut als völlig reine Quinte, aus der das Intervall der grossen Terz $\frac{14}{41} = 0{,}34146$ folgt, so dass also die grosse Terz um 0,01953 oder $\frac{1}{8,7}$ gr. ganz. Ton (nahe das pythagorische Komma) aufwärts schwebt. Der fünfte Werth $\frac{31}{53}$ giebt eine um 0,0000568 oder $\frac{1}{2991,7}$ gr. ganz. Ton abwärts schwebende Quinte, die auf das Intervall der grossen Terz $\frac{18}{53} = 0{,}33962$ führt, so dass diese um 0,01769 oder $\frac{1}{9,6}$ gr. ganz. Ton aufwärts schwebt, u. s. f. Bevor wir

nun die Brauchbarkeit dieser Werthe in nähere Betrachtung ziehen, wollen wir erst untersuchen, ob auf dem zweiten angegebenen Wege sich Näherungswerthe des Intervalls der Quinte finden lassen, die zwar nothwendig weniger genau seyn können, vielleicht aber dasselbe mit schärferer Genauigkeit als $\frac{7}{12}$ und zugleich in kleineren Zahlen, als es durch $\frac{24}{41}$ und $\frac{31}{53}$ geschieht, darstellen.

§ 44.

Zu diesem Zwecke bilden wir eine Tafel aller Vielfachen des Intervalls der reinen Quinte, von dem 13fachen bis zum 53fachen derselben. Bezeichnen wir das reine Quintenintervall 0,5849625 zum Unterschied vom temperirten, q, durch q_1, so erhalten wir folgende bis auf die letzte Decimale genaue Ergebnisse. Es ist

$13q_1$	= 7,60451	$34q_1$	= 19,88873
$14q_1$	= 8,18948	$35q_1$	= 20,47369
$15q_1$	= 8,77444	$36q_1$	= 21,05865
$16q_1$	= 9,35940	$37q_1$	= 21,64361
$17q_1$	= 9,94436	$38q_1$	= 22,22858
$18q_1$	= 10,52933	$39q_1$	= 22,81354
$19q_1$	= 11,11429	$40q_1$	= 23,39850
$20q_1$	= 11,69925	$41q_1$	= 23,98346
$21q_1$	= 12,28421	$42q_1$	= 24,56843
$22q_1$	= 12,86918	$43q_1$	= 25,15339
$23q_1$	= 13,45414	$44q_1$	= 25,73835
$24q_1$	= 14,03910	$45q_1$	= 26,32331
$25q_1$	= 14,62406	$46q_1$	= 26,90828
$26q_1$	= 25,20903	$47q_1$	= 27,49324
$27q_1$	= 15,79393	$48q_1$	= 28,07820
$28q_1$	= 16,37895	$49q_1$	= 28,66316
$29q_1$	= 16,96391	$50q_1$	= 29,24813
$30q_1$	= 17,54888	$51q_1$	= 29,83309
$31q_1$	= 18,13384	$52q_1$	= 30,41805
$32q_1$	= 18,71880	$53q_1$	= 31,00301
$33q_1$	= 19,30376		

Von diesen Vielfachen kommen nun zuvörderst $24q_1$, $36q_1$, $48q_1$, nicht in Betracht, da sie blos die Vielfachen des Cirkels von 12 Quinten sind. Von den übrigen nähern sich bis auf weniger als 0,2 einer ganzen Zahl von Octaven $17q_1$, $19q_1$, $22q_1$, $29q_1$, $31q_1$, $39q_1$, $41q_1$, $43q_1$, $46q_1$, $51q_1$, $53q_1$, von denen $41q_1$ und $53q_1$ schon aus dem vorigen § bekannt sind. Unter den übrig bleibenden geben aber nur $19q_1$, $31q_1$, $43q_1$ abwärts schwebende Quinten, die der andern schweben aufwärts. Denn ist allgemein $mq_1 = n \pm \omega$, wo m und n ganze positive Zahlen sind und $\pm\omega$ die kleinste Differenz zwischen dem Vielfachen mq_1 und der ganzen Zahl n von Octavenintervallen ausdrückt, und soll $mq = n$ seyn, so folgt $q = q_1 \mp \frac{\omega}{m}$; die temperirte Quinte schwebt also $\left\{\begin{matrix}\text{abwärts}\\\text{aufwärts}\end{matrix}\right\}$, je nachdem $mq_1 \gtrless n$ ist; es fordert also die abwärts schwebende Quinte $mq_1 > n$. Dies ist nun aber nur bei den drei bezeichneten Vielfachen der Fall, von denen $19q_1 > 11$, $31q_1 > 18$, $43q_1 > 25$ ist, indess $17q_1 < 9$, $22q_1 < 13$, $29q_1 < 17$, $39q_1 < 23$, $46q_1 < 27$, $51q_1 < 30$. Es können also nur jene drei Vielfache, welche die temperirten Quintenintervalle $\frac{11}{19}$, $\frac{18}{31}$, $\frac{25}{43}$ geben, für Temperaturbestimmungen tauglich seyn. In welchem Grade sie sich dazu eignen, wollen wir specieller untersuchen.

§ 45.

Der Werth des Intervalls der temperirten Quinte $q = \frac{11}{19} = 0{,}57895$ giebt folgendes Tonsystem:

$C = 0 = 0{,}00000$	$H^{\#} = c = 1 = 1{,}00000$
$C^{\#} = \frac{1}{19} = 0{,}05263$	$c^{b} = \frac{18}{19} = 0{,}94737$
$D^{b} = \frac{2}{19} = 0{,}10536$	$H = \frac{17}{19} = 0{,}89474$
$D = \frac{3}{19} = 0{,}15790$	$H^{b} = \frac{16}{19} = 0{,}84210$
$D^{\#} = \frac{4}{19} = 0{,}21053$	$A^{\#} = \frac{15}{19} = 0{,}78947$
$E^{b} = \frac{5}{19} = 0{,}26316$	$A = \frac{14}{19} = 0{,}73684$
$E = \frac{6}{19} = 0{,}31579$	$A^{b} = \frac{13}{19} = 0{,}68421$
$F^{b} = \frac{7}{19} = 0{,}36842$	$G^{\#} = \frac{12}{19} = 0{,}63168$
$E^{\#} = F = \frac{8}{19} = 0{,}42105$	$G = \frac{11}{19} = 0{,}57895$
$F^{\#} = \frac{9}{19} = 0{,}47368$	$G^{b} = \frac{12}{19} = 0{,}52632$

Die Abweichung des Quintenintervalls von der Reinheit beträgt hier 0,00601 oder $\frac{1}{28,2}$ gr. ganz. Ton; die des Intervalls der grossen Terz, welche abwärts schwebt, 0,00614 oder $\frac{1}{27,7}$ gr. ganz. Ton. Für die kleine Terz, welche aufwärts schwebt, ist sie $= 0,00013$ oder $\frac{1}{130,7}$ gr. ganz. Ton; für die abwärts schwebende grosse Secunde $= 0,01203$ oder $\frac{1}{14,1}$ gr. ganz. Ton; für die abwärts schwebende grosse Septime $= 0,01215$ oder $\frac{1}{14}$ gr. ganz. Ton. Hiernach ist in diesem System die kleine Terz und grosse Sexte so gut als völlig rein, Quinte und Quarte, grosse Terz und kleine Sexte weichen von der Reinheit fast unmerklich, grosse Secunde und kleine Septime, kleine Secunde und grosse Septime um weniger ab als die kleine Terz und grosse Sexte in der gewöhnlichen Temperatur, also um eine zulässige Grösse. Das System bietet also hinsichtlich des Grades seiner Reinheit keinen erheblichen Anstoss dar. Die grössere Stufe seiner Scala (§ 36) $2q - 1$ ist $= \frac{3}{19}$, die kleinere $3 - 5q = \frac{2}{19}$, die letztere also $= \frac{2}{3}$ der ersteren, so dass die Stufenfolge der Durscala ist:

3, 3, 2, 3, 3, 3, 2,

die Bewegung durch die Tonleiter also sich dem gleichmässigen Fortschritt mehr nähert als in der Tonleiter 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1 der gewöhnlichen Temperatur, darum aber auch träger, weniger rhythmisch erscheint. Kann nun diese Eigenschaft des Systems bedenklich scheinen, so stehen ihm noch zwei andre Ausstellungen entgegen. Erstens nämlich ist das Intervall der zwei nächst benachbarten Töne $C^{\#}$ und D^{b}, $D^{\#}$ und E^{b} u. s. w. $= \frac{1}{19} = 0,05263$, oder $\frac{1}{3,2}$ g. g. T., was ohne Zweifel ein viel zu bedeutender Unterschied ist. Sodann aber sind die Abweichungen von der gewöhnlichen Temperatur für mehrere Töne so bedeutend, dass beim Zusammenspiel von Streich- und Tasteninstrumenten, wenn die ersteren sich nach der vorliegenden Temperatur richteten, Missklänge unvermeidlich wären. Denn diese Abweichungen sind z. B. für $C^{\#} = \frac{1}{5,5}$, für $D^{\#} = \frac{1}{4,3}$, für $F^{\#} = \frac{1}{6,5}$, für $G^{\#} = \frac{1}{4,8}$ g. g. T.

§ 46.

[illegible] Quintenintervall $q = \frac{18}{31} = 0{,}58065$ führt auf fol- [illegible]

[illegible]	$= 0 = 0{,}00000$		c	$= 1 = 1{,}00000$
[illegible]	$= \frac{1}{31} = 0{,}03226$		$H^{\#}$	$= \frac{30}{31} = 0{,}96774$
[illegible]	$= \frac{2}{31} = 0{,}06452$		c^{b}	$= \frac{29}{31} = 0{,}93548$
[illegible]	$= \frac{3}{31} = 0{,}09677$		H	$= \frac{28}{31} = 0{,}90323$
[illegible]	$= \frac{4}{31} = 0{,}12903$	$A^{\#\#\#} =$	c^{bb}	$= \frac{27}{31} = 0{,}87097$
[illegible]	$= \frac{5}{31} = 0{,}16129$		H^{b}	$= \frac{26}{31} = 0{,}83871$
[illegible]	$= \frac{6}{31} = 0{,}19355$		$A^{\#}$	$= \frac{25}{31} = 0{,}80645$
[illegible]	$= \frac{7}{31} = 0{,}22581$		H^{bb}	$= \frac{24}{31} = 0{,}77419$
[illegible]	$= \frac{8}{31} = 0{,}25807$		A	$= \frac{23}{31} = 0{,}74193$
[illegible]	$= \frac{9}{31} = 0{,}29032$		$G^{\#\#\#}$	$= \frac{22}{31} = 0{,}70968$
[illegible]	$= \frac{10}{31} = 0{,}32258$		A^{b}	$= \frac{21}{31} = 0{,}67742$
[illegible]	$= \frac{11}{31} = 0{,}35484$		$G^{\#}$	$= \frac{20}{31} = 0{,}64516$
[illegible]	$= \frac{12}{31} = 0{,}38710$		A^{bb}	$= \frac{19}{31} = 0{,}61290$
[illegible]	$= \frac{13}{31} = 0{,}41935$		G	$= \frac{18}{31} = 0{,}58065$
[illegible] G^{bb}	$= \frac{14}{31} = 0{,}45161$		$F^{\#\#\#}$	$= \frac{17}{31} = 0{,}54839$
[illegible]	$= \frac{15}{31} = 0{,}48387$		G^{b}	$= \frac{16}{31} = 0{,}51613$

Es mag hier zuvörderst eine Bemerkung ihre Stelle finden, die nicht blos dieses Tonsystem, sondern auch die nachfolgenden betrifft: diese nämlich, dass es nicht als ein Tadel eines Tonsystems gelten kann, wenn es auf doppelt und mehrfach erhöhte Haupttöne und somit auf Töne führt, die in der Musik nicht vorkommen. Denn wenn sich von diesen Tönen ihnen eigenthümliche Zahlwerthe angeben lassen, so sind sie nicht blos in der Einbildung vorhandene (sogenannte papierne), sondern wirkliche, reelle. Dass die Musik von diesen Tönen keinen Gebrauch macht, rührt nur daher, dass sie sich auf 12 oder höchstens 14 Tonarten beschränkt, die übrigen aber, wegen ihrer geringen Verschiedenheit von jenen bräuchlichen und der Schwierigkeit des Spiels in ihnen auf den Instrumenten, welche eine feinere Unterscheidung der Töne gewäh-

ren, unberücksichtigt lässt. Sie leugnet aber nicht und kann nicht leugnen, dass in der Consequenz ihres Princips doppelt und mehrfach erhöhte und erniedrigte Töne liegen, denn sie kann nicht behaupten, dass z. B. *Gis*-dur, der auf $F^{\#\#}$, *Dis*-dur, der auf $F^{\#\#}$ und $C^{\#\#}$, *Des*-moll, der auf H^{bb}, *Ges*-moll, der auf H^{bb} und E^{bb} führt, unmögliche Tonarten sind. Diese ungebraucht liegen bleibenden Töne werden dem System, in welchem sie vorkommen, auf keine Weise zum Hinderniss, wofern nur die Bestimmung der in Gebrauch kommenden musikalisch genügend erscheint. Man kann sie, wo es nicht auf Vollständigkeit der Uebersicht ankommt, ganz übergehen, zum System aber gehören sie, als Glieder des zum Grunde liegenden Quintencirkels, wesentlich.

Was nun das vorliegende besondre System betrifft, so ist die Abweichung von der Reinheit: für die Quinte $= 0{,}00431 = \frac{1}{39{,}4}$ g. g. T.; für die aufwärts schwebende grosse Terz $= 0{,}00065 = \frac{1}{251{,}4}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende kleine Terz $= 0{,}00496 = \frac{1}{34{,}8}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende gr. Secunde $= 0{,}00864 = \frac{1}{19{,}7}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende gr. Septime $= 0{,}00366 = \frac{1}{46{,}4}$ g. g. T. Es ist hier also die gr. Terz und kl. Sexte so gut als völlig rein, die übrigen scalenbildenden Töne aber weichen von der Reinheit noch weniger ab als in dem System des vorigen §'s. Die grössere Stufe der Tonleiter wird hier $= \frac{5}{31}$, die kleinere $= \frac{3}{31}$, also $= \frac{3}{5}$ der grösseren. Hierdurch wird die Stufenfolge der Durscala

$$5, \quad 5, \quad 3, \quad 5, \quad 5, \quad 5, \quad 3$$

und nähert sich somit mehr der der gewöhnlichen Temperatur. Die Intervalle zwischen $C^{\#}$ und D^{b}, $D^{\#}$ und E^{b} u. s. w. betragen hier $\frac{1}{31} = 0{,}03226$ oder $\frac{1}{5{,}2}$ g. g. T., sind also bedeutend kleiner als im vorigen System. Endlich sind auch die Abweichungen von der gewöhnlichen Temperatur geringer als dort; denn diese betragen: für $C^{\#}$ nur $\frac{1}{9}$, für $D^{\#}$ noch $\frac{1}{7}$, für $F^{\#}$ noch $\frac{1}{10{,}5}$, für $G^{\#}$ noch $\frac{1}{7{,}9}$ g. g. T. Dieses Tonsystem erscheint also in jeder Hinsicht vollkommener als das im vorigen § entwickelte.

§ 47.

Das temperirte Quintenintervall $q = \frac{25}{43} = 0{,}58140$ endlich giebt folgendes Tonsystem:

$C = 0 = 0{,}00000$		$c = 1 = 1{,}00000$
$D^{bb} = \frac{1}{43} = 0{,}02326$		$H^{\sharp} = \frac{42}{43} = 0{,}97674$
$H^{\sharp\sharp} = \frac{2}{43} = 0{,}04651$		$A^{3\sharp} = d^{bb} = \frac{41}{43} = 0{,}95349$
$C^{\sharp} = \frac{3}{43} = 0{,}06977$		$c^{b} = \frac{40}{43} = 0{,}93023$
$D^{b} = \frac{4}{43} = 0{,}09302$		$H = \frac{39}{43} = 0{,}90698$
$H^{3\sharp} = E^{3b} = \frac{5}{43} = 0{,}11628$		$A^{\sharp\sharp} = \frac{38}{43} = 0{,}88372$
$C^{\sharp\sharp} = \frac{6}{43} = 0{,}13953$		$c^{bb} = \frac{37}{43} = 0{,}86047$
$D = \frac{7}{43} = 0{,}16279$		$H^{b} = \frac{36}{43} = 0{,}83721$
$E^{bb} = \frac{8}{43} = 0{,}18605$		$A^{\sharp} = \frac{35}{43} = 0{,}81395$
$C^{3\sharp} = F^{3b} = \frac{9}{43} = 0{,}20930$		$G^{3\sharp} = c^{3b} = \frac{34}{43} = 0{,}79070$
$D^{\sharp} = \frac{10}{43} = 0{,}23256$		$H^{bb} = \frac{33}{43} = 0{,}76744$
$E^{b} = \frac{11}{43} = 0{,}25581$		$A = \frac{32}{43} = 0{,}74419$
$F^{bb} = \frac{12}{43} = 0{,}27907$		$G^{\sharp\sharp} = \frac{31}{43} = 0{,}72093$
$D^{\sharp\sharp} = \frac{13}{43} = 0{,}30233$		$H^{3b} = \frac{30}{43} = 0{,}69767$
$E = \frac{14}{43} = 0{,}32558$		$A^{b} = \frac{29}{43} = 0{,}67442$
$F^{b} = \frac{15}{43} = 0{,}34884$		$G^{\sharp} = \frac{28}{43} = 0{,}65116$
$D^{3\sharp} = G^{3b} = \frac{16}{43} = 0{,}37209$		$F^{\sharp\sharp} = \frac{27}{43} = 0{,}62791$
$E^{\sharp} = \frac{17}{43} = 0{,}39535$		$A^{bb} = \frac{26}{43} = 0{,}60465$
$F = \frac{18}{43} = 0{,}41860$		$G = \frac{25}{43} = 0{,}58140$
$G^{bb} = \frac{19}{43} = 0{,}44187$		$F^{\sharp\sharp} = \frac{24}{43} = 0{,}55813$
$E^{\sharp\sharp} = \frac{20}{43} = 0{,}46512$		$E^{3\sharp} = A^{3b} = \frac{23}{43} = 0{,}53488$
$F^{\sharp} = \frac{21}{43} = 0{,}48837$		$G^{b} = \frac{22}{43} = 0{,}51163$

In diesem System ist die Abweichung von der Reinheit: für die Quinte $= 0{,}00356 = \frac{1}{47{,}7}$ g. g. T.; für die aufwärts schwebende grosse Terz $= 0{,}00365 = \frac{1}{46{,}5}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende kleine Terz $= 0{,}00722 = \frac{1}{23{,}5}$ g. g. T.; für die abwärts schwebende gr. Secunde $= 0{,}00714 = \frac{1}{23{,}7}$ g. g. T.; für die aufwärts schwebende gr. Septime $= 0{,}00009 = \frac{1}{1888}$ g. g. T. Quinte, Quarte, gr. Terz und kl. Sexte

weichen also hier von der Reinheit fast gleich und halb so viel ab, als kl. Terz, gr. Sexte, gr. Secunde und kl. Septime, deren Abweichungen ebenfalls fast gleich sind. Die Grösse aller dieser Abweichungen ist so gering, dass sie für völlig unmerklich gelten können; die gr. Septime aber ist so gut als vollkommen rein. Die grössere Stufe der Tonleiter ist in diesem System $= \frac{7}{43}$, die kleinere $= \frac{4}{43}$, also $= \frac{4}{7}$ der grösseren. Demnach ist hier die Stufenfolge der Durscala:

$$7,\ 7,\ 4,\ 7,\ 7,\ 7,\ 4,$$

und nähert sich also der der gewöhnlichen Temperatur noch mehr als in dem System des vorigen §'s. Die Intervalle zwischen $C^{\sharp}$ und $D^{\flat}$, $D^{\sharp}$ und $E^{\flat}$ u. s. w. sind hier $= \frac{1}{43} = 0{,}02326$ oder $\frac{1}{7{,}3}$ g. g. T. Die Abweichung von der gewöhnlichen Temperatur endlich beträgt für $C^{\sharp}$ nur noch $\frac{1}{12{,}5}$, für $D^{\sharp}$ noch $\frac{1}{9{,}7}$, für $F^{\sharp} \ldots \frac{1}{15}$, für $G^{\sharp} \ldots \frac{1}{6{,}6}$ g. g. T. Nur die letztere also ist grösser als im vorigen System. Mit diesem verglichen, erscheint demnach das System, welches auf dem Cirkel von 43 Quinten beruht, in einzelnen Tönen zwar weniger, im Ganzen aber gleichmässiger rein, als das aus dem Cirkel von 31 Quinten hervorgehende, insbesondere aber in Bezug auf die grössere Reinheit der Quinte und Quarte und das Verhältniss der beiden Tonstufen vollkommener als dieses letztere.

§ 48.

In Folge dieser steigenden Vollkommenheit der drei ausgeführten Systeme*) erhebt sich nun von selbst die Frage, ob nicht ein Tonsystem möglich ist, welches sich in Bezug auf die scalenbildenden Töne und ihre Intervalle der Reinheit mehr nähert als jedes andere. Es giebt in der That ein solches System, und wir können es ohne Schwierigkeit nachweisen. Da nämlich durch die grosse Secunde, grosse Terz, Quinte, grosse Septime und kleine Terz oder grosse Sexte die übrigen scalenbildenden Töne gegeben sind, so wird man nach der Methode der kleinsten Quadrate diejenigen Intervallwerthe dieser Töne, welche die grösstmögliche Annäherung der Gesammtheit derselben an die reinen Intervalle darstellen, erhalten, wenn man das Quintenintervall q so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den allgemeinen, von q abhängigen Ausdrücken der temperirten

*) Zu ihnen könnte als viertes auch noch das aus 50 Quinten gezählt werden, welches $q = \frac{29}{50} = 0{,}58000$ giebt, demnach zwischen den Systemen aus 19 und 31 Quinten fast genau in der Mitte liegt und darum der Ausführung nicht bedarf.

Intervalle jener fünf Töne mit den gleichnamigen reinen Intervallen ein Minimum wird. Da nun das temperirte Intervall der grossen Secunde $= 2q - 1$, das der grossen Terz $= 4q - 2$, das der Quinte $= q$, das der grossen Sexte $= 3q - 1$, das der grossen Septime $= 5q - 2$ war (§ 39), so fordert die angegebene Bedingung, wenn wir die reinen Intervalle der genannten Töne der Reihe nach durch d, e, g, a, h bezeichnen, dass die Summe

$$(d - 2q + 1)^2 + (e - 4q + 2)^2 + (g - q)^2 + (a - 3q + 1)^2 + (h - 5q + 2)^2$$

ein Minimum sey. Dieser Forderung wird Gnüge geleistet, wenn wir den Differentialquotienten dieser Summe in Bezug auf die Veränderliche q gleich Null setzen. Hieraus ergiebt sich

$$q = \frac{23 + 2d + 4e + g + 3a + 5h}{55}.$$

Setzt man nun für die Intervalle d, e, g, a, h ihre logarithmischen Ausdrücke $\frac{\log \frac{9}{8}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{5}{4}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{3}{2}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{5}{3}}{\log 2}$, $\frac{\log \frac{15}{8}}{\log 2}$, so erhält man nach einigen Reductionen

$$q = \frac{\log\left(\frac{3^7 . 5^{12}}{2^7}\right)}{55 . \log 2},$$

woraus sich ergiebt

$$q = 0{,}5810541,$$

was der gesuchte Werth des temperirten Quintenintervalls ist. Offenbar können nun die den beiden in den §§ 46 und 47 entwickelten Tonsystemen zum Grunde liegenden Werthe $q = \frac{18}{31} = 0{,}58065$ und $q = \frac{25}{43} = 0{,}58140$ als Annäherungen an den so eben gefundenen Werth von q angesehen werden. Die schärfsten Näherungswerthe in den kleinstmöglichen Zahlen aber erhält man durch Verwandlung des gefundenen Werths von q in den Kettenbruch

$$0{,}5810541 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{4}}}}}}}}}}}$$

aus dem wir, wenn wir uns auf diejenigen Näherungswerthe beschränken, die aus ein- oder zweiziffrigen Zahlen bestehen, erhalten

$$\frac{1}{2},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{7},\ \frac{7}{12},\ \frac{18}{31},\ \frac{43}{74},$$

so dass also unter diesen Brüchen $\frac{43}{74} = 0{,}58108$ dem genauen Werthe der gefundenen temperirten Quinte am nächsten kommt.

§ 49.

Aus diesem Werthe von q ergiebt sich nun ein Tonsystem, welches wir als das der möglich reinsten gleichschwebenden Temperatur werden bezeichnen dürfen. Wir begnügen uns, dasselbe bis zu den doppelt erhöhten und erniedrigten Haupttönen und denjenigen dreifach erniedrigten, welche einige von ihnen zur Octave ergänzen, darzustellen und den scharfen Bestimmungen der Intervalle die genäherten, durch 74stel ausgedrückt, in Klammern beizufügen.

$C = 0{,}00000;$		$c = 1{,}00000;$	
$D^{bb} = 0{,}02735;$	$\left(\frac{2}{74}\right)$	$H^{\sharp} = 0{,}97265;$	$\left(\frac{72}{74}\right)$
$H^{\sharp\sharp\sharp} = 0{,}04003;$	$\left(\frac{3}{74}\right)$	$D^{3b} = 0{,}95997;$	$\left(\frac{71}{74}\right)$
$C^{\sharp} = 0{,}06738;$	$\left(\frac{5}{74}\right)$	$c^{b} = 0{,}93262;$	$\left(\frac{69}{74}\right)$
$D^{b} = 0{,}09473;$	$\left(\frac{7}{74}\right)$	$H = 0{,}90527;$	$\left(\frac{67}{74}\right)$
$E^{3b} = 0{,}12208;$	$\left(\frac{9}{74}\right)$	$A^{\sharp\sharp} = 0{,}87792;$	$\left(\frac{65}{74}\right)$
$C^{\sharp\sharp} = 0{,}13476;$	$\left(\frac{10}{74}\right)$	$c^{bb} = 0{,}86524;$	$\left(\frac{64}{74}\right)$
$D = 0{,}16211;$	$\left(\frac{12}{74}\right)$	$H^{b} = 0{,}83789;$	$\left(\frac{62}{74}\right)$
$E^{bb} = 0{,}18946;$	$\left(\frac{14}{74}\right)$	$A^{\sharp} = 0{,}81054;$	$\left(\frac{60}{74}\right)$
$D^{\sharp} = 0{,}22949;$	$\left(\frac{17}{74}\right)$	$H^{bb} = 0{,}77051;$	$\left(\frac{57}{74}\right)$
$E^{b} = 0{,}25684;$	$\left(\frac{19}{74}\right)$	$A = 0{,}74316;$	$\left(\frac{55}{74}\right)$
$F^{bb} = 0{,}28419;$	$\left(\frac{21}{74}\right)$	$G^{\sharp\sharp} = 0{,}71581;$	$\left(\frac{53}{74}\right)$
$D^{\sharp\sharp} = 0{,}29687;$	$\left(\frac{22}{74}\right)$	$H^{3b} = 0{,}70313;$	$\left(\frac{52}{74}\right)$
$E = 0{,}32422;$	$\left(\frac{24}{74}\right)$	$A^{b} = 0{,}67578;$	$\left(\frac{50}{74}\right)$
$F^{b} = 0{,}35157;$	$\left(\frac{26}{74}\right)$	$G^{\sharp} = 0{,}64843;$	$\left(\frac{48}{74}\right)$
$E^{\sharp} = 0{,}39160;$	$\left(\frac{29}{74}\right)$	$A^{bb} = 0{,}60840;$	$\left(\frac{45}{74}\right)$
$F = 0{,}41895;$	$\left(\frac{31}{74}\right)$	$G = 0{,}58105;$	$\left(\frac{43}{74}\right)$
$G^{bb} = 0{,}44630;$	$\left(\frac{33}{74}\right)$	$F^{\sharp\sharp} = 0{,}55370;$	$\left(\frac{41}{74}\right)$
$E^{\sharp\sharp} = 0{,}45897;$	$\left(\frac{34}{74}\right)$	$A^{3b} = 0{,}54103;$	$\left(\frac{40}{74}\right)$
$F^{\sharp} = 0{,}48632;$	$\left(\frac{36}{74}\right)$	$G^{b} = 0{,}51368;$	$\left(\frac{38}{74}\right)$

Die Abweichungen von der Reinheit sind nun hier: für die Quinte $= 0{,}00391 = \frac{1}{48{,}4}$ g. g. T.; für die grosse Terz $= 0{,}00229 = \frac{1}{74{,}2}$ g. g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}00619 = \frac{1}{27{,}4}$ g. g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}00782 = \frac{1}{21{,}7}$ g. g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}00162 = \frac{1}{104{,}9}$ g. g. T. — Gegen das System aus 43 Quinten gehalten ist also hier die Reinheit der Quinte, grossen Secunde und grossen Septime etwas geringer, die der beiden Terzen jedoch grösser. Dass aber dieses System in der Totalität der scalenbildenden Töne reiner ist als jedes der zuvor dargestellten, erhellt deutlich, wenn man die Summe der Quadrate der (theils positiven, theils negativen) Abweichungen, welche hier auf ein Minimum gebracht ist, sowohl für dieses System als für die andern wirklich berechnet. Es ergiebt sich dann:

für $q = 0{,}58105 \left(\frac{43}{74}\right)$ die Summe der Quadrate der Abweichungen $= 0{,}0001225$;
„ $q = 0{,}58140 = \frac{25}{43}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0001290$;
„ $q = 0{,}58065 = \frac{18}{31}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0001315$;
„ $q = 0{,}57895 = \frac{11}{19}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0003659$;
„ $q = 0{,}58333 = \frac{7}{12}$ „ „ „ „ „ „ $= 0{,}0004089$.

Diese Uebersicht weist also die steigende Reinheit der entwickelten Tonsysteme von dem der gewöhnlichen Temperatur aus bis zu dem der möglich reinsten nach. Es kann an der letzteren auch nicht für einen gewichtigen Tadel gelten, dass die Quinte weniger rein ist als die grosse Terz und grosse Septime; denn das Ohr empfindet eine Abweichung um $\frac{1}{48}$ des ganzen Tons fast so wenig als die um $\frac{1}{74}$ und $\frac{1}{105}$. — Die grössere Stufe dieses Systems ist sehr nahe $= \frac{12}{74}$, die kleinere $= \frac{7}{74}$ der Octave, also $= \frac{7}{12}$ der grösseren, daher die Stufenfolge der Durscala

12, 12, 7, 12, 12, 12, 7,

die sich der der gewöhnlichen Temperatur mehr nähert als alle vorigen. — Die Intervalle zwischen $C^\#$ und D^b, $D^\#$ und E^b u. s. w. sind hier $= 0{,}02735 = \frac{1}{6{,}2}$ g. g. T., also grösser als in den Systemen aus 31 und 43 Quinten. Die Abweichung von der gewöhnlichen Temperatur endlich beträgt für $C^\#$... $\frac{1}{10{,}7}$ g. g. T., für $D^\#$... $\frac{1}{8{,}3}$ g. g. T., für $F^\#$... $\frac{1}{12{,}4}$ g. g. T., für $G^\#$... $\frac{1}{9{,}3}$, ist also für die drei ersten von diesen Tönen etwas grösser, für den letzten aber geringer als im System aus 43 Quinten.

§ 50.

Erfüllt nun dieses letzte unter den vier dargelegten Tonsystemen, welche erhöhte und erniedrigte Töne unterscheiden, die musikalische Forderung möglichst reiner Scalen in allen Tonarten so vollständig, als es der Natur der Sache nach überhaupt möglich ist, so steht doch seiner Anwendbarkeit in der Musik ein Bedenken entgegen, das zugleich die drei anderen Temperaturen derselben Art trifft, auf das aber, obgleich diese letztgenannten nicht neu sind,*) die theoretischen Schriften über Musik, so weit sie uns bekannt wurden, nicht aufmerksam machen. In allen diesen Tonsystemen nämlich liegt, eben so wie in der oben (§ 29f.) erwähnten und beurtheilten akustischen Tontabelle, $C^{\#}$ tiefer als D^{b}, $D^{\#}$ tiefer als E^{b}, $F^{\#}$ tiefer als G^{b} u. s. f. Diese Lage wird auch in den Schriften über Compositionslehre, sofern sie überhaupt des ganzen Unterschiedes gedenken, als die richtige anerkannt.**) Gegen diese Angabe hat Herbart in einer Abhandlung „über die Tonlehre"***) folgenden Einwand gemacht: »Wir stellen — sagt er — in Abrede, was die physikalischen Schriften von der sogenannten enharmonischen Tonfolge zu sagen pflegen. Nach ihnen sollen die Töne so auf einander folgen: *c*, *cis*, *des*, *d*, *dis*, *es*, *e* u. s. w., anstatt dass sie folgen müssen: *c*, *des*, *cis*, *d*, *es*, *dis*, *e* u. s. w. Fortschreitungen wie diese

$$\begin{array}{cccc} \bar{d}, & \bar{e}^{b}, & \bar{d}^{\#}, & \bar{e} \\ b & \bar{c} & h & h \\ f & f & f^{\#} & e \\ B & A & A & G^{\#} \end{array}$$

sind in der Musik nicht selten. Nun weiss Jedermann, dass die falsche Quinte *es* im Sext-Quinten-Accorde sich unterwärts auflösen muss, hingegen *dis* nach Oben zu *e* hinstrebt. Wenn also ein Violinspieler oder

---

*) Es hat z. B. das aus 43 Quinten entstehende schon Sauveur in den *Mém. de l'Acad. de Paris*, 1701, angegeben (vgl. Opelt über die Natur der Musik S. 39); das aus 31 Quinten Galin (s. Delezenne in dem *Receuil des travaux de la société des sciences de Lille*, 1827, *p*. 20).

**) So sagt z. B. G. Weber (Theorie der Tonsetzkunst Bd. I. S. 35. 2. Aufl.): die Taste zwischen *C* und *D*, wenn sie als *Cis* vorkommt, soll eigentlich nicht ganz so hoch klingen, wie wenn sie als *Des* erscheint; *Fis* nicht ganz so hoch wie *Ges*, *Es* nicht so tief wie *Dis*, *Eis* nicht ganz so hoch wie *F* u. s. w.

***) Psychologische Untersuchungen, I, S. 101 (Werke, I, S. 260).

Sänger *es* spielt oder singt, so treibt ihn sein Gefühl nach Unten (? soll wol heissen Oben); soll er nun *es* in *dis* verwandeln, so bekommt er einen Impuls nach Oben. In Folge dieses Impulses muss er den Ton *es* nicht erniedrigen (denn es wird ihm verboten, nach Unten sich zu wenden), sondern ihn erhöhen, denn nach Oben hin wird er getrieben in demselben Augenblick, wo ihm vorgeschrieben ist, *dis* anstatt *es* zu denken und zu spielen. Dagegen fordert jene physikalische Lehre von ihm, er solle rückwärts nach Unten gehen, in demselben Augenblick, wo er einen Antrieb aufwärts bekommt« u. s. w.*) In der That kommt der hier bezeichnete Fall bei Modulationen durch enharmonische Verwechselung sehr häufig vor. Wenn auf dem Tasteninstrument diese Verwechselung nur eine Vertauschung des Namens eines und desselben wiederholten Tons ist, so gewinnt sie auf dem Streichinstrument die Bedeutung eines vermittelnden Uebergangs zum nächstfolgenden höheren oder tieferen Tone, die aber nur möglich ist, wenn die erniedrigten Töne tiefer liegen als die ihnen nächsten erhöhten. Wir sind hierin überdies durch die Versicherung tüchtiger Musiker bestätigt worden, dass der Violinist nicht blos gelegentlich, sondern stets *Cis* höher als *Des*, *Dis* höher als *Es* u. s. w. greife. Wir können daher die entgegengesetzte Ansicht nur aus dem Respect vor der angeführten akustischen Tabelle erklären, in der die Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne für eben so sicher gehalten wurden, wie es die der Haupttöne sind. Vielleicht scheute man sich auch vor der Folgerung, dass ja dann die übermässige Prime höher liege als die kleine Secunde, die übermässige Secunde höher als die kleine Terz u. s. w.; wovor man jedoch nicht zurückzuschrecken braucht, wenn man bedenkt, dass diese Benennungen von den reinen Tönen und Intervallen auf die temperirten übergegangen sind (vgl. § 39), und es daher nicht zu verwundern ist, wenn ihr Wortsinn mit ihrer sachlichen Bedeutung nicht mehr ganz zusammenstimmt, obgleich ihr Zusammenhang mit den (nun temperirten) Haupttönen und deren Intervallen unverändert geblieben ist.

*) Herbart, selbst schon theoretisch und praktisch mit der Musik vertraut, fand für diese Ansicht Beistimmung bei einem Manne vom Fach, seinem Freund Griepenkerl in Braunschweig. Dieser ist es, der (a. a. O. S. 120) an Herbart schreibt: *Cis* ist höher als *des*, *dis* höher als *es* u. s. w. Es gilt dies von jedem zufällig erhöhten und zufällig erniedrigten Tone, wenn beide auf dem Clavier dieselbe Taste haben.

§ 51.

Aus der Tabelle a. E. von § 39 geht hervor, dass die Differenzen oder Intervalle $D^b - C^\#$, $E^b - D^\#$, $F^b - E$, $F - E^\#$, $G^b - F^\#$, $A^b - G^\#$, $H^b - A^\#$, $c^b - H^\#$ für jede Art von gleichschwebender Temperatur gleich, nämlich, wenn q das Intervall der temperirten Quinte, $= 7 - 12q$ sind. Es sind daher diese Differenzen positiv, null oder negativ, je nachdem q kleiner, gleich oder grösser als $\frac{7}{12}$. Die gewöhnliche Temperatur also, in der $q = \frac{7}{12}$ und $C^\#$ und D^b, $D^\#$ und E^b u. s. w. zusammenfallen, scheidet alle übrigen gleichschwebenden Temperaturen in zwei Classen, in deren einer $q < \frac{7}{12}$ und D^b höher als $C^\#$, E^b höher als $D^\#$ liegt u. s. w., indess in der andern $q > \frac{7}{12}$ ist und D^b tiefer als $C^\#$, E^b tiefer als $D^\#$ liegt u. s. f. Die in den vorgehenden §§ angegebenen vier Temperaturen gehören sämmtlich in die erste Classe. Wir haben uns also jetzt nach Temperaturen der zweiten Classe umzuthun, in denen, wenn die Quinte abwärts schweben soll, $q > 0{,}58333$ und $< 0{,}58496$ seyn muss. Dass hierbei die Intervalle der grossen Secunde, $2q - 1$, der grossen Terz, $4q - 2$, grossen Sexte, $3q - 1$, und grossen Septime $5q - 2$ nothwendig grösser und, was hieraus unmittelbar folgt, die der kleinen Secunde, kleinen Terz, Quarte, kleinen Sexte und kleinen Septime kleiner als in der gewöhnlichen Temperatur werden müssen, leuchtet von selbst ein. Es folgt daraus aber, wie sich sogleich zeigen wird, nicht, dass deshalb alle diese Intervalle sich durch die Erhöhung der Quinte mehr von der Reinheit entfernen müssten, als es in der gewöhnlichen Temperatur geschieht. Man hat sich überhaupt des Vorurtheils zu entschlagen, als ob diese Temperatur die vollkommenste wäre, da sie es in der That nur für die Tasteninstrumente ist, die auf zwölf Töne beschränkt sind, im Uebrigen ihr aber nur die Bedeutung der mittleren gleichschwebenden Temperatur zwischen den angeführten zwei Classen zukommt, von denen die zweite näher zu untersuchende jedenfalls noch reinere Quinten und Quarten hat, im Uebrigen aber schon (§ 49) gezeigt worden ist, dass diese mittlere Temperatur in der Gesammtheit ihrer Bestimmungen den Temperaturen der ersten Classe an Reinheit nachsteht.

§ 52.

Von den in § 44 ausgezeichneten Quintencirkeln ist eigentlich nur einer vorhanden, der eine Temperatur der zweiten Classe giebt, nämlich der, dessen Quinte $= \frac{31}{53}$. Da jedoch der Werth $q = \frac{24}{41}$ sich in der Reihe der schärfsten Näherungswerthe der reinen Quinte befindet und seine Schwebung aufwärts sehr klein ist (vgl. § 43), so steht er so dicht an der obern Grenze der Classe, dass er wohl mit berücksichtigt zu werden verdient. Dieser Quintenwerth giebt nun folgendes Tonsystem:

$c = 0 = 0{,}00000$	$c = 1 = 1{,}00000$
$H^{\#} = \frac{1}{41} = 0{,}02439$	$d^{bb} = \frac{40}{41} = 0{,}97561$
$A^{3\#} = E^{3b} = \frac{2}{41} = 0{,}04878$	$A^{\#\#\#} = \frac{39}{41} = 0{,}95122$
$D^{b} = \frac{3}{41} = 0{,}07317$	$H = \frac{38}{41} = 0{,}92683$
$C^{\#} = \frac{4}{41} = 0{,}09756$	$c^{b} = \frac{37}{41} = 0{,}90244$
$H^{\#\#\#} = \frac{5}{41} = 0{,}12195$	$G^{3\#} = d^{3b} = \frac{36}{41} = 0{,}87805$
$E^{bb} = \frac{6}{41} = 0{,}14634$	$A^{\#} = \frac{35}{41} = 0{,}85366$
$D = \frac{7}{41} = 0{,}17073$	$H^{b} = \frac{34}{41} = 0{,}82927$
$C^{\#\#\#} = \frac{8}{41} = 0{,}19512$	$c^{bb} = \frac{33}{41} = 0{,}80488$
$H^{3\#} = F^{bb} = \frac{9}{41} = 0{,}21951$	$G^{\#\#\#} = \frac{32}{41} = 0{,}78049$
$E^{b} = \frac{10}{41} = 0{,}24390$	$A = \frac{31}{41} = 0{,}75610$
$D^{\#} = \frac{11}{41} = 0{,}26829$	$H^{bb} = \frac{30}{41} = 0{,}73171$
$C^{3\#} = G^{3b} = \frac{12}{41} = 0{,}29268$	$F^{3\#} = c^{3b} = \frac{29}{41} = 0{,}70732$
$F^{b} = \frac{13}{41} = 0{,}31707$	$G^{\#} = \frac{28}{41} = 0{,}68293$
$E = \frac{14}{41} = 0{,}34146$	$A^{b} = \frac{27}{41} = 0{,}65854$
$D^{\#\#\#} = \frac{15}{41} = 0{,}36585$	$E^{3\#} = H^{3b} = \frac{26}{41} = 0{,}63425$
$G^{bb} = \frac{16}{41} = 0{,}39024$	$F^{\#\#\#} = \frac{25}{41} = 0{,}60976$
$F = \frac{17}{41} = 0{,}41463$	$G = \frac{24}{41} = 0{,}58537$
$E^{\#} = \frac{18}{41} = 0{,}43902$	$A^{bb} = \frac{23}{41} = 0{,}56098$
$D^{3\#} = A^{3b} = \frac{19}{41} = 0{,}46341$	$E^{\#\#\#} = \frac{22}{41} = 0{,}53659$
$G^{b} = \frac{20}{41} = 0{,}48780$	$F^{\#} = \frac{21}{41} = 0{,}51220$

Die Abweichungen von der Reinheit sind hier: für die Quinte $= 0{,}00041 = \frac{1}{412{,}5}$ g. T. $\left(\text{genauer nach § 43 nur } \frac{1}{424{,}8}\right)$; für die grosse Terz $= 0{,}01953 = \frac{1}{8{,}7}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}01913 = \frac{1}{8{,}9}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}00080 = \frac{1}{212{,}4}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}01994 = \frac{1}{8{,}5}$ g. T. Quinte, Quarte, grosse Secunde und kleine Septime sind also so gut als völlig rein; dagegen weichen die beiden Terzen, die grosse Septime und kleine Secunde beträchtlicher von der Reinheit ab, als nach den gewöhnlichen Ansichten zulässig scheint. Bewährte Theoretiker, wie Marpurg u. A., geben nämlich an, dass die grosse Terz um nicht mehr als höchstens $\frac{10}{21}$ der kleinen Diesis, die kleine Terz um nicht mehr als $\frac{10}{32}$ des Drittheilstons abwärts schweben dürfe. Es ist nicht wahrscheinlich, dass diese Vorschrift auf Versuchen beruht; denn es hätte dann bemerklich werden müssen, dass beide Bestimmungen völlig gleich sind, da aus den Intervallgrössen der kleinen Diesis $= 0{,}03422$ (§ 18) und des Drittheilstons $= 0{,}05214$ (§ 19) sofort sich ergiebt, dass $\frac{10}{21}$ der ersteren gleich $\frac{10}{32}$ der zweiten, nämlich $= 0{,}01629$ d. i. $= \frac{1}{10{,}4}$ g. T. ist. Angenommen jedoch diese Vorschrift sey in ihrer ganzen Bestimmtheit begründet, so bezieht sie sich, wie die bisherigen Untersuchungen über Temperatur überhaupt, vorzugsweise auf die Stimmung der Tasten- und eines Theils der Blasinstrumente. Wo nun, wie da, erhöhte und erniedrigte Töne zusammenfallen, ist es wohl begreiflich, dass der Zwischenraum zwischen der aufwärts schwebenden grossen und der abwärts schwebenden kleinen Terz nicht so gross seyn darf, als da, wo zwei Mitteltöne Platz finden. Wenn ferner an der Kirnbergerschen Temperatur getadelt worden ist, dass in einigen Tonarten die grossen Terzen um ein syntonisches Komma $= \frac{1}{9{,}4}$ g. T. höher sind als die reinen, so ist auch dies ein andres Verhältniss als im vorliegenden Falle. Denn da auf einem nach dieser Temperatur gestimmten Instrument (eine Stimmung, die vor Scheibler's Stimmmethode gar nicht genau ausführbar war) das Ohr bei jeder Ausweichung aus einer reineren Tonart in eine unreinere oder umgekehrt aus dieser in jene reinere Terzen mit unreineren unmittelbar zu vergleichen Gelegenheit hat, so muss dann ohnfehlbar ein weit grellerer Eindruck entstehen, als wo in allen Tonarten alle grossen Terzen und ebenso alle übrigen gleichnamigen Intervalle gleichviel sich von der Reinheit entfernen; daher wird hier selbst eine grössere Abweichung keine auffallende Wirkung hervor-

bringen. Es ist überhaupt zu beachten, dass unsre moderne Musik uns nur temperirte Töne und Intervalle hören lässt und hieraus ohne Zweifel eine gewisse Gewöhnung entsteht. Diese schwächt nun zwar nicht oder verdirbt gar die Empfänglichkeit für die reinen Consonanzen und Accorde; dass aber der, welcher solche Reinheit hört, wie Scheibler*) sagt, sein »frohes Erstaunen über diese wohlthuende Reinheit ausspricht«, verräth sehr deutlich, wie wenig wir sie zu hören gewohnt sind und — nach der Natur unsrer heutigen Musik — sie hören können. Es ist daher mindestens eben so wichtig die grössten Abweichungen des vorliegenden Systems von der gewöhnlichen oder mittleren Temperatur zu untersuchen als die von der Reinheit. Sie sind folgende: für die Quinte $= 0{,}00204 = \frac{1}{83{,}8}$ g. T.; für die grosse Terz $= 0{,}00813 = \frac{1}{20{,}9}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}00610 = \frac{1}{27{,}9}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}01594 = \frac{1}{10{,}6}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}01016 = \frac{1}{16{,}7}$. Diese Abweichungen sind also, mit Ausnahme der grossen Secunde, kleiner als die, um welche die gewöhnliche Temperatur in den Terzen von der Reinheit sich entfernt. Für $C^\#$ beträgt der Unterschied $0{,}01423 = \frac{1}{11{,}9}$ g. T., für $D^\#$ ist er $= 0{,}01829 = \frac{1}{9{,}2}$ g. T., für $F^\# = 0{,}01220 = \frac{1}{13{,}9}$ g. T., für $G^\# = 0{,}01626 = \frac{1}{10{,}4}$ g. T. Diese Abweichungen sind also grösser als die vorigen. Es ist aber auch bekannt, dass der Violinist beim Zusammenspiel mit dem Pianoforte die erhöhten und erniedrigten Töne weniger scharf zu nehmen pflegt, als er sonst gewohnt ist, sondern sich der Temperatur des Pianoforte anbequemt. — Die grössere Stufe dieses Systems ist $= \frac{7}{41}$, die kleinere $= \frac{4}{41}$, also $= \frac{4}{7}$ der grösseren; die Durscala hat demnach dieselbe Form wie in dem System aus 43 Quinten (§ 47). Die Grösse der Intervalle zwischen D^b und $C^\#$, E^b und $D^\#$ u. s. w. ist hier $= \frac{1}{43}$ der Octave oder $\frac{1}{7}$ der grossen Secunde, was zugleich sehr nahe $= \frac{1}{7}$ g. T. ist.

§ 53.

Was endlich die temperirte Quinte betrifft, deren Intervall $q = \frac{31}{53}$ ist, so führt sie auf folgendes Tonsystem:

*) Ueber mathematische Stimmung, Temperatur und Orgelstimmung, S. 23.

	C	$= 0$	$= 0{,}00000$
	$\underline{H}^{\#}$	$= \frac{1}{53}$	$= 0{,}01887$
$\underline{A}^{3\#} =$	F^{4b}	$= \frac{2}{53}$	$= 0{,}03774$
	E^{3b}	$= \frac{3}{53}$	$= 0{,}05660$
	D^{b}	$= \frac{4}{53}$	$= 0{,}07547$
	$C^{\#}$	$= \frac{5}{53}$	$= 0{,}09434$
	$\underline{H}^{\#\#}$	$= \frac{6}{53}$	$= 0{,}11321$
$\underline{A}^{4\#} =$	F^{3b}	$= \frac{7}{53}$	$= 0{,}13208$
	E^{bb}	$= \frac{8}{53}$	$= 0{,}15094$
	D	$= \frac{9}{53}$	$= 0{,}16981$
	$C^{\#\#}$	$= \frac{10}{53}$	$= 0{,}18868$
$\underline{H}^{3\#} =$	G^{4b}	$= \frac{11}{53}$	$= 0{,}20755$
	F^{bb}	$= \frac{12}{53}$	$= 0{,}22642$
	E^{b}	$= \frac{13}{53}$	$= 0{,}24528$
	$D^{\#}$	$= \frac{14}{53}$	$= 0{,}26415$
	$C^{3\#}$	$= \frac{15}{53}$	$= 0{,}28302$
$\underline{H}^{4\#} =$	G^{3b}	$= \frac{16}{53}$	$= 0{,}30189$
	F^{b}	$= \frac{17}{53}$	$= 0{,}32076$
	E	$= \frac{18}{53}$	$= 0{,}33962$
	$D^{\#\#}$	$= \frac{19}{53}$	$= 0{,}35849$
$C^{4\#} =$	A^{4b}	$= \frac{20}{53}$	$= 0{,}37736$
	G^{bb}	$= \frac{21}{53}$	$= 0{,}39623$
	F	$= \frac{22}{53}$	$= 0{,}41509$
	$E^{\#}$	$= \frac{23}{53}$	$= 0{,}43396$
	$D^{3\#}$	$= \frac{24}{53}$	$= 0{,}45283$
	A^{3b}	$= \frac{25}{53}$	$= 0{,}47170$
	G^{b}	$= \frac{26}{53}$	$= 0{,}49057$
	c	$= 1$	$= 1{,}00000$
	d^{bb}	$= \frac{52}{53}$	$= 0{,}98113$
$G^{4\#} =$	e^{4b}	$= \frac{51}{53}$	$= 0{,}96226$
	$A^{\#\#}$	$= \frac{50}{53}$	$= 0{,}94340$
	H	$= \frac{49}{53}$	$= 0{,}92453$
	c^{b}	$= \frac{48}{53}$	$= 0{,}90566$
	d^{3b}	$= \frac{47}{53}$	$= 0{,}88679$
	G^{3b}	$= \frac{46}{53}$	$= 0{,}86792$
	$A^{\#}$	$= \frac{45}{53}$	$= 0{,}84906$
	H^{b}	$= \frac{44}{53}$	$= 0{,}83019$
	c^{bb}	$= \frac{43}{53}$	$= 0{,}81132$
$F^{4\#} =$	d^{4b}	$= \frac{42}{53}$	$= 0{,}79245$
	$G^{\#\#}$	$= \frac{41}{53}$	$= 0{,}77358$
	A	$= \frac{40}{53}$	$= 0{,}75472$
	H^{bb}	$= \frac{39}{53}$	$= 0{,}73585$
$E^{4\#} =$	c^{3b}	$= \frac{38}{53}$	$= 0{,}71698$
	$F^{3\#}$	$= \frac{37}{56}$	$= 0{,}69811$
	$G^{\#}$	$= \frac{36}{53}$	$= 0{,}67924$
	A^{b}	$= \frac{35}{53}$	$= 0{,}66038$
	H^{3b}	$= \frac{34}{53}$	$= 0{,}64151$
$E^{3\#} =$	c^{4b}	$= \frac{33}{53}$	$= 0{,}62264$
	$F^{\#\#}$	$= \frac{32}{53}$	$= 0{,}60377$
	G	$= \frac{31}{53}$	$= 0{,}58491$
	A^{bb}	$= \frac{30}{53}$	$= 0{,}56604$
$D^{4\#} =$	H^{4b}	$= \frac{29}{53}$	$= 0{,}54717$
	$E^{\#\#}$	$= \frac{28}{53}$	$= 0{,}52830$
	$F^{\#}$	$= \frac{27}{53}$	$= 0{,}50943$

Dieses System hat wesentlich denselben Charakter wie das vorige, nur nähert es sich mehr sowohl der Reinheit als der mittleren Temperatur. Die Abweichungen von der Reinheit sind nämlich: für die jetzt abwärts schwebende Quinte $= 0{,}00006 = \frac{1}{2882}$ g. T.; für die grosse

Terz = 0,01769 = $\frac{1}{9,6}$ g. T.; für die kleine Terz = 0,01775 = $\frac{1}{9,6}$ g. T.; für die grosse Secunde = 0,00011 = $\frac{1}{1544,4}$ g. T.; für die grosse Septime = 0,01764 = $\frac{1}{9,6}$ g. T. Quinte, Quarte, grosse Secunde und kleine Septime sind also als völlig rein zu betrachten, Terzen und Sexten, sowie die kleine Secunde und grosse Septime weichen um etwas weniger als das syntonische Komma ab. Die Abweichungen von der gewöhnlichen oder mittleren Temperatur sind: für die Quinte = 0,00157 = $\frac{1}{108,2}$ g. T.; für die grosse Terz = 0,00629 = $\frac{1}{27}$ g. T.; für die kleine Terz = 0,00472 = $\frac{1}{36}$ g. T.; für die gr. Secunde = $\frac{1}{54}$ g. T.; für die grosse Septime = $\frac{1}{21,6}$ g. T., also sämmtlich unmerklich klein. Für *C*# beträgt der Unterschied von der mittleren Temperatur 0,01101 = $\frac{1}{15,3}$ g. T.; für *D*# ... 0,01414 = $\frac{1}{12}$ g. T.; für *F*# ... 0,00943 = $\frac{1}{18}$ g. T.; für *G*# ... 0,01257 = $\frac{1}{13,1}$ g. T.; der Unterschied ist also für alle diese Töne sehr gering und fast unmerklich. — Sehr kurz lässt sich die Lage der einfach erhöhten und erniedrigten Töne durch die Bemerkung angeben, dass die erniedrigten Töne *D*♭, *E*♭, *F*♭, *G*♭, *A*♭, *H*♭, *c*♭ fast genau mit ihren Bestimmungen nach der Kirnbergerschen Temperatur zusammenfallen, die ihnen (§ 32) nächstbenachbarten erhöhten aber sämmtlich um $\frac{1}{9}$ g. T. (das Komma der Alten) höher liegen.

Die grössere Stufe dieses Systems ist = $\frac{9}{53}$, die kleinere = $\frac{5}{53}$, also = $\frac{5}{9}$ der grösseren, folglich ziemlich nahe = $\frac{1}{2}$. Die Stufenfolge der Durscala ist also hier

9, 9, 5, 9, 9, 9, 5,

und nähert sich demnach der Stufenfolge der mittleren mehr als die aller anderen im Vorigen dargelegten Temperaturen.

Endlich verdient noch bemerkt zu werden, dass dieses Tonsystem (und mit weniger Schärfe auch das vorige aus 41 Quinten) in der Tonfolge

C, *D*, *F*♭, *F*, *G*, *H*♭♭, *c*♭, *c*

mit unmerkbaren Abweichungen die *reine C*-durscala, und eben so in der Tonfolge

c, *H*♭, *G*#, *G*, *F*, *D*#, *D*, *C*,

die absteigende *reine C*-mollscala darstellt. Es besitzt

aber diese genäherten reinen Scalen auch in jeder andern Tonart. Denn da, um bei der Durscala stehen zu bleiben, diese durch die Intervalle

$$0, \frac{9}{53}, \frac{17}{53}, \frac{22}{53}, \frac{31}{53}, \frac{39}{53}, \frac{48}{53}, 1$$

bezeichnet ist, so braucht man nur diese Werthe zu dem Intervallwerth des zum Grundton angenommenen Tons zu addiren, um die Intervalle zu erhalten, welche die für diesen Grundton die Durscala bildenden Töne mit C haben, und daraus diese selbst nach der Tabelle zu finden. Sey z. B. E^b der Grundton, dessen Intervall $= \frac{13}{53}$, so sind die Töne der *Es*-durscala bestimmt durch die Intervalle

$$\frac{13}{53}, \frac{22}{53}, \frac{30}{53}, \frac{35}{53}, \frac{44}{53}, \frac{52}{53}, \frac{61}{53}, \frac{66}{53},$$

denen die Töne

$$E^b, F, A^{bb}, A^b, H^b, d^{bb}, e^{bb}, e^b$$

entsprechen, welche also die nahe reine *Es*-durscala darstellen.

§ 54.

Es bleibt jetzt noch zu untersuchen übrig, ob es nicht vielleicht noch ein andres Tonsystem giebt, welches bei derselben enharmonischen Tonfolge sich der Reinheit und der mittleren Temperatur noch mehr nähert. Dass die in § 43 gefundenen Näherungswerthe der Quinte $\frac{179}{306} = 0{,}5849673$, $\frac{389}{665} = 0{,}5849624$ u. s. f., welche auf $\frac{31}{53} = 0{,}5849057$ folgen, die Hauptintervalle nicht reiner geben können als $q = \frac{31}{53}$, geht sofort daraus hervor, dass sie grösser als dieser Werth sind, also, in den Ausdrücken $2q - 1$, $3q - 1$, $4q - 2$, $5q - 2$ der Intervalle der grossen Secunde, Sexte, Terz und Septime substituirt, nothwendig stärker abweichende Werthe geben müssen. Da nun in dem Vorigen erwiesen ist, dass es keinen Cirkel von weniger als 53 Quinten giebt, der, bei gleicher enharmonischer Tonfolge wie dieser, sich der Reinheit mehr näherte, so kann nur ein Cirkel, dessen Quintenzahl zwischen 53 und 306 oder 306 und 665 u. s. f. liegt, grössere Reinheit gewähren, die Grösse seines Quintenintervalls aber wird zwischen den Grenzen $\frac{31}{53}$ und $\frac{7}{12}$ enthalten seyn müssen. Solcher Cirkel giebt es nun in der That unzählig viele, aber es lässt sich zeigen, *dass bei merklicher Zunahme der Reinheit des Systems die Unterscheidbarkeit der erhöhten Töne von den erniedrigten in stärkerem Masse sich vermindert.* Wir können nämlich nach der Reinheit der grossen Terz die Reinheit des Systems beurtheilen, da ihr Intervall

von dem Vierfachen der temperirten Quinte abhängt, indess in der grossen Sexte nur das Dreifache, in der grossen Secunde nur das Doppelte, in der grossen Septime aber zwar das Fünffache der temperirten Quinte vorkommt, diese aber eine stärkere Abweichung verträgt als die grosse Terz, die nächst der Quinte am reinsten seyn soll. Aendert sich nun q um Δq, so ist die Aenderung des Intervalls der grossen Terz $-4\Delta q$. Es ist aber nach der Tabelle a. E. des § 39 das Intervall zwischen D^b und $C^{\#}$, E^b und $D^{\#}$ u. s. w. $= 12q - 7$, daher ändert sich dieses gleichzeitig mit q um $-12\Delta q$; also ist die Abnahme dieses Intervalls dreimal so gross als die Annäherung des Intervalls der grossen Terz an das der mittleren temperirten, und somit die Zunahme ihrer Reinheit.

Sey die Differenz von D^b und $C^{\#}$ d. i. $12q - 7$ gleich $\frac{1}{n}$ der grossen Secunde, also $= \frac{2q-1}{n}$, so folgt hieraus

$$q = \frac{1}{2}\left(\frac{7n-1}{6n-1}\right).$$

Setzt man nun successiv $n = 4, 5, 6 \ldots 15$, so erhält man folgende Tabelle, in der u die Abweichung des Intervalls der grossen Terz von der Reinheit bezeichnet, und $12q - 7$ die Differenz $C^{\#} - D^b$ sowohl in Theilen der temperirten grossen Secunde als des reinen ganzen Tons angiebt.

n	q	$4q-2$	u	$12q-7$
4	$\frac{27}{46} = 0{,}58696$	$\frac{16}{46} = 0{,}34783$	$\frac{1}{6,4}$ g. T.	$\frac{1}{4}$ gr. Sec. $= \frac{1}{3,9}$ g. T.
5	$\frac{17}{29} = 0{,}58621$	$\frac{10}{29} = 0{,}34483$	$\frac{1}{7,4}$ "	$\frac{1}{5}$ " " $= \frac{1}{4,9}$ "
6	$\frac{41}{70} = 0{,}58571$	$\frac{24}{70} = 0{,}34286$	$\frac{1}{8,1}$ "	$\frac{1}{6}$ " " $= \frac{1}{5,9}$ "
7	$\frac{24}{41} = 0{,}58536$	$\frac{14}{41} = 0{,}34146$	$\frac{1}{8,7}$ "	$\frac{1}{7}$ " " $= \frac{1}{7}$ "
8	$\frac{55}{94} = 0{,}58511$	$\frac{32}{94} = 0{,}34043$	$\frac{1}{9,2}$ "	$\frac{1}{8}$ " " $= \frac{1}{8}$ "
9	$\frac{31}{53} = 0{,}58491$	$\frac{18}{53} = 0{,}33962$	$\frac{1}{9,6}$ "	$\frac{1}{9}$ " " $= \frac{1}{9}$ "
10	$\frac{69}{118} = 0{,}58475$	$\frac{40}{118} = 0{,}33898$	$\frac{1}{10}$ "	$\frac{1}{10}$ " " $= \frac{1}{10}$ "
11	$\frac{38}{65} = 0{,}58462$	$\frac{22}{65} = 0{,}33846$	$\frac{1}{10,3}$ "	$\frac{1}{11}$ " " $= \frac{1}{11,1}$ "
12	$\frac{83}{142} = 0{,}58451$	$\frac{48}{142} = 0{,}33803$	$\frac{1}{10,6}$ "	$\frac{1}{12}$ " " $= \frac{1}{12,1}$ "
13	$\frac{45}{77} = 0{,}58442$	$\frac{26}{77} = 0{,}33766$	$\frac{1}{10,8}$ "	$\frac{1}{13}$ " " $= \frac{1}{13,1}$ "
14	$\frac{97}{166} = 0{,}58434$	$\frac{56}{166} = 0{,}33735$	$\frac{1}{11}$ "	$\frac{1}{14}$ " " $= \frac{1}{14,1}$ "
15	$\frac{52}{89} = 0{,}58427$	$\frac{30}{89} = 0{,}33708$	$\frac{1}{11,2}$ "	$\frac{1}{15}$ " " $= \frac{1}{15,1}$ "

Hieraus erhellt nun, in Uebereinstimmung mit dem Vorigen, dass die grosse Terz viel langsamer der Reinheit sich nähert, als der Unterschied der benachbarten erhöhten und erniedrigten Töne sich vermindert. Für $n = 13$ ist dieser schon geringer als die Abweichung der gewöhnlichen temperirten kleinen Terz von der reinen, für $n = 15$ geringer als die Abweichung der gewöhnlichen temperirten grossen Terz. Man sieht hieraus, dass das Tonsystem von 53 Quinten mit der möglichsten Reinheit der grossen Terz noch hinlängliche Unterscheidbarkeit der erhöhten Haupttöne von den erniedrigten verbindet, dass aber, wenn dieser Unterschied grösser als $\frac{1}{9}$ g. T. genommen wird, consequenter Weise auch die grosse Terz weniger rein seyn muss.

§ 55.

Es könnte in Zweifel gezogen werden, ob so kleine Unterschiede wie $\frac{1}{9}$ des ganzen Tons auf der Violine, bei der Kürze ihrer Saiten, sich mit Sicherheit greifen lassen. Um dies zu untersuchen, sind die Saitenlängen zu bestimmen, die den vorkommenden Tönen entsprechen. Sey die Länge einer Violinsaite, vom Steg bis zum Sattel genommen, $= l$; die Länge, welche ihr zukommt, wenn sie einen Ton angiebt, der um das Intervall $x' - x$ höher ist als der Ton der ganzen freischwingenden Saite, $= l'$, so ist, da sich die Saitenlängen der Töne umgekehrt wie ihre Schwingungszahlen verhalten,

$$\frac{l'}{l} = \frac{y}{y'} = \frac{1}{2^{x'-x}},$$

daher $\log \frac{l'}{l} = -(x'-x)\log 2 = -0{,}30103.(x'-x)$.

Setzt man nun für die Temperatur aus 53 Quinten $x'-x = \frac{\lambda}{53}$, wo λ die ganze positive Zahl ist, die in 53steln der Octave die Grösse des Intervalls des Tons ausdrückt, dessen Saitenlänge man sucht, so wird

$$\log \frac{l'}{l} = -0{,}0056798.\lambda.$$

Ebenso wird für die Temperatur aus 41 Quinten, wenn man $x'-x = \frac{\lambda}{41}$ setzt,

$$\log \frac{l'}{l} = -0{,}0073422.\lambda.$$

Endlich giebt für die gewöhnliche mittlere Temperatur $x'-x = \frac{\lambda}{12}$

$$\log \frac{l'}{l} = -0{,}0250858.\lambda.$$

Da auf der Violine die vier Saiten, wenn sie frei schwingen, die Töne g, $\bar{d}$, $\bar{a}$, $\bar{\bar{e}}$ angeben, so ist das Intervall $x'-x$ in Bezug auf diese als Grundtöne zu nehmen, also für g, in der Temperatur aus 53 Quinten zu setzen, $x = \frac{31}{53}$; für $\bar{d}$, $x = \frac{9}{53}$; für $\bar{a}$, $x = \frac{40}{53}$; für $\bar{\bar{e}}$, $x = \frac{18}{53}$; für

x' aber der Intervallwerth des Tons, dessen Saitenlänge bestimmt werden soll zu setzen, woraus sich dann λ ergiebt. Es wird also z. B. für die Töne a, $\bar{e}$, $\bar{h}$, $\bar{\bar{f}}^{\#}$ x' resp. $= \frac{40}{53}, \frac{18}{53}, \frac{49}{53}, \frac{27}{53}$ zu setzen seyn, woraus für alle vier folgt $x' - x = \frac{9}{53}$, also $\lambda = 9$. Hiernach sind nun in den folgenden zwei Tabellen die Zahlen in den Columnen $\log \frac{l_{53}}{l}$, $\log \frac{l_{41}}{l}$, $\log \frac{l_{12}}{l}$, die, wie man von selbst sieht, sich auf die drei angeführten Temperaturen beziehen, berechnet. Addirt man zu diesen Zahlen $\log l$, nachdem l durch wirkliche Messung bestimmt ist, so ergeben sich die Logarithmen von l'_{53}, l'_{41}, l'_{12}, d. i. die Logarithmen der den nebenstehenden Tönen entsprechenden Saitenlängen und hieraus diese selbst. In den folgenden zwei Tabellen ist $l = 329$ Millimeter angenommen.*)

				$\log \frac{l_{53}}{l}$	$\log \frac{l_{41}}{l}$	l'_{53}	l'_{41}
g	$\bar{d}$	$\bar{a}$	$\bar{\bar{e}}$	0,00000	0,00000	329,mm00	329,mm00
$f^{\#\#\#}$	$\bar{c}^{\#\#\#}$	$\bar{g}^{\#\#\#}$	$\bar{d}^{\#\#\#}$	— 0,00568	— 0,00734	324, 73	323, 48
h^{3b}	$\bar{f}^{bb}$	$\bar{\bar{c}}^{bb}$	$\bar{\bar{g}}^{bb}$	— 0,01704	— 0,01468	316, 35	318, 07
a^{b}	$\bar{e}^{b}$	$\bar{h}^{b}$	$\bar{\bar{f}}$	— 0,02272	— 0,02203	312, 23	312, 73
$g^{\#}$	$\bar{d}^{\#}$	$\bar{a}^{\#}$	$\bar{\bar{e}}^{\#}$	— 0,02840	— 0,02937	308, 17	307, 49
h^{bb}	$\bar{f}^{b}$	$\bar{\bar{c}}^{b}$	$\bar{\bar{g}}^{b}$	— 0,04544	— 0,04405	296, 32	297, 27
a	$\bar{e}$	$\bar{h}$	$\bar{\bar{f}}^{\#}$	— 0,05112	— 0,05140	292, 47	292, 13
$g^{\#\#\#}$	$\bar{d}^{\#\#\#}$	$\bar{a}^{\#\#\#}$	$\bar{\bar{e}}^{\#\#\#}$	— 0,05680	— 0,05874	288, 67	286, 72
$\bar{c}^{bb}$	$\bar{g}^{bb}$	$\bar{\bar{d}}^{bb}$	$\bar{\bar{a}}^{bb}$	— 0,06816	— 0,06608	281, 22	282, 56
h^{b}	$\bar{f}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{g}}$	— 0,07384	— 0,07342	277, 56	277, 64
$a^{\#}$	$\bar{e}^{\#}$	$\bar{h}^{\#}$	$\bar{\bar{f}}^{\#\#\#}$	— 0,07952	— 0,08076	273, 95	273, 17
$\bar{c}^{b}$	$\bar{g}^{b}$	$\bar{\bar{d}}^{b}$	$\bar{\bar{a}}^{b}$	— 0,09656	— 0,09545	263, 41	264, 09
h	$\bar{f}^{\#}$	$\bar{\bar{c}}^{\#}$	$\bar{\bar{g}}^{\#}$	— 0,10224	— 0,10279	259, 99	259, 66
$a^{\#\#\#}$	$\bar{e}^{\#\#\#}$	$\bar{h}^{\#\#\#}$	$\bar{\bar{f}}^{3\#}$	— 0,10792	— 0,10913	256, 61	255, 90
$\bar{d}^{bb}$	$\bar{a}^{bb}$	$\bar{\bar{e}}^{bb}$	$\bar{\bar{h}}^{bb}$	— 0,11928	— 0,11748	249, 99	251, 60
$\bar{c}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{a}}$	— 0,12496	— 0,12482	246, 74	246, 82
$h^{\#}$	$\bar{f}^{\#\#\#}$	$\bar{\bar{c}}^{\#\#\#}$	$\bar{\bar{g}}^{\#\#\#}$	— 0,13064	— 0,13216	243, 52	242, 68
$\bar{c}^{3b}$	$\bar{h}^{3b}$	$\bar{\bar{f}}^{bb}$	$\bar{\bar{c}}^{bb}$	— 0,14199	— 0,13950	237, 25	238, 61
$\bar{d}^{b}$	$\bar{a}^{b}$	$\bar{\bar{e}}^{b}$	$\bar{\bar{h}}^{b}$	— 0,14767	— 0,14684	234, 16	234, 76
$\bar{c}^{\#}$	$\bar{g}^{\#}$	$\bar{\bar{d}}^{\#}$	$\bar{\bar{a}}^{\#}$	— 0,15335	— 0,15419	231, 12	230, 68

*) Nach einer Mittheilung von Herrn Dr. med. V. Carus, dessen musikalische Erfahrung mir, wie ich hiermit dankbar anerkenne, bei der vorliegenden Arbeit in mehreren Punkten förderlich war.

				$\log \frac{l'_{12}}{l}$	l'_{12}
g	$\bar{d}$	$\bar{a}$	$\bar{\bar{e}}$	0,00000	329,mm00
a^b	$\bar{e}^b$	$\bar{h}^b$	$\bar{\bar{f}}$	— 0,02509	310, 54
$g^\#$	$\bar{d}^\#$	$\bar{a}^\#$	$\bar{\bar{e}}^\#$		
h^{bb}	$\bar{e}^b$	$\bar{\bar{c}}^b$	$\bar{\bar{g}}^b$	— 0,05017	293, 11
a	$\bar{e}$	$\bar{h}$	$\bar{\bar{f}}^\#$		
h^b	$\bar{f}$	$\bar{\bar{c}}$	$\bar{\bar{g}}$	— 0,07526	276, 65
$a^\#$	$\bar{e}^\#$	$\bar{h}^\#$	$\bar{\bar{f}}^\#$		
$\bar{c}^b$	$\bar{g}^b$	$\bar{\bar{d}}^b$	$\bar{\bar{a}}^b$	— 0,10034	261, 13
h	$\bar{f}^\#$	$\bar{\bar{c}}^\#$	$\bar{\bar{g}}^\#$		
$\bar{c}$	$\bar{g}$	$\bar{\bar{d}}$	$\bar{\bar{a}}$	— 0,12543	246, 47
$h^\#$	$\bar{f}^{\#\#\#}$	$\bar{\bar{c}}^{\#\#\#}$	$g^{\#\#\#}$		
$\bar{d}^b$	$\bar{a}^b$	$\bar{\bar{e}}^b$	$\bar{\bar{h}}^b$	— 0,15052	232, 64
$\bar{c}^\#$	$\bar{g}^\#$	$\bar{\bar{d}}^\#$	$\bar{\bar{a}}^\#$		

Hieraus ist nun ersichtlich, dass auch die kleinsten räumlichen Unterschiede, nämlich die, welche $\bar{c}^\#$ und $\bar{d}^b$ auf der g-Saite, $\bar{g}^\#$ und $\bar{a}^b$ auf der $\bar{d}$-Saite, $\bar{\bar{d}}^\#$ und $\bar{\bar{e}}^b$ auf der $\bar{a}$-Saite und $\bar{\bar{a}}^\#$ und $\bar{\bar{h}}^b$ auf der $\bar{\bar{e}}$-Saite entsprechen, für die Temperatur aus 53 Quinten immer noch 3 Millimeter ($\frac{1}{8}$ Lpz. Zoll), für die Temperatur aus 41 Quinten 4 Millimeter ($\frac{1}{6}$ Zoll) betragen, also immer noch eine merkliche Verrückung des Fingers fordern; dass sich aber mit gleicher, ja zum Theil mit weit grösserer Sicherheit nicht nur alle doppelt erhöhten und erniedrigten Töne, sondern sogar die dreifachen h^{3b}, $\bar{e}^{3b}$, $\bar{\bar{f}}^{3\#}$ auf dem Griffbret von ihren nächsten Nachbarn unterscheiden lassen, also die Angabe eines Tonunterschieds von $\frac{1}{9}$ g. T. keine praktischen Schwierigkeiten hat.*)

*) In den vorstehenden Tabellen ist auf die Verschiedenheit der Spannung, welche die Saite erleidet, je nachdem sie näher ihrer Mitte, wo diese Spannung am kleinsten ist, oder näher am Stege niedergedrückt wird, keine Rücksicht genommen. Wollte man jene Tabellen zu Versuchen benutzen, so müsste ihnen, zumal für die grösseren Werthe von l', noch eine kleine Correction beigefügt werden, die indess auf die Differenzen der Saitenlängen benachbarter Töne keinen Einfluss haben wird.

§ 56.

Ob das Tonsystem aus 53 Quinten dasjenige ist, dessen sich der Violinist unbewusst bedient, lässt sich natürlich mit voller Gewissheit *a priori* nicht bestimmen. Auch ist kaum anzunehmen, dass er dieses oder ein ihm nahe liegendes immer in aller Schärfe einhalten werde, da der musikalische Vortrag bald zur Schärfung, bald zur Abstumpfung der Intervalle treibt. Wie aber bei der Bestimmung des elliptischen Sphäroids des Erdkörpers die Aufgabe ist, die Gestalt der idealen Oberfläche zu bestimmen, die sich zwischen den Höhen der Gebirge und den Tiefen des Meeres mitten hindurchzieht, so kann es sich auch hier, bei Instrumenten, die eines so freien Ausdrucks der Empfindung fähig sind wie die Streichinstrumente, um nichts Andres handeln, als die mittlere Höhe der Töne zu bestimmen, welche der Spieler durchschnittlich beobachten mag. Es bedarf übrigens kaum der Bemerkung, dass, wenn sich durch Versuche der mittlere Unterschied, den der Violinist oder Cellist zwischen $C^{\#}$ und D^{b} u. s. w. einhält (das $\frac{1}{n}$ in § 54), mit zureichender Genauigkeit festsetzen lässt, dadurch die temperirte Quinte und mit dieser die Temperatur der Streichinstrumente empirisch gegeben ist.

In dasjenige Gebiet aber, das der blossen mathematischen Betrachtung zugänglich ist, fällt noch eine Untersuchung, die als Gegenstück zu der in § 48 f. geführten angesehen werden kann. Es wurde nämlich in § 53 bemerkt, dass das System aus 53 Quinten neben der temperirten auch in genäherten Werthen die reine Dur- und Mollscala enthalte. Man kann sich nun die Aufgabe stellen: die Temperatur zu finden, in welcher die Tonfolgen C, D, F^{b}, F, G, H^{bb}, c^{b}, c und c, H^{b}, $G^{\#}$, G, F, $D^{\#}$, D, C in möglich grösster Reinheit die aufsteigende C-dur- und absteigende C-mollscala darstellen. Mit der Lösung dieser Aufgabe möge unsre Untersuchung geschlossen werden.

§ 57.

Es kommt auch hier, wie in § 48, nur auf die Temperirung von fünf Tönen, nämlich D, F^{b}, G, H^{bb}, c^{b} an, da C und c fest stehen und F durch G, H^{b} durch D, $G^{\#}$ durch F^{b}, $D^{\#}$ durch H^{bb} gegeben ist. Nun ist, nach § 39 a. E. für jede gleichschwebende Temperatur das Intervall von $D = 2q - 1$, das von $F^{b} = 5 - 8q$, das von $G = q$, das von

$H^{bb} = 6 - 9q$, das von $c^b = 5 - 7q$. Da nun diese Töne der Reihe nach jetzt die grosse Secunde, Terz, Quinte, Sexte und Septime möglichst rein darstellen sollen, so muss, wenn wieder d, e, g, a, h die reinen Intervalle derselben bezeichnen,

$$(d - 2q + 1)^2 + (e - 5 + 8q)^2 + (g - q)^2 + (a - 6 + 9q)^2 + (h - 5 + 7q)^2$$

ein Minimum, mithin der Differentialquotient dieser Summe nach q null seyn. Hieraus folgt

$$q = \frac{131 + 2d + g - 8e - 9a - 7h}{199 . \log 2};$$

oder, wenn für d, g, u. s. w. ihre logarithmischen Werthe gesetzt werden,

$$q = \frac{\log \left(\frac{2^{161} . 3^7}{5^{24}}\right)}{199 . \log 2} = 0{,}5847652.^{*)}$$

Es bedarf hier nicht der Umwandlung dieses Werths in einen Kettenbruch, um einen ihm nahe gleichen gemeinen Bruch zu erhalten; denn die Tabelle in § 54 weist nach, dass ein solcher in grosser Schärfe $\frac{69}{118}$ ist. Substituirt man den genauen Werth in der obigen Quadratsumme, so ergiebt sich die

Summe der Quadrate der Abweichungen $= 0{,}0000002760$, **)

woraus erhellt, dass die Reinheit der durch diese Quinte bestimmten und durch die bezeichneten Töne des Systems aus 118 Quinten gebildeten Scalen ungleich grösser ist als die, welche im System aus 74 Quinten die gewöhnlichen scalenbildenden Töne C, D, E u. s. w., c, h^b, a^b u. s. w. darstellen. Dies, so wie was das System sonst charakterisirt, wird deutlicher hervortreten, wenn wir dasselbe bis zu den zweiten Erhöhungen und Erniedrigungen und deren Ergänzungen zur Octave entwickeln.

§ 58.

Wir erhalten dann nämlich folgende Tabelle:

---

*) Mit 10stelligen Logarithmen berechnet.

**) Für das System aus 53 Quinten ist diese Summe $= 0{,}0000038559$.

C	$= 0{,}00000$		c	$= 1{,}00000$
$\underline{H}^{\#}$	$= 0{,}01718 \left(\frac{2}{118}\right)$		d^{bb}	$= 0{,}98282 \left(\frac{116}{118}\right)$
E^{3b}	$= 0{,}05899 \left(\frac{7}{118}\right)$		$A^{\#\#}$	$= 0{,}94101 \left(\frac{111}{118}\right)$
D^{b}	$= 0{,}07617 \left(\frac{9}{118}\right)$		H	$= 0{,}92383 \left(\frac{109}{118}\right)$
$C^{\#}$	$= 0{,}09336 \left(\frac{11}{118}\right)$		c^{b}	$= 0{,}90664 \left(\frac{107}{118}\right)$
$\underline{H}^{\#\#\#}$	$= 0{,}11054 \left(\frac{13}{118}\right)$		d^{3b}	$= 0{,}88946 \left(\frac{105}{118}\right)$
E^{bb}	$= 0{,}15235 \left(\frac{18}{118}\right)$		$A^{\#}$	$= 0{,}84765 \left(\frac{100}{118}\right)$
D	$= 0{,}16953 \left(\frac{20}{118}\right)$		H^{b}	$= 0{,}83047 \left(\frac{98}{118}\right)$
$C^{\#\#\#}$	$= 0{,}18671 \left(\frac{22}{118}\right)$		c^{bb}	$= 0{,}81329 \left(\frac{96}{118}\right)$
F^{bb}	$= 0{,}22852 \left(\frac{27}{118}\right)$		$G^{\#\#\#}$	$= 0{,}77148 \left(\frac{91}{118}\right)$
E^{b}	$= 0{,}24570 \left(\frac{29}{118}\right)$		A	$= 0{,}75430 \left(\frac{89}{118}\right)$
$D^{\#}$	$= 0{,}26289 \left(\frac{31}{118}\right)$		H^{bb}	$= 0{,}73711 \left(\frac{87}{118}\right)$
F^{b}	$= 0{,}32188 \left(\frac{38}{118}\right)$		$G^{\#}$	$= 0{,}67812 \left(\frac{80}{118}\right)$
E	$= 0{,}33906 \left(\frac{40}{118}\right)$		A^{b}	$= 0{,}66094 \left(\frac{78}{118}\right)$
$D^{\#\#\#}$	$= 0{,}35624 \left(\frac{42}{118}\right)$		H^{3b}	$= 0{,}64376 \left(\frac{76}{118}\right)$
G^{bb}	$= 0{,}39805 \left(\frac{47}{118}\right)$		$F^{\#\#\#}$	$= 0{,}60195 \left(\frac{71}{118}\right)$
F	$= 0{,}41523 \left(\frac{49}{118}\right)$		G	$= 0{,}58477 \left(\frac{69}{118}\right)$
$E^{\#}$	$= 0{,}43242 \left(\frac{51}{118}\right)$		A^{bb}	$= 0{,}56758 \left(\frac{67}{118}\right)$
A^{3b}	$= 0{,}47423 \left(\frac{56}{118}\right)$		$E^{\#\#\#}$	$= 0{,}52577 \left(\frac{62}{118}\right)$
G^{b}	$= 0{,}49141 \left(\frac{58}{118}\right)$		$F^{\#}$	$= 0{,}50859 \left(\frac{60}{118}\right)$

Die Abweichungen von der Reinheit sind: für die Quinte $= 0{,}00019 = \frac{1}{894{,}3}$ g. T.; für die grosse Terz $= 0{,}01713 = \frac{1}{9{,}9}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}01733 = \frac{1}{9{,}8}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}00039 = \frac{1}{485{,}7}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}00039 = \frac{1}{435{,}7}$ g. T. Die Abweichungen von der mittleren Temperatur dagegen sind: für die Quinte $= 0{,}00133 = \frac{1}{127{,}7}$ g. T.; für die grosse Terz $= 0{,}00573 = \frac{1}{29{,}7}$ g. T.; für die kleine Terz $= 0{,}00430 = \frac{1}{39{,}5}$ g. T.; für die grosse Secunde $= 0{,}00286 = \frac{1}{59{,}4}$ g. T.; für die grosse Septime $= 0{,}00286 = \frac{1}{59{,}4}$ g. T.; sämmtlich unmerklich. Für $C^{\#}$ beträgt die Abweichung von der mittleren Temperatur $0{,}01003 = \frac{1}{16{,}9}$; für $D^{\#}$ … $0{,}01289 = \frac{1}{13{,}2}$ g. T.; für $F^{\#}$ … $0{,}00859 = \frac{1}{19{,}7}$ g. T.; für $G^{\#}$ … $0{,}01145 = \frac{1}{14{,}9}$ g. T. Auch

diese Abweichungen sind also fast unmerkbar. Sämmtliche einfach erniedrigte Töne aber liegen um 0,01719 $= \frac{1}{9,9}$ g. T. tiefer als ihre nächstbenachbarten erhöhten und fallen mit den gleichnamigen Tönen der Kirnbergerschen Temperatur noch genauer zusammen, als die Töne des Systems aus 53 Quinten, das wie man sieht, in jeder Hinsicht sich dem vorliegenden sehr nahe anschliesst. Die grössere Stufe des letzteren ist $\frac{20}{118}$, die kleinere $\frac{11}{118}$, also $\frac{11}{20}$ der grösseren. Die Stufenfolge der Durscala ist also hier

20, 20, 11, 20, 20, 20, 11.

Ohne zu behaupten, dass dieses System dasjenige sey, dem sich die Musik der Streichinstrumente am meisten näherte, da vielleicht der Unterschied zwischen $C^{\#}$ und D^{b} u. s. w. zu gering ist, besitzt es doch unter allen Systemen, die diese Töne in gehöriger enharmonischer Folge unterscheiden, die grösste theoretische Vollkommenheit, indem es in allen Tonarten neben den temperirten Scalen auch die reinen in der grösstmöglichen Annäherung darstellt.

I. ANHANG.

ÜBER DIE BESTMÖGLICHE AKUSTISCHE BESTIMMUNG DER ERHÖHTEN UND ERNIEDRIGTEN TÖNE.

---

1. Es ist oben (§ 26 ff.) ausführlich gezeigt worden, dass es unmöglich ist, für die einfach erhöhten und erniedrigten Töne solche Bestimmungen zu finden, durch welche sie, in Verbindung mit den akustisch reinen Haupttönen, für alle Tonarten reine Scalen geben. Man kann sich aber die Aufgabe stellen: bei festgehaltener Reinheit der Haupttöne ihre einfachen Erhöhungen und Erniedrigungen so zu bestimmen, dass jede Tonleiter, wie die reine, eine Stufenfolge darstellt, die aus drei grossen ganzen, zwei kleinen ganzen und zwei halben Tönen besteht, von denen die letzteren in der Durscala die 3te und 7te, in der (absteigenden) Mollscala die 2te und 5te Stelle einnehmen müssen.

Bei der Lösung dieser Aufgabe können wir, ohne der Schärfe der Resultate das Mindeste zu entziehen, vorläufig zur Abkürzung des Verfahrens, wie sich aus § 18 und § 53 ergiebt, das Intervall des grossen ganzen Tons mit dem Grundton $2q - 1 = 9$, das des kleinen ganzen Tons $1 - 2q + t = 8$, das des halben Tons $1 - q - t = 5$ setzen, wofern das Octavenintervall $= 53$ angenommen wird. Alsdann sind, wie wir sogleich erläutern werden, für die Tonarten der sieben Haupttöne nach den Bedingungen der Aufgabe nur folgende Stufenfolgen möglich.

I. In Dur.

C		*D*		*E*		*F*		*G*		*A*		*H*		*c*
	9		8		5		9		8		9		5	
G		*A*		*H*		*c*		*d*		*e*		*f♯*		*g*
	8		9		5		9		8		9		5	
D		*E*		*F♯*		*G*		*A*		*H*		*c♯*		*d*
	8		9		5		8		9		9		5	
A		*H*		*c♯*		*d*		*e*		*f♯*		*g♯*		*a*
	9		9		5		8		9		8		5	
E		*F♯*		*G♯*		*A*		*H*		*c♯*		*d♯*		*e*
	9		8		5		9		9		8		5	
H		*c♯*		*d♯*		*e*		*f♯*		*g♯*		*a♯*		*h*
	9		8		5		9		8		9		5	
F		*G*		*A*		*H♭*		*c*		*d*		*e*		*f*
	9		8		5		9		9		8		5	

II. In Moll.

A		*H*		*c*		*d*		*e*		*f*		*g*		*a*
	9		5		9		8		5		9		8	
E		*F♯*		*G*		*A*		*H*		*c*		*d*		*e*
	9		5		8		9		5		9		8	
H		*c♯*		*d*		*e*		*f♯*		*g*		*a*		*h*
	9		5		8		9		5		8		9	
D		*E*		*F*		*G*		*A*		*H♭*		*c*		*d*
	8		5		9		8		5		9		9	
G		*A*		*H♭*		*c*		*d*		*e♭*		*f*		*g*
	8		5		9		9		5		8		9	
C		*D*		*E♭*		*F*		*G*		*A♭*		*H♭*		*c*
	9		5		8		9		5		8		9	
F		*G*		*A♭*		*H♭*		*c*		*d♭*		*e♭*		*f*
	9		5		8		9		5		9		8	

Um die Richtigkeit dieser Bestimmungen einzusehen, ist nur nöthig zu bemerken, dass, da die Stellen der beiden halben Töne ein für allemal fixirt sind, es nur auf die Bestimmung der Stellen der drei grossen und kleinen ganzen Töne ankommt. Diese sind aber theils durch die Intervalle der reinen Haupttöne unmittelbar gegeben, theils ergeben sie sich successiv

ÜBER D[illegible]

[illegible] Stufen GA, AH, Hc, cd, [illegible]: die Stufe $F^{\#}G$ muss [illegible] Ton fällt. Da nun die [illegible] haben soll und die gege- [illegible] enthalten, so muss die [illegible] 9 seyn. In H-moll sind die [illegible] unmittelbar gegeben, die Stu- [illegible] Stufe $ef^{\#}$ ist, wie so eben [illegible] es muss daher, da die übrigen [illegible] halten, die Stufe $Hc^{\#}$ den dritten [illegible] Auf diese Weise kann man sich [illegible] der Haupttöne die Stufenfolge [illegible] vorstehenden tabellarischen Ueber-

[illegible] ergeben sich nun die Intervalle [illegible] erhöhten und erniedrigten Töne mit C. [illegible] abgekürzten Werthe 9, 8, 5 ihre wahren, [illegible] und ebenso für C; D, E, F, G, A, H ihre [illegible] $— 1, t, 1 — q\ q, 1 — q + t, q + t$, so erhält [illegible]:

[illegible] $- t)$, daher $F^{\#} = G — (1 — q — t) = 2q + t — 1$;
[illegible] $— t)$, daher $C^{\#} = D — (1 — q — t) = 3q + t — 2$;
[illegible] $— t)$, daher $G^{\#} = A — (1 — q — t) = 2t$;
[illegible] $— t)$, daher $D^{\#} = E — (1 — q — t) = q + 2t — 1$;
[illegible] $— t)$, daher $A^{\#} = H — (1 — q — t) = 2q + 2t — 1$.
[illegible] $— 1) = D + 1 — 2\,(2q — 1) = 2 — 2q$;
[illegible] $- 1) — (1 — 2q + t)$, daher $E^{b} = q — t$;
[illegible] $- 1) — (1 — 2q + t) = 1 — t$;
[illegible] $— 1) — (1 — 2q + t)$, daher $D^{b} = 1 — q — t$.

[illegible] zu bemerken, dass dieselben Bestimmungen [illegible], wenn man die andern von den angeführten [illegible] vorkommen, zum Grunde legt, so dass hier nicht, [illegible] von einander verschiedene Bestimmungen erhalten [illegible] in E-dur $F^{\#} = E + 2q — 1 = 2q + t — 1$, wie [illegible] $= c — (2q — 1) = 2 — 2q$, wie zuvor u. s. f.

[illegible] Weise findet man nun auch die Stufenfolgen für [illegible] Grundtöne die eben bestimmten erhöhten und er-

niedrigten Töne sind, und aus ihnen die Intervalle von $E^\#$ und $H^\#$, G^b, C^b und F^b mit C. Diese Stufenfolgen sind nämlich:

I. In Dur.

$F^\#$	8	$G^\#$	9	$A^\#$	5	H	9	$c^\#$	8	$d^\#$	9	$e^\#$	5	$f^\#$
$C^\#$	8	$D^\#$	9	$E^\#$	5	$F^\#$	8	$G^\#$	9	$A^\#$	9	$H^\#$	5	$c^\#$
H^b	9	c	9	d	5	e^b	8	f	9	g	8	a	5	h^b
E^b	8	F	9	G	5	A^b	8	H^b	9	c	9	d	5	e^b
A^b	8	H^b	9	c	5	d^b	9	e^b	8	f	9	g	5	a^b
D^b	9	E^b	8	F	5	G^b	9	A^b	8	H^b	9	c	5	d^b
G^b	9	A^b	8	H^b	5	c^b	9	d^b	9	e^b	8	f	5	g^b
C^b	9	D^b	9	E^b	5	F^b	8	G^b	9	A^b	8	H^b	5	c^b

II. In Moll.

$F^\#$	8	$G^\#$	5	A	9	H	9	$c^\#$	5	d	8	e	9	$f^\#$
$C^\#$	8	$D^\#$	5	E	9	$F^\#$	8	$G^\#$	5	A	9	H	9	$c^\#$
$G^\#$	9	$A^\#$	5	H	9	$c^\#$	8	$d^\#$	5	e	9	$f^\#$	8	$g^\#$
$D^\#$	9	$E^\#$	5	$F^\#$	8	$G^\#$	9	$A^\#$	5	H	9	$c^\#$	8	$d^\#$
$A^\#$	9	$H^\#$	5	$c^\#$	8	$d^\#$	9	$e^\#$	5	$f^\#$	8	$g^\#$	9	$a^\#$
H^b	9	c	5	d^b	9	e^b	8	f	5	g^b	9	a^b	8	h^b
E^b	8	F	5	G^b	9	A^b	8	H^b	5	c^b	9	d^b	9	e^b
A^b	8	H^b	5	c^b	9	d^b	9	e^b	5	f^b	8	g^b	9	a^b

Aus *Fis*-dur ergiebt sich nun $E^\# = F^\# - (1 - q - t) = 3q + 2t - 2$; aus *Cis*-dur $H^\# = c^\# - (1 - q - t) = 4q + 2t - 2$; aus *B*-moll $G^b = H^b - (2q - 1) - (1 - 2q + t) = 2 - 2q - t$; aus *Es*-moll $c^b = e^b - 2\,(2q - 1) = 3 - 3q - t$; endlich aus *As*-moll $F^b = A^b - (2q - 1) - (1 - 2q + t) = 1 - 2t$.

4. Setzen wir nun in sämmtlichen für die erhöhten und erniedrigten Töne gefundenen Ausdrücken die Zahlenwerthe von q und t ein und fügen die zugehörigen relativen Schwingungszahlen bei, so erhalten wir, wenn wir noch, zur Vervollständigung der Uebersicht, die bekannten Bestimmungen der Haupttöne wiederholen, folgende Tabelle, in der, wie früher, x die Grösse des Intervalls, y die der relativen Schwingungszahl bezeichnet.

	x	y
C	0,00000	$1 = 1 = 1,00000$
$C^{\#}$	0,07682	$\frac{3^3.5}{2^7} = \frac{135}{128} = 1,05461$
D^b	0,09311	$\frac{2^4}{3.5} = \frac{16}{15} = 1,06667$
D	0,16992	$\frac{3^2}{2^3} = \frac{9}{8} = 1,12500$
$D^{\#}$	0,22882	$\frac{3.5^2}{2^6} = \frac{75}{64} = 1,17188$
E^b	0,26303	$\frac{3.2}{5} = \frac{6}{5} = 1,20000$
E	0,32193	$\frac{5}{2^2} = \frac{5}{4} = 1,25000$
F^b	0,35614	$\frac{2^5}{5^2} = \frac{32}{25} = 1,28000$
$E^{\#}$	0,39875	$\frac{3^3.5^2}{2^9} = \frac{675}{512} = 1,35742$
F	0,41504	$\frac{2^2}{3} = \frac{4}{3} = 1,33333$
$F^{\#}$	0,49185	$\frac{3^2.5}{2^5} = \frac{45}{32} = 1,40625$
G^b	0,50815	$\frac{2^6}{3^2.5} = \frac{64}{45} = 1,42222$
G	0,58496	$\frac{3}{2} = \frac{3}{2} = 1,50000$
$G^{\#}$	0,64386	$\frac{5^2}{2^4} = \frac{25}{16} = 1,56250$
A^b	0,67807	$\frac{2^3}{5} = \frac{8}{5} = 1,60000$
A	0,73697	$\frac{5}{3} = \frac{5}{3} = 1,66667$
$A^{\#}$	0,81378	$\frac{3^2.5^2}{2^7} = \frac{225}{128} = 1,75781$
H^b	0,83008	$\frac{2^4}{3^2} = \frac{16}{9} = 1,77778$
H	0,90689	$\frac{3.5}{2^3} = \frac{15}{8} = 1,87500$
c^b	0,92318	$\frac{2^8}{3^3.5} = \frac{256}{135} = 1,89630$
$H^{\#}$	0,98371	$\frac{3^4.5^2}{2^{10}} = \frac{2025}{1024} = 1,97991$
c	1,00000	$2 = 2 = 2,00000$

Hiernach sind nun die Intervalle der nächstbenachbarten Töne $D^b - C^{\#}$, $F - E^{\#}$, $G^b - F^{\#}$, $H^b - A^{\#}$, $c^b - H$, $c - H^{\#}$ einander gleich und betragen 0,01629 des Octavenintervalls oder $\frac{1}{10,4}$ g. T., weniger

als das syntonische Komma. Hierzu gehört die rel. Schwingungszahl $\frac{2^{11}}{3^4 \cdot 5^2} = \frac{2048}{2025} = 1{,}01135$. Ebenso sind die Intervalle E^b — $D^\#$, F^b — E, A^b — $G^\#$ unter sich gleich und betragen 0,03421 O.i., nahe $= \frac{1}{5}$ g. T., die kleine Diesis, mit der rel. Schwingungszahl $\frac{2^7}{5^3} = \frac{128}{125} = 1{,}02400$.

5. Bildet man nun aus den in der vorstehenden Tabelle enthaltenen Werthen für alle Tonarten die Scalen, so geben diese für die Intervalle der ihnen zugehörigen Töne mit dem Grundton die in den folgenden beiden Tabellen enthaltenen Bestimmungen, die sich auf das Octavenintervall 1000 beziehen.

I. Dur.

Grundton	gr. Secunde	gr. Terz	Quarte	Quinte	gr. Sexte	gr. Septime
C	170	322	415	585	737	907
G	152	322	415	585	737	907
D	152	322	415	567	737	907
A	170	340	433	585	755	907
E	170	322	415	585	755	907
H	170	322	415	585	737	907
$F^\#$	152	322	415	585	737	907
$C^\#$	152	322	415	567	737	907
F	170	322	415	585	755	907
H^b	170	340	433	585	755	907
E^b	152	322	415	567	737	907
A^b	152	322	415	585	737	907
D^b	170	322	415	585	737	907
G^b	170	322	415	585	755	907
c^b	170	340	433	585	755	907

II. Moll.

Grundton	gr. Secunde	kl. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	kl. Septime
A	170	263	433	585	678	848
E	170	263	415	585	678	848
H	170	263	415	585	678	830
$F^\#$	152	245	415	585	678	830
$C^\#$	152	245	415	567	660	830
$G^\#$	170	263	433	585	678	848
$D^\#$	170	263	415	585	678	848
$A^\#$	170	263	415	585	678	830
D	152	245	415	567	660	830
G	152	245	415	585	678	830
C	170	263	415	585	678	830
F	170	263	415	585	678	848
H^b	170	263	433	585	678	848
E^b	152	245	415	567	660	830
A^b	152	245	415	585	678	830

6. Wie aus diesen Tabellen hervorgeht, geben die ihnen zum Grunde liegenden, in Nr. 4 angegebenen Werthe eine ungleichschwebende oder richtiger eine gemischte Temperatur, da immer mehrere Tonarten genau dieselben Intervallgrössen gemein haben; — wenn anders im eigentlichen Sinne von einer Temperatur die Rede seyn kann, wo die Haupttöne, für die allein sich absolute Werthbestimmungen geben lassen, vollkommen rein bleiben. Das Intervall der grossen Septime ist hier das einzige, das in allen Tonarten vollkommen rein bleibt, alle übrige scalenbildende Intervalle sind, je nach den Tonarten, bald rein, bald genau um ein syntonisches Komma zu gross oder zu klein. Es sind nämlich

I. die Durtonarten in

C, *H*, *D*^{b} völlig rein,
E, *F*, *G*^{b} unrein in der grossen Sexte,
G, *F*#, *A*^{b} unrein in der grossen Secunde,
D, *C*#, *E*^{b} unrein in der grossen Secunde und Quinte,
A, *H*^{b}, *c*^{b} unrein in der grossen Terz, Quarte und grossen Sexte;

II. die Molltonarten in

H, *A*#, *C* völlig rein,
E, *D*#, *F* unrein in der kleinen Septime,
G, *F*#, *A*^{b} unrein in der grossen Secunde und kleinen Terz,
A, *G*#, *H*^{b} unrein in der Quarte und kleinen Septime,
C#, *D*, *E*^{b} unrein in der grossen Secunde, kleinen Terz, Quinte und kleinen Sexte.

Stellen wir diesen Ergebnissen die in § 30 aus den gewöhnlichen akustischen Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne gezogenen Resultate gegenüber, so sind nach diesen

I. die Durtonarten in

C völlig rein,
A^b unrein in der grossen Secunde,
F unrein in der grossen Sexte,
A, *D*^{b} unrein in der Quarte,
E, *G*, *c*^{b} unrein in der grossen Secunde und grossen Septime,
F# unrein in der Quarte und grossen Septime,
E^b unrein in der grossen Secunde und Quinte,

C# unrein in der gr. Secunde, gr. Terz und gr. Septime,
H♭ unrein in der grossen Terz, Quarte und grossen Sexte,
D, *H*, *G*♭ unrein in der gr. Secunde, gr. Terz, Quinte und gr. Septime;

II. die Molltonarten in

C völlig rein,
F unrein in der kleinen Septime,
A unrein in der Quarte und kleinen Septime,
E, *C*#, *A*♭ unrein in der grossen Secunde und kleinen Septime,
H, *G*#, *E*♭ unrein in der grossen Secunde und Quinte,
G unrein in der grossen Secunde und kleinen Terz,
A# unrein in der gr. Secunde, Quinte und kl. Septime,*)
F#, *H*♭ unrein in der Quarte, kl. Sexte und kl. Septime,
D# unrein in der gr. Secunde, Quarte, kl. Sexte und kl. Septime,
D unrein in der gr. Secunde, kl. Terz, Quinte und kl. Sexte.

Offenbar fällt hier die Vergleichung zum Vortheil der in Nr. 4 gegebenen Bestimmungen aus. Denn nach diesen sind in Dur 3 Tonarten völlig rein, 6 nur in Einem Intervall unrein, 3 in zweien, 3 in dreien; in Moll sind 3 Tonarten völlig rein, 3 nur in Einem Intervall unrein, 6 in zweien, 3 in vieren. Dagegen ist nach den gewöhnlichen akustischen Bestimmungen in Dur nur Eine Tonart völlig rein, 4 sind unrein in nur Einem Intervall, 5 in zweien, 2 in dreien, 3 in vier Intervallen; in Moll ist Eine Tonart völlig rein, Eine unrein in nur Einem Intervall, 8 in zweien, 3 in dreien und 2 in vier Intervallen. Ueberdies aber betragen bei unsern Werthen die Abweichungen von der Reinheit stets nur ein syntonisches Komma $= \frac{1}{9,4}$ g. T., indess sie bei den herkömmlichen Bestimmungen bis auf $\frac{1}{6,8}$ g. T. steigen.

7. Untersuchen wir endlich noch die Formen, welche nach den gegebenen Bestimmungen der erhöhten und erniedrigten Töne den verschiedenen Tonarten in Bezug auf die Folge ihrer drei Stufen (die wir hierbei wieder durch die Zahlen 9, 8, 5 darstellen können) zukommen, so ergiebt sich aus Nr. 1 und 3 unmittelbar folgende Zusammenstellung der Stufenfolgen:

*) In Bezug auf *Ces*-dur und *Ais*-moll ist die nachträgliche Bemerkung S. 120 zu vergleichen.

I. Dur.

C, *H*, D^b	9, 8, 5, 9, 8, 9, 5;	(1)
E, *F*, G^b	9, 8, 5, 9, 9, 8, 5;	(2)
G, *F*#, A^b	8, 9, 5, 9, 8, 9, 5;	(3)
D, *C*#, E^b	8, 9, 5, 8, 9, 9, 5;	(4)
A, H^b, c^b	9, 9, 5, 8, 9, 8, 5.	(5)

II. Moll.

H, *C*, *A*#	9, 5, 8, 9, 5, 8, 9;	(6)
E, *F*, *D*#	9, 5, 8, 9, 5, 9, 8;	(7)
G, *F*#, A^b	8, 5, 9, 9, 5, 8, 9;	(8)
D, *C*#, E^b	8, 5, 9, 8, 5, 9, 9;	(9)
A, *G*#, H^b	9, 5, 9, 8, 5, 9, 8.	(10)

Der halbe Ton hat in allen Arten der beiden Tongeschlechter seine zwei unveränderlichen Stellen, so dass sich die Tonarten desselben Geschlechts nur durch die Ordnung, in welcher die drei grossen und zwei

kleinen ganzen Töne auf einander folgen, unterscheiden. Diese fünf Töne lassen im Allgemeinen 10 Versetzungen zu, nämlich:

1 8 8 9 9 9
2 8 9 8 9 9
3 8 9 9 8 9
4 8 9 9 9 8
5 9 8 8 9 9
6 9 8 9 8 9
7 9 8 9 9 8
8 9 9 8 8 9
9 9 9 8 9 8
10 9 9 9 8 8

Von diesen kommen in den 10 angegebenen Formen der 30 Tonarten nur folgende vor: die 2te in (4) und (9), die 3te in (3) und (8), die 6te in (1) und (6), die 7te in (2) und (7), die 9te in (5) und (10). Hieraus erhellt zugleich, dass die Dur-Tonarten (1), (2), (3), (4), (5) sich der Reihe nach von den Moll-Tonarten (6), (7), (8), (9), (10) nur durch die Stellung der halben Töne unterscheiden. Ferner ist zu bemerken, dass die Ordnung der ganzen Töne in (3) und (8) die umgekehrte von der in (2) und (7), eben so die Ordnung derselben in (5) und (10) die umgekehrte von der in (4) und (9) ist, die Ordnung der ganzen Töne in (1) und (6) aber sich durch die Umkehrung nicht ändert. Alle zur Anwendung kommende Stufenfolgen haben hinsichtlich der ganzen Töne das mit einander gemein, dass die zwei kleinen in keiner derselben unmittelbar auf einander folgen. Das gemeinsame der ausgeschlossenen Stufenfolgen besteht aber darin, dass entweder die beiden kleinen oder die drei grossen sich unmittelbar an einander reihen. Die Ausschliessung dieser Stufenfolgen ist übrigens dadurch bedingt, dass die reine Scala weder drei auf einander folgende grosse, noch zwei auf einander folgende kleine Töne hat.

8. Das Princip, aus welchem diese Resultate hervorgehen, ist so einfach und rational, dass es sich in theoretischer Hinsicht von selbst empfiehlt, und das dadurch erhaltene System von Tonbestimmungen kann als das vollkommenste angesehen werden, das aus untemperirten Haupttönen möglich ist. Dass die völlige Reinheit von sechs Tonarten auf Kosten der übrigen erlangt wird, liegt in der Natur der Sache und kann

nicht zum Tadel gereichen. Man könnte sich vielmehr versucht finden, in dieser Unreinheit den Schlüssel zur Erklärung des verschiedenen Charakters der Tonarten zu suchen, die sich bei gleichschwebender Temperatur nicht durch ihren Bau, sondern nur durch die höhere oder tiefere Lage aller Tonverhältnisse unterscheiden,*) und somit das System dieser Tonbestimmungen als die Norm anzusehen, der sich das Spiel der Streichinstrumente, wenn sie nicht mit temperirten Instrumenten zusammenwirken, möglichst anzunähern habe oder vielleicht wirklich annähere. Diese Ansicht würde sogar durch das, was Delezenne, wie im Eingange zur vorstehenden Abhandlung bemerkt wurde, aus seinen Versuchen schliessen zu dürfen glaubt, wesentlich unterstützt werden. Indess steht auch hier mindestens der Einwand entgegen, dass nach den Bestimmungen von Nr. 4 jeder erhöhte Ton tiefer liegt als der erniedrigte des nächsthöheren Hauptons, also diese Töne nicht diejenige Lage haben, welche bei den Modulationen durch enharmonische Verwechselung nach § 50 nothwendig scheint. Entweder also werden sie nach Umständen bald in dieser bald in jener Lage gespielt, und dann lässt sich über ihre Lage etwas Allgemeines nicht angeben, oder sie haben eine feste Lage, und dann gilt auch für die Streichinstrumente eine gleichschwebende Temperatur. Selbst aber wenn ihre Lage veränderlich wäre, würden die in § 46 bis 49 dargestellten Temperaturen eine gleichmässigere Reinheit aller Tonarten bewirken, als es die vorstehenden Bestimmungen vermögen. Theoretisch genommen wäre zwar diese Reinheit nur eine genäherte, aber für das Ohr (vorzüglich die in § 49) so gut als vollkommen und jedenfalls vollkommener als sie der beste Spieler im Fluge des Vortrags mit Sicherheit hervorzubringen vermag.

*) Hierbei verdient bemerkt zu werden, dass die Gleichsetzung der in Nr. 2 und 3 gefundenen Ausdrücke für $D\sharp$ und E^b, $G\sharp$ und A^b, ... $t = \frac{1}{3}$, die von $C\sharp$ und D^b, $E\sharp$ und F, $F\sharp$ und G^b u. s. f. $4q = 3 - t$ giebt, woraus, wenn $t = \frac{1}{3}$, $q = \frac{7}{12}$ folgt, die Zusammenziehung der erhöhten und erniedrigten Töne also auch hier auf die mittlere gleichschwebende Temperatur führt.

II. ANHANG.

ÜBER DIE NEWTON'SCHE ANALOGIE ZWISCHEN FARBEN- UND TONVERHÄLTNISSEN.

1. Newton glaubte durch Versuche gefunden zu haben,*) dass, wenn man die Länge des Rechteckes, welches das Farbenspectrum nach Abrechnung seiner gerundeten Enden darstellt, verdoppelt und die Abstände der äusseren Grenze des Violett, der Grenzen zwischen Violett und Indigo, Indigo und Blau, Blau und Grün, Grün und Gelb, Gelb und Orange, Orange und Roth, endlich der äusseren Grenze des Roth von dem Endpunkt der jene verdoppelte Länge darstellenden Geraden misst, diese sich verhalten wie die Zahlen

$$1,\ \frac{8}{9},\ \frac{5}{6},\ \frac{3}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{5},\ \frac{9}{16},\ \frac{1}{2},$$

d. i. resp. wie die Saitenlängen der Prime, grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, kleinen Septime und Octave.**) Da sich die Saitenlängen umgekehrt wie die relativen Schwingungszahlen der Töne verhalten, so kann man auch sagen, dass jene Abstände resp. den relativen Schwingungszahlen der Octave, kleinen Septime, grossen Sexte, Quinte, Quarte, kleinen Terz, grossen Secunde, Prime, nämlich den Zahlen

$$2,\ \frac{16}{9},\ \frac{5}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{6}{5},\ \frac{9}{8},\ 1$$

proportional sind.

---

*) *Optic. Lib. II. P. II. Prop. III. Exper. VII.*

**) Man findet nicht selten die Angabe, Newton habe zwischen den Dimensionen der prismatischen Farben im Spectrum und den Tönen der diatonischen Scala eine Analogie finden wollen. Dieser Ausdruck ist nicht genau, denn die obige Folge stellt weder die Dur- noch die Mollscala dar.

Gegen diese Analogie zwischen den prismatischen Farben und den bezeichneten Tönen (die weder die Dur- noch die Mollscala vollständig geben, da grosse Terz, kleine Sexte und grosse Septime fehlen) ist mit Grund eingewendet worden, dass sie schon deshalb nicht als allgemeines Naturgesetz gelten könne, weil die verhältnissmässige Grösse der Theile des prismatischen Farbenbildes von dem eigenthümlichen Zerstreuungsvermögen der Substanz des angewendeten Prisma's abhängig sey, die Dimensionsverhältnisse des Spectrum sich daher gar nicht im Allgemeinen bestimmen lassen. Gleichwohl wird zugestanden, dass mehrere Anwendungen, die Newton von dieser Analogie macht (indem er z. B. daraus eine Regel ableitet, nach welcher, wenn zwei prismatische Farben nach Qualität und Quantität gegeben sind, die Qualität ihrer Mischungsfarbe bestimmt werden kann,*) desgleichen sie seiner Erklärung der farbigen Ringe zum Grunde legt,**)) mit der Erfahrung übereinstimmende Resultate geben. Wie gegründet daher auch jener Einwand ist, so scheint doch die gedachte Analogie mehr zu seyn als ein blosses Spiel der Phantasie, die den nüchternen Newton wohl eben so selten als den poetischen Kepler häufig täuschte.

2. Gerade diejenige Theorie des Lichtes, welche über die Newton'sche endlich den Sieg davon getragen hat, die Undulationstheorie, bringt Farben und Töne in eine nähere Beziehung zu einander, indem sie für jene ähnliche Ursachen nachweist wie für diese. Man kann daher die Bestimmungen der Undulationstheorie über die Vibrationszahlen der Lichtwellen, welche den sieben prismatischen Farben entsprechen, benutzen, um ganz einfach und ohne alle vorgefasste Meinung zu prüfen, ob zwischen denselben ähnliche Verhältnisse statt finden wie zwischen den von Newton angegebenen Tönen.

Cauchy giebt***) folgende Tafel der Vibrationszahlen der prismatischen Farben, die sich auf Fresnel's Messungen der lichten Streifen im Farbenbilde gründet, und in der die Zahlen Billionen bezeichnen und sich auf die Sexagesimalsecunde beziehen:

---

*) *Lib. I. Pars II. Prop. VI.*

**) *Lib. II. Pars I. Obs. XIV. Pars IV. Obs. VIII.*

***) *Sur la dispersion de la lumière, Prag,* 1836, *p.* 198.

Grenzen der Hauptfarben	
äusserstes Violett	764
Violett — Indigo	707
Indigo — Blau	676
Blau — Grün	630
Grün — Gelb	583
Gelb — Orange	543
Orange — Roth	520
äusserstes Roth	481

Hauptfarben	
Violett	735
Indigo	691
Blau	653
Grün	607
Gelb	563
Orange	532
Roth	500

Nach Herschel's Angabe sind diese Vibrationszahlen, in derselben Weise angeordnet, folgende:*)

Grenzen der Hauptfarben	
äusserstes Violett	727
Violett — Indigo	672
Indigo — Blau	644
Blau — Grün	600
Grün — Gelb	555
Gelb — Orange	517
Orange — Roth	495
äusserstes Roth	458

Hauptfarben	
Violett	699
Indigo	658
Blau	622
Grün	577
Gelb	535
Orange	506
Roth	477

*) Vom Licht, übers. von E. Schmidt, Stuttgart, 1828. S. 307. Diese Angaben scheinen auf der Abmessung der Halbmesser der Farbenringe zu beruhen (vgl. Brandes in Gehler's n. phys. Wörterbuch, Bd. 6. S. 348). Cauchy bemerkt a. a. O. nur, dass der Herschelschen Tafel grössere Bestimmungen der Länge der Lichtwellen zum Grunde liegen.

3. Bei der Prüfung der Newton'schen Analogie kommt es nun blos auf die Vergleichung der Vibrationszahlen an, die den Grenzen der Hauptfarben zukommen, da sie sich nur auf die zwischen diesen liegenden Intervalle bezieht. Dass nun die Vibrationszahl 764 (oder 727) nicht das Doppelte von 481 (458), die Zahl 630 (600) nicht das halbe Dreifache von 481 (458) ist u. s. f. und also in diesem Sinne nicht das äusserste Violett die Octave, die Uebergangsfarbe vom Blau zum Grün nicht die Quinte des äussersten Roth u. s. w. genannt werden kann, leuchtet von selbst ein. Anders stellt sich jedoch die Lage der Sache aus folgendem Gesichtspunkte dar. Sehen wir die Formel $y = 2^x$, welche den Zusammenhang der relativen Schwingungszahl y eines Tons in Bezug auf den Grundton mit dem Intervall x zwischen beiden Tönen darstellt, als besondern Fall der allgemeineren $u = a^x$ an, und setzen für die Farben, je nachdem wir die Fresnelsche oder Herschelsche Tabelle zum Grunde legen, $a = \frac{764}{481}$ oder $a = \frac{727}{458}$, so wird im ersten Falle

$$u = \left(\frac{764}{481}\right)^x, \text{ folglich } x = \frac{\log u}{\log 764 - \log 481};$$

im zweiten

$$u = \left(\frac{727}{458}\right)^x, \text{ folglich } x = \frac{\log u}{\log 727 - \log 458}.$$

Setzt man nun in der ersten von diesen beiden Formeln successiv $481 . u = 764, 707, 676, \ldots . 481$, in der zweiten $458 . u = 727, 672, 644, \ldots . 458$, so ergeben sich für x die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werthe

$481 . u$	x	$458 . u$	x
764	1,00000	727	1,00000
707	0,83242	672	0,82974
676	0,73552	644	0,73764
630	0,58321	600	0,58447
583	0,41565	555	0,41575
543	0,26203	517	0,26225
520	0,16849	495	0,16824
481	0,00000	458	0,00000

Vergleicht man diese Werthe von x mit den Intervallen der kleinen Septime = 0,83006, der grossen Sexte = 0,73696, der Quinte = 0,58496, der Quarte = 0,41504, der kleinen Terz = 0,26303,

der grossen Secunde $= 0{,}16992$, so zeigt sich eine Uebereinstimmung, die zumal bei den aus der Herschelschen Tafel abgeleiteten Werthen wahrhaft überraschend, aber auch bei den aus der Fresnelschen Tafel folgenden viel zu gross ist, als dass sie für zufällig gehalten werden könnte.

4. Wir wollen jedoch untersuchen, welche Aenderungen die Vibrationszahlen beider Tabellen erleiden müssten, wenn die ihnen zugehörigen Werthe von x mit den genannten musikalischen Intervallen vollkommen übereinstimmen sollten.

Bezeichnen wir diese Intervalle, in umgekehrter Ordnung genommen, durch

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,$$

so dass also x_1 das der grossen Secunde, x_2 das der kleinen Terz in Bezug auf den Grundton zukommende Intervall ist u. s. w., wobei das Intervall der Octave selbstverständlich $= 1$ angenommen wird; seyen ferner

$$v,\ v_1,\ v_2,\ v_3,\ v_4,\ v_5,\ v_6,\ v_7,$$

die diesen Intervallen resp. einschliesslich der Prime und Octave zukommenden Vibrationszahlen; seyen endlich die gegebenen Vibrationszahlen, nach ihrer Grösse aufsteigend geordnet,

$$b,\ b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4,\ b_5,\ b_6,\ b_7,$$

so ist, wenn zur Abkürzung $\frac{b_7}{b} = a$ gesetzt wird,

$$v_1 = va^{x_1},\ v_2 = va^{x_2},\ v_3 = va^{x_3},\ v_4 = va^{x_4},\ v_5 = va^{x_5},\ v_6 = va^{x_6},\ v_7 = va. \quad \text{(A)}$$

Nehmen wir nun a als constant, v aber als variabel an, so kann letzteres so bestimmt werden, dass die Summe

$$(b - v)^2 + (b_1 - va^{x_1})^2 + (b_2 - va^{x_2})^2 + \ldots\ldots + (b_6 - va^{x_6})^2 + (b_7 - va)^2$$

ein *Minimum* wird. Setzen wir nämlich den Differentialquotienten dieser Summe nach v gleich Null, so wird

$$v = \frac{b + b_1 a^{x_1} + b_2 a^{x_2} + \ldots\ldots + b_6 a^{x_6} + b_7 a}{1 + a^{2x_1} + a^{2x_2} + \ldots\ldots + a^{2x_6} + a^2}. \quad \text{(B)}$$

Da nun nach Fresnel $b = 481$, $b_1 = 520$, $b_2 = 543$, ... $b_7 = 764$, nach Herschel aber $b = 458$, $b_1 = 495$, $b_2 = 517$, ... $b_7 = 627$ ist, so giebt die vorstehende Formel für die erstere Zahlenreihe $v = 480{,}96$, für die zweite $v = 457{,}97$. Hieraus ergeben sich nun weiter nach den Formeln unter (A) die folgenden Werthe von v_1, v_2 u. s. w., denen wir ihre Abweichungen von b_1, b_2 u. s. w. beifügen.

$v = 480,96$; $b - v = 0,04$	$v = 457,97$; $b - v = 0,03$
$v_1 = 520,30$; $b_1 - v_1 = -0,30$	$v_1 = 495,37$; $b_1 - v_1 = -0,37$
$v_2 = 543,20$; $b_2 - v_2 = -0,20$	$v_2 = 517,16$; $b_2 - v_2 = -0,16$
$v_3 = 582,78$; $b_3 - v_3 = 0,22$	$v_3 = 554,78$; $b_3 - v_3 = 0,22$
$v_4 = 630,45$; $b_4 - v_4 = -0,45$	$v_4 = 600,09$; $b_4 - v_4 = -0,09$
$v_5 = 676,39$; $b_5 - v_5 = -0,39$	$v_5 = 643,75$; $b_5 - v_5 = 0,25$
$v_6 = 706,16$; $b_6 - v_6 = 0,84$	$v_6 = 672,05$; $b_6 - v_6 = -0,05$
$v_7 = 763,93$; $b_7 - v_7 = 0,17$	$v_7 = 726,95$; $b_7 - v_7 = -0,09$

Mit Ausnahme von v_6 in der ersten dieser beiden Tafeln, das von b_6 fast um eine ganze Vibration abweicht, betragen die Differenzen aller übrigen Werthe höchstens etwas über ein Drittel einer Vibration.

5. Die Uebereinstimmung der nach Fresnel's Vibrationszahlen berechneten Werthe wird noch grösser, wenn man bemerkt, dass diese Zahlen abgerundet sind, sich aber aus den Fresnelschen Bestimmungen der Wellenlängen leicht genauer angeben lassen. Da nämlich, wenn v' die Vibrationszahl, l' die Wellenlänge, Ω die Geschwindigkeit des Lichts bedeutet, $v' = \frac{\Omega}{l'}$ ist, so ergeben sich aus den in Millionteln des Meters ausgedrückten Wellenlängen*) $l, l_1, l_2, \ldots l_7$, wenn nach Cauchy $\log \Omega = 8,4916103$ angenommen wird, folgende genauere Bestimmungen der Vibrationszahlen:

$$
\begin{aligned}
l &= 645; & b &= 480,8953\\
l_1 &= 596; & b_1 &= 520,4320\\
l_2 &= 571; & b_2 &= 543,2180\\
l_3 &= 532; & b_3 &= 583,0404\\
l_4 &= 492; & b_4 &= 630,4420\\
l_5 &= 459; & b_5 &= 675,7680\\
l_6 &= 439; & b_6 &= 706,5546\\
l_7 &= 406; & b_7 &= 763,9840.
\end{aligned}
$$

*) Bei Cauchy p. 197.

Aus diesen Werthen von b, b_1, b_2 u. s. w. erhält man nun nach (B) und (A):

$$v = 480,9065; \quad b - v = -0,0112$$
$$v_1 = 520,2597; \quad b_1 - v_1 = 0,1723$$
$$v_2 = 543,1735; \quad b_2 - v_2 = 0,0445$$
$$v_3 = 582,7707; \quad b_3 - v_3 = 0,2697$$
$$v_4 = 630,4599; \quad b_4 - v_4 = -0,0179$$
$$v_5 = 676,4170; \quad b_5 - v_5 = -0,6490$$
$$v_6 = 706,2048; \quad b_6 - v_6 = 0,3498$$
$$v_7 = 764,0017; \quad b_7 - v_7 = -0,0177.$$

Die grösste Abweichung beträgt also hier (für v_5) noch nicht ein Drittel einer Vibration. Berechnet man endlich nach der Formel $l' = \frac{\Omega}{v}$ die zu den vorstehenden Werthen von v_1, v_2, v_3 u. s. w. zugehörigen Wellenlängen, die wir durch λ, λ_1, λ_2 u. s. w. bezeichnen wollen, so erhält man folgende Zahlen nebst den beigefügten Abweichungen von l, l_1, l_2 u. s. w.

$$\lambda = 644,9850; \quad l - \lambda = 0,0150$$
$$\lambda_1 = 596,0974; \quad l_1 - \lambda_1 = -0,0974$$
$$\lambda_2 = 571,0468; \quad l_2 - \lambda_2 = -0,0468$$
$$\lambda_3 = 532,2462; \quad l_3 - \lambda_3 = -0,2462$$
$$\lambda_4 = 491,9862; \quad l_4 - \lambda_4 = 0,0138$$
$$\lambda_5 = 458,5595; \quad l_5 - \lambda_5 = 0,4405$$
$$\lambda_6 = 439,2175; \quad l_6 - \lambda_6 = -0,2175$$
$$\lambda_7 = 405,9906; \quad l_7 - \lambda_7 = 0,0094.$$

Die grösste Differenz der Wellenlänge erreicht also noch nicht ein halbes Milliontel eines Millimeters. Für die Herschelsche Tafel, die ohnedies kleinere Abweichungen giebt, müssen wir auf die genauere Berechnung verzichten, da hier der Werth von Ω nicht scharf angegeben ist. Es erhellt aber schon völlig genügend, welche geringe Aenderungen in den Angaben Fresnel's sowohl als Herschels erforderlich sind, um sie mit den nach der Newton'schen Analogie berechneten Zahlen in vollkommene Uebereinstimmung zu bringen. Wenn daher auch diese Analogie durch die Hinweisung auf die Dimensionen der Theile des Spectrums nicht hinlänglich begründet war, so erhält sie doch durch Vergleichung der Vibrationsmengen der den Farbengrenzen zugehörigen Strahlen vollständige Bestätigung, so dass wenn diesen Zahlen selbst nur in ihren

Verhältnissen absolute Gültigkeit zukommt, auch Newton's Analogie ohne alle Beschränkung gilt. Da die Zahl $a = \frac{b_7}{b}$ bei Fresnel und Herschel dem rationalen Bruch $\frac{27}{17}$ nahe kommt, so kann man die Newton'sche Analogie jetzt so ausdrücken: die relativen Vibrationszahlen der den Grenzen der prismatischen Farben zugehörigen Strahlen in Bezug auf die Vibrationszahl des äussersten Roth sind Potenzen von $\frac{27}{17}$, welche dieselben Exponenten wie diejenigen Potenzen von 2 haben, welche die relativen Schwingungszahlen der reinen Töne *D*, *Es*, *F*, *G*, *A*, *B*, *c* in Bezug auf den Grundton *C* ausdrücken.*) Diese Exponenten können daher Farbenintervalle genannt werden.

6. Es führt jedoch diese Analogie auf eine noch viel einfachere merkwürdige Beziehung zwischen den Vibrationen der farbigen Strahlen und den Schwingungen der genannten Töne. Wenn nämlich für die Töne $y = 2^x$ und für die Farben $u = a^x$ ist, so folgt hieraus

$$\log u = \frac{\log a}{\log 2} . \log y;$$

und ferner, wenn wir zur Abkürzung $\frac{\log a}{\log 2} = m$ setzen,

$$u = y^m.$$

Nun ist aber $a = \frac{b_7}{b} = \frac{l}{l_7}$, wo l und l_7, wie zuvor, die Wellenlängen für das äusserste Roth und Violett bedeuten. Da nun nach Fresnel's Angabe in Millionteln des Millimeters $l = 645$, $l_1 = 406$, nach Herschel aber in Zehnmillionteln des englischen Zolls $l = 266$, $l_1 = 167$ ist, so wird zufolge der ersteren Zahlen $m = \frac{\log a}{\log 2} = \frac{0,2010337}{0,3010300}$, zufolge der letzteren $m = \frac{\log a}{\log 2} = \frac{0,2021651}{0,3010300}$. Beide Werthe sind, der erstere genauer als der zweite, nahe $= \frac{2}{3}$; daher näherungsweise $u = y^{\frac{2}{3}}$. Setzt man daher für y die relativen Schwingungszahlen der grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte u. s. w., so folgt für die absoluten Vibrationszahlen v_1, v_2 u. s. w.

$$\text{(C)} \quad \begin{cases} v_1 = b\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_2 = b\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_3 = b\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_4 = b\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}, \\ v_5 = b\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_6 = b\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad v_7 = b \,.\, 2^{\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

---

*) Oder auch der Töne *E*, *F*, *G*, *A*, *H*, *c*, *d* in Bezug auf den Grundton *D*. Es sey mir verstattet zu bemerken, dass ich auf diese Bestätigung der Newton'schen Analogie durch die Verhältnisse der Vibrationszahlen schon i. J. 1845 bei den Vorstudien zu der oben angeführten Abhandlung über die musikalischen Intervalle gekommen bin.

Um nun zu prüfen, wie genau diese Ausdrücke die Vibrationszahlen darstellen, setzen wir zuerst nach Fresnel $v = b = 480{,}8953$, $b_1 = 520{,}43$, $b_2 = 543{,}22$ u. s. w. Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned}
v_1 &= 520{,}18\,; & b_1 - v_1 &= 0{,}25\\
v_2 &= 543{,}01\,; & b_2 - v_2 &= 0{,}21\\
v_3 &= 582{,}56\,; & b_3 - v_3 &= 0{,}44\\
v_4 &= 630{,}15\,; & b_4 - v_4 &= 0{,}29\\
v_5 &= 676{,}00\,; & b_5 - b_5 &= -0{,}23\\
v_6 &= 705{,}73\,; & b_6 - v_6 &= 0{,}82\\
v_7 &= 763{,}36\,; & b_7 - v_7 &= 0{,}62.
\end{aligned}$$

Setzen wir nach Herschel $v = b = 458$, $b_1 = 495$, $b_2 = 517$ u. s. w., so kommt

$$\begin{aligned}
v_1 &= 495{,}41\,; & b_1 - v_1 &= -0{,}41\\
v_2 &= 517{,}15\,; & b_2 - v_2 &= -0{,}15\\
v_3 &= 554{,}83\,; & b_3 - v_3 &= 0{,}17\\
v_4 &= 600{,}15\,; & b_4 - v_4 &= -0{,}15\\
v_5 &= 643{,}82\,; & b_5 - v_5 &= 0{,}18\\
v_6 &= 672{,}13\,; & b_6 - v_6 &= -0{,}13\\
v_7 &= 727{,}03\,; & b_7 - v_7 &= -0{,}03.
\end{aligned}$$

7. Obwohl nun hieraus hervorgeht, dass die aus der Relation $u = y^{\frac{2}{3}}$ folgenden Werthe der Vibrationszahlen mit den gegebenen nahe übereinstimmen, so wollen wir doch noch untersuchen, welche Aenderungen der gegebenen Vibrationszahlen erforderlich sind, wenn die nach jener Relation berechneten mit ihnen möglichst nahe zusammentreffen sollen.

Man findet leicht auf dieselbe Weise, welche zu der Formel (B) geführt hat, dass die Quadratsumme der Unterschiede der berechneten Werthe v, v_1, v_2, ... von den gegebenen b, b_1, b_2 .... ein Minimum wird, wenn

$$v \doteq \frac{b + b_1\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}} + b_2\left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}} + \ldots\ldots + b_6\left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{2}{3}} + b_7\, 2^{\frac{2}{3}}}{1 + \left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{4}{3}} + \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{4}{3}} + \ldots\ldots + \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{4}{3}} + 2^{\frac{4}{3}}}. \tag{D}$$

Setzen wir in dieser Formel zuerst die genaueren Fresnelschen Werthe $b = 480{,}8953$, $b_1 = 520{,}4320$ u. s. w. ein, so erhalten wir aus ihr und den Formeln unter (C)

$v = 481,1424; \quad b - v = - 0,2471$
$v_1 = 520,4456; \quad b_1 - v_1 = - 0,0136$
$v_2 = 543,3269; \quad b_2 - v_2 = - 0,1089$
$v_3 = 582,8624; \quad b_3 - v_3 = - 0,1780$
$v_4 = 630,4750; \quad b_4 - v_4 = - 0,0330$
$v_5 = 676,3520; \quad b_5 - v_5 = - 0,5840$
$v_6 = 706,0878; \quad b_6 - v_6 = - 0,4668$
$v_7 = 763,7662; \quad b_7 - v_7 = 0,2178.$

Die Herschelschen Werthe $b = 458$, $b_1 = 495$ u. s. w. geben

$v = 457,9525; \quad b - v = - 0,0475$
$v_1 = 495,3695; \quad b_1 - v_1 = - 0,3695$
$v_2 = 517,1400; \quad b_2 - v_2 = - 0,1400$
$v_3 = 554,7700; \quad b_3 - v_3 = 0,2300$
$v_4 = 600,0875; \quad b_4 - v_4 = - 0,0875$
$v_5 = 643,7536; \quad b_5 - v_5 = 0,2464$
$v_6 = 672,0560; \quad b_6 - v_6 = - 0,0560$
$v_7 = 726,9545; \quad b_7 - v_7 = - 0,0455.$

8. Diese Resultate zeigen nun, dass die Gleichung $u = y^{\frac{2}{3}}$ in vollkommen befriedigender Weise sowohl mit den Fresnelschen als mit den Herschelschen Bestimmungen der absoluten Vibrationszahlen der den Farbengrenzen zugehörigen Strahlen übereinstimmt. Beide Werthreihen geben $a = \frac{v_7}{v} = 1,587401 = 2^{\frac{2}{3}}$, wie es seyn muss. Wir können daher jetzt folgenden Satz als begründet ansehen:

Die Cubi der relativen Schwingungszahlen der Strahlen, welche dem äussersten Roth, den Grenzen von Roth und Orange, Orange und Gelb, Gelb und Grün, Grün und Blau, Blau und Indigo, Indigo und Violett, endlich dem äussersten Violett zugehören, sind gleich den Quadraten der relativen Schwingungszahlen der reinen Prime, grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, kleinen Septime und Octave; oder, was dasselbe sagt: die Cubi der absoluten Schwingungszahlen der bezeichneten Farbenstrahlen sind den Quadraten der absoluten Schwingungszahlen der genannten Töne proportional.

Da die Längen der Lichtwellen den Vibrationszahlen und eben so die Längen der Tonwellen ihren Schwingungszahlen umgekehrt propor-

tional sind, so folgt auch, dass die Cubi der Wellenlängen der Farbengrenzen den Quadraten der Wellenlängen der vorgenannten Töne oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Saitenlängen direct proportional seyn müssen.

Wenn nun Newton*) aus seinen Messungen berechnet, dass die Dicken der Luftschichten zwischen den die Farbenringe zeigenden Gläsern für die acht Grenzen der Farben den Cubikwurzeln aus den Quadraten der Saitenlängen der Töne *C*, *D*, *Es*, *F*, *G*, *A*, *B*, *c* proportional sind, so bedeutet dies nichts Andres, als dass sie sich direct verhalten wie die Wellenlängen der diesen Stellen entsprechenden Farbenstrahlen, was vollkommen der Wahrheit gemäss ist.**)

Wie die relativen Schwingungszahlen der Töne durch die Gleichung $y = 2^x$, so werden also die relativen Schwingungszahlen der Strahlen der Farbengrenzen durch die fast eben so einfache Gleichung

$$u = 2^{\frac{2}{3}x}$$

dargestellt. Da nun die relativen Schwingungszahlen der grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte, kleinen Septime, Octave der Reihe nach $\frac{9}{8}$, $\frac{6}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{16}{9}$, 2 sind, so sind die relativen Schwingungszahlen der den Farbengrenzen zugehörigen Strahlen der Reihe nach

$$\left(\frac{9}{8}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{6}{5}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{8}{5}\right)^{\frac{2}{3}},\ \left(\frac{16}{9}\right)^{\frac{2}{3}},\ 2^{\frac{2}{3}},$$

also sämmtlich irrational, so dass also hier nicht die relativen Schwingungszahlen selbst, sondern nur ihre dritten Potenzen in rationalen Verhältnissen stehen, nämlich in den quadratischen Verhältnissen, welche einfach genommen für die den Farben entsprechende Tonfolge gelten.

9. Da die Farben eben so stetig in einander übergehen wie die Töne, so gilt die Gleichung $u = 2^{\frac{2}{3}x}$ auch für die zwischen den Farbengrenzen liegenden Farben selbst. Die dritte Potenz der relativen Schwingungszahl jeder Farbe, deren Intervall in Bezug auf die äussere Grenze des Roth $= x$, ist also gleich dem Quadrat der relativen Schwingungszahl desjenigen Tons, der um dasselbe Intervall höher liegt als der an-

---

*) *Opt. Lib. II. Pars I. Obs. XIV.*

**) Vgl. Herschel, vom Licht, § 644. Es lag hier ausserordentlich nahe, den Schluss zu ziehen, der den obigen Satz giebt; es scheint fast, als habe man eben keine Analogie haben wollen.

genommene Grundton. Dieselbe Formel drückt aber auch aus, dass die relative Schwingungszahl einer Farbe, deren Intervall in Bezug auf die äussere Grenze des Roth $= x$, gleich ist der relativen Schwingungszahl des Tons, der mit dem Grundton das Intervall $\frac{2}{3}x$ bildet. Daher ist die relative Schwingungszahl der äussern Grenze des Violett gleich der relativen Schwingungszahl des Tons, dessen Intervall mit dem Grundton $= \frac{2}{3}$ des Octavenintervalls ist, was genau der gewöhnlichen gleichschwebend temperirten kleinen Sexte entspricht.

Diejenigen Farben, welche Fresnel als »Hauptfarben«, Herschel als »mittlere« Farben aufführt, haben, wie man leicht bemerkt, Vibrationszahlen, welche die arithmetischen Mittel zwischen denen der sie einschliessenden Grenzfarben sind, die hier sehr nahe mit den geometrischen Mitteln zusammenfallen. Gehen wir nun von dem so bestimmten Roth aus und nennen seine Vibrationszahl b, so ist die Vibrationszahl einer Farbe, deren Intervall mit diesem Roth $= x$, welche v' heissen mag, bestimmt durch die Gleichung $v' = b \,.\, 2^{\frac{2}{3}x}$. Geben wir nun x successiv die der grossen Secunde, kleinen Terz, Quarte, Quinte, grossen Sexte und kleinen Septime entsprechenden Intervallwerthe und bezeichnen die zugehörigen Werthe von v' durch v'_1, v'_2, ... v'_6, so ergeben sich, mit Hinzufügung des zu $x = 0$ gehörigen Werthes $v' = b$, je nachdem wir mit Fresnel $b = 500$ oder mit Herschel $b = 477$ setzen, folgende Werthreihen:

$b = 500$	$b = 477$
$v'_1 = 540{,}84$	$v'_1 = 515{,}96$
$v'_2 = 564{,}62$	$v'_2 = 538{,}65$
$v'_3 = 605{,}72$	$v'_3 = 577{,}84$
$v'_4 = 655{,}03$	$v'_4 = 625{,}05$
$v'_5 = 702{,}86$	$v'_5 = 670{,}53$
$v'_6 = 733{,}76$	$v'_6 = 700{,}01$

Vergleicht man diese Werthe mit denen der in Nr. 2 aufgeführten »Hauptfarben«, so sieht man, dass v'_2, v'_3, v'_4 und v'_6 mit ihnen nahe zusammentreffen, v'_3 und v'_5 aber höhere Vibrationszahlen haben als resp. das mittlere Orange und Indigo. Man kann also sagen, dass das mittlere Gelb, Grün, Blau und Violett mit dem mittleren Roth Intervalle bilden,

welche resp. denen der kleinen Terz, Quarte, Quinte und kleinen Septime entsprechen, dass aber das Orange, welches mit jenem Roth eine grosse Secunde und das Indigo, was mit ihm eine grosse Sexte bildet, vom Roth aus genommen, etwas über die Mitte zwischen den benachbarten Farbengrenzen hinaus liegt. Diese Resultate ändern sich nicht wesentlich, wenn man statt der angewandten Zahlen diejenigen setzt, welche sich als Mittel aus den in Nr. 7 berechneten Werthen von v, v_1, v_2 u. s. w. ergeben.

10. Bezeichnen wir diese berechneten Mittelfarben der Reihe nach durch ihre Anfangsbuchstaben R, O, G, g, B, I, V, die zwischen ihnen liegenden Intervalle durch die Differenzen $O - R$, $G - R$, $g - R$ u. s. w., so ist also, wenn wir die Werthe dieser Intervalle nach § 18 der vorstehenden Abhandlung beisetzen,

$O - R = 0{,}16992 = 2q - 1$ = grosse Secunde,
$G - R = 0{,}26303 = q - t$ = kleine Terz,
$g - R = 0{,}41504 = 1 - q$ = Quarte,
$B - R = 0{,}58496 = q$ = Quinte,
$I - R = 0{,}73697 = 1 - q + t$ = grosse Sexte,
$V - R = 0{,}83008 = 2 - 2q$ = (kleinere) kleine Septime.

Hieraus folgt weiter durch Subtraction des ersten Glieds von allen folgenden:

$G - O = 0{,}09311 = 1 - q - t$ = kleine Secunde,
$g - O = 0{,}24512 = 2 - 3q$ = alterirte kleine Terz,
$B - O = 0{,}41504 = 1 - q$ = Quarte,
$I - O = 0{,}56705 = 2 - 3q + t$ = alterirte Quinte,
$V - O = 0{,}66016 = 3 - 4q$ = alterirte kleine Sexte.

Durch dasselbe Verfahren ergiebt sich aus dieser Reihe weiter:

$g - G = 0{,}15201 = 1 - 2q + t$ = kleiner ganzer Ton,
$B - G = 0{,}32193 = t$ = grosse Terz,
$I - G = 0{,}47394 = 1 - 2q + 2t$ = kleinere übermäss. Quarte,
$V - G = 0{,}56705 = 2 - 3q + t$ = alterirte Quinte.

Hieraus folgt ferner auf dieselbe Weise:

$B - g = 0{,}16992 = 2q - 1$ = grosse Secunde,
$I - g = 0{,}32193 = t$ = grosse Terz,
$V - g = 0{,}41504 = 1 - q$ = Quarte;

woraus endlich sich noch ergiebt:

$$I - B = 0{,}15201 = 1 - 2q + t = \text{kleiner ganzer Ton,}$$
$$V - B = 0{,}24512 = 2 - 3q = \text{alterirte kleine Terz,}$$

und

$$V - I = 0{,}09311 = 1 - q - t = \text{kleine Secunde.}$$

Sämmtliche hier vorkommende alterirte Intervalle sind um ein syntonisches Komma kleiner als die reinen.

Nachträgliche Bemerkung.

In den §§ 26, 27 und 29 sind zwei Tonarten übergangen, die, wenn es sich um Vollständigkeit handelt, gleiche Berücksichtigung verdienen wie die übrigen seltner in Gebrauch kommenden. Es sind dies *Ces*-dur und *Ais*-moll, welche die gleiche Vorzeichnung haben wie resp. *As*-moll und *Cis*-dur. In § 26 fanden sich nun für $A^{\#}$ die drei verschiedenen Werthe 796, 814, 832. Hieraus erhält man drei verschiedene Scalen für *Ais*-moll, von denen jedoch nur die letzte als neue Bestimmungen $C^{\#} = 95$ und $H^{\#} = 1002$ giebt. — In § 27 giebt Nr. 6 ... $c^{b} = 905$, woraus eine Scala für *Ces*-dur folgt, in der die Werthe $F^{b} = 320$, $A^{b} = 642$ neu sind, welche sich jedoch auch in Nr. 13 und 12 finden. — In § 29 endlich erhalten durch Berücksichtigung der genannten Tonarten die beiden Tabellen S. 47 folgende Zusätze:

	Grundton	gr. Secunde	gr. Terz	Quarte	Quinte	gr. Sexte	gr. Septime
I. Dur:	c^{b}	152	322	415	585	737	889

	Grundton	gr. Secunde	kl. Terz	Quarte	Quinte	kl. Sexte	kl. Septime
II. Moll:	$A^{\#}$	145	263	415	560	678	848

Es hat also nach der gewöhnlichen akustischen Tabelle die Scala von *Ces*-dur dieselbe Form wie die von *G*-dur und weicht demnach in der gr. Secunde und gr. Septime um ein syntonisches Komma von der Reinheit ab; *Ais*-moll dagegen weicht nur in der kl. Septime um das syntonische Komma ab, in der gr. Secunde und Quinte aber um 0,025 Octave $= \frac{1}{6{,}8}$ g. T.

Fig. 1.

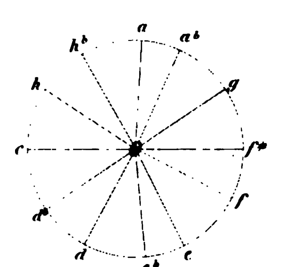


Fig. 2.

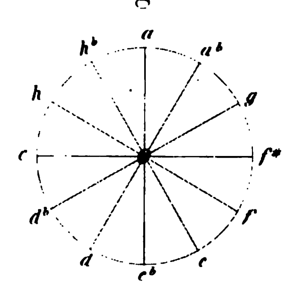


Fig. 3.

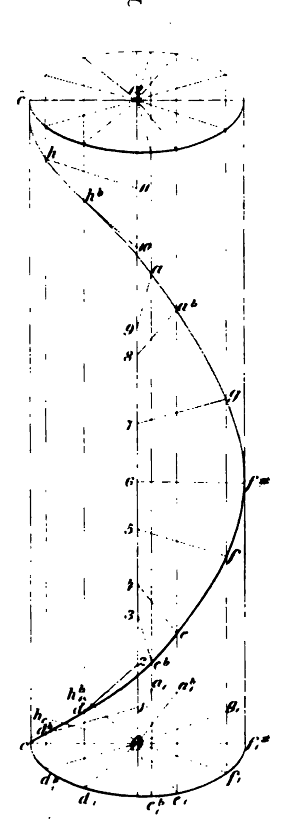
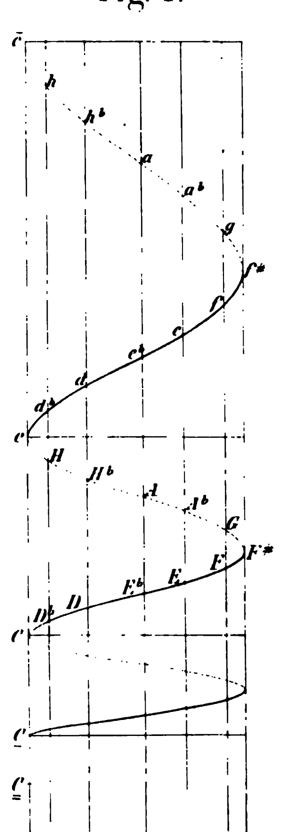


Fig. 4.



BEITRÄGE

ZUR

KENNTNISS DER GEFÄSSKRYPTOGAMEN

VON

WILHELM HOFMEISTER.

I.

I.

DIE ENTWICKELUNGSGESCHICHTE DER ISOËTES LACUSTRIS.

Es knüpft sich an die höheren Kryptogamen im Allgemeinen ein hervorragendes botanisches Interesse. Sie bilden das Mittelglied zwischen den beiden grossen Abtheilungen des Gewächsreichs, den geschlechtslosen Kryptogamen und den Phauerogamen. Im Vorgange bei der Befruchtung ähneln sie vor allen anderen Pflanzen den Thieren durch die Hervorbringung von Samenfäden, denen der Thiere ähnlich gestaltet, welche durch ihre Berührung eine präexistirende Zelle zu weiterer Entwickelung anregen; befruchten. Die Einfachheit und Uebersichtlichkeit des Verlaufs ihrer Gefässbündel, die Grösse der Zellen ihrer in Zellenvermehrung begriffenen Theile, vereint mit der bunten Mannichfaltigkeit im Baue ihrer Vegetationsorgane, eignet sie vorzugsweise zur Bearbeitung der schwierigen Aufgabe: die Einzelnheiten der Entwickelung zusammengesetzter Pflanzentheile zu ergründen, deren Wachsthumsvorgänge auf die Vermehrung der einzelnen Zelle zurückzuführen. Ihre Untersuchung wird das geeignetste Vorstudium sein zu der noch mühsameren Erforschung der Lebenserscheinungen der Pflanzen mit kleineren Elementarorganen, mit zahlreicheren und verwickelter verlaufenden Gefässbündeln.

Eine besondere Wichtigkeit aber hat für die botanische Morphologie die Entwickelungsgeschichte der Isoëten. Sie sind die einzige bekannte Gattung mit ausnahmslos unverzweigter Hauptachse. Sie stehen, so weit die Beobachtungen reichen, im ganzen Pflanzenreiche vereinzelt durch das völlige Unterbleiben einer nachträglichen Zellenvermehrung in den Gliedern des Stammes. Bei anderen Stengeln mit noch so unentwickelten Internodien erfolgt nach Anlegung des jüngsten Stengelglieds, im zweitjüngsten, wohl auch noch in den nächstbenachbarten

9*

Internodien eine wenn auch wenig lebhafte Vermehrung der Zellen in der Längsrichtung. Bei Isoëtes endet mit Anlegung eines Stammglieds dessen Längenwachsthum absolut. Die Entwickelung von Adventivwurzeln, anscheinend in niedersteigender Folge, die Form der Holzmasse, vor allem aber das Dasein eines das Holz umschliessenden, die ganze Lebensdauer der Pflanze hindurch thätigen Mantels von Cambium stellen die Isoëten in scharfen Gegensatz zu den in Bezug auf die Fortpflanzungserscheinungen ihnen nächst Verwandten. Die Vorgänge bei der geschlechtlichen Befruchtung zeigt Isoëtes mit einer Leichtigkeit und Klarheit, wie keine andere der diöcischen Gefässkryptogamen. —

Seit Hugo von Mohl die eigenthümlichen Wachsthumserscheinungen der Isoëten nachwies[1]) — die Entwickelung der Adventivwurzeln in anscheinend absteigender Ordnung zu beiden Seiten einer, die untere Fläche des abgeplatteten, kuchenförmigen Stammes durchziehenden Furche; die seltsame Gestalt des Holzkörpers, die jährliche Erneuerung der Rinde durch die Lebensthätigkeit einer das Holz umgebenden Cambiumschicht — seit jener Zeit ist beinahe unausgesetzt die besondere Aufmerksamkeit der Botaniker der interessanten Gattung zugewendet gewesen. Alexander Braun[2]) deutete hin auf den Zusammenhang der $\frac{1}{2}$ oder $\frac{1}{3}$ Stellung der Wedel junger Pflanzen mit der zwei- oder dreilappigen Form des Stammes; er entdeckte die wahre Natur der, von frühern Beobachtern[3]) für zufällige seitliche Verästelung genommene regelmässige Zweigabelung der Wurzeln. Die auffallende Anordnung derselben am Stamme suchte er durch die Annahme zu erklären, dass „die Wurzeln bei Isoëtes, anstatt wie gewöhnlich nach aussen aus dem Gefässcylinder hervorzubrechen, im Gegentheil nach innen sich wendend durchdringen." — Mettenius gab[4]) ziemlich gleichzeitig eine sehr genaue Beschreibung des Baues der reifen Spore, und sprach die Vermuthung aus, dass die Keimung von Isoëtes mit der von Selaginella übereinstimmen möge, über welche letztere er zugleich[5]) die ersten richtigen auf mikroskopische Einzelnheiten sich beziehenden

1) Ueber den Bau des Stammes von Isoëtes lacustris (Linnaea, Jahrg. 1840; vermischte Schriften botanischen Inhalts, S. 122).

2) Weitere Bemerkungen über Isoëtes, Flora 1847, S. 32.

3) Bischoff, kryptogame Gewächse, Nürnberg 1828, S. 10.

4) Ueber Azolla, Linnaea 1847, S. 269 ff.

5) a. a. O. Anmerkung zur Seite 270.

Angaben veröffentlichte. Ein Jahr darauf lieferte Karl Müller eine Geschichte der Keimung von Isoëtes lacustris.[1]) Er beschreibt die grosse Spore (deren er nur in ziemlich vorgerücktem Stadium der Entwickelung vor sich hatte) als ein vom Exosporium umschlossenes zelliges Säckchen, in dessen Hohlraume das Rudiment des Embryo als freischwimmende Zelle auftritt, die allmälig zum Zellenkörper sich umwandelt. Die wesentlichsten Irrthümer dieser Darstellung berichtigte Mettenius sofort.[2]) Derselbe that neuerdings[3]) die Gleichartigkeit der Keimung von Isoëtes mit der anderer Gefässkryptogamen schlagend dar durch die Entdeckung der Bildung von Samenfäden in den kleinen Sporen, und die Schilderung auf dem Prothallium, welches in den grossen Sporen sich entwickelt, entstehender Archegonien.

Die im Nachstehenden mitgetheilten Untersuchungen werden die durch Mettenius und Müller aufgefundenen Thatsachen vervollständigen und mit den von Mohl geschilderten verknüpfen. Das reiche Material derselben verdanke ich der Güte von Mettenius,[4]) Alexander Braun und Gustav Reichenbach.[5])

Die grossen Sporen der Isoëtes lacustris, bei ihrer Entstehung von Gestalt eines Tetraëders mit convexer Grundfläche, erlangen gegen die Reife hin durch allmälige Wölbung auch ihrer übrigen Flächen nahezu Kugelform. Die zarte primäre Zellhaut wird von einem dicken Exosporium umkleidet, welches auf Durchschnitten drei Hauptschichten zeigt: eine innerste, glasartige, von brauner Farbe, mässiger Dicke, welcher kürzere und längere gegen die Pole der Spore convergirende Leisten aufgesetzt sind. Drei längere und stärkere solcher Leisten, den Berührungskanten der Spore mit ihren drei Schwestersporen entsprechend, vereinigen sich auf ihrem Scheitel unter Winkeln von 120°. Sie reichen bis zum Aequator der Zelle und schneiden hier eine die Spore umgürtende, etwas niedrigere Ringleiste. Auf diese innerste Schicht des Exosporium folgt eine dünnere von körniger Beschaffenheit und gelblicher

1) Berliner botanische Zeitung, 1848, Sp. 297 ff.

2) Sp. 688 desselben Jahrganges der botanischen Zeitung.

3) Beiträge zur Botanik, 1. Heft. Heidelberg 1850.

4) Isoëtes lacustris lebend in allen Altersstufen aus dem Feldsee im Schwarzwalde, demselben Standorte, welcher auch Bischoff, Mohl, Braun und Mettenius den Stoff ihrer Untersuchungen lieferte.

5) Die Arten der Mediterranflora in getrockneten Exemplaren.

Färbung. Ihr ist die dicke, äusserste Hülle aus glasheller, gallertartiger Masse aufgelagert. Sie überzieht, gleich der vorigen, alle leistenförmigen Hervorragungen der innersten, glasigen Schicht des Exosporium; über den vier Hauptleisten ist sie besonders stark entwickelt (T. II f. 1).

Der Stoff des Exosporium verhält sich gegen Reagentien gleich der Exine der Pollenkörner. Schwefelsäure giebt den inneren Schichten röthliche Farbe; Kochen in Kalilauge greift sie an. Die Gallertschicht wird von Mineralsäuren und ätzenden Alkalien rasch zerstört. Kohlensaurer Kalk, den Schleiden nach dem Aussehen trockener Sporen im Exosporium vermuthet,[1]) ist in demselben nicht vorhanden, wie bereits Röper angegeben.[2]) — Der Inhalt der reifen Spore verhält sich optisch und chemisch wie ein Gemenge von Oel und Eiweiss. Eine Spore, auf dünnem Papier zerdrückt, hinterlässt einen bleibend durchscheinenden Flecken.

Wenige Wochen nach Freiwerden der Spore aus dem durch Verwesung seiner Wand sich öffnenden Sporangium beginnt ihr Innenraum sich mit Zellgewebe zu füllen. Durchschnitte geben keinen Aufschluss über die Art dieser Zellenbildung; bei Verletzungen der noch nicht vollständig von geschlossenem Parenchym erfüllten Spore wird ihr Inhalt zu gestaltlosem Breie. Aber schon halbstündiges Liegen in gesättigter Glycerinlösung macht das Exosporium hinreichend durchscheinend, um der Innenwand der Spore angelagerte, abgeplattet-sphärische Anhäufungen einer körnigen Substanz erkennen zu lassen (T. II f. 1). Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass diese bei Druck auf die Spore zusammenfliessenden Massen körnigen Schleim's eben gebildete Primordialzellen (nackte Primordialschläuche) sind; dass somit die Bildung des die Spore füllenden Zellgewebes, des Prothallium, durch freie Zellbildung erfolgt; übereinstimmend mit der Entstehung des Endosperms der Mehrzahl der Phanerogamen, insbesondere mit der Entwickelung des Eiweisskörpers der Coniferen. Die Bildung von starren Zellhäuten scheint erst zu der Zeit zu beginnen, da der gesammte Inhalt der Sporenzelle in Tochterzellen sich umgewandelt hat.

Wahrscheinlich beginnt diese Zellbildung in der Scheitelwölbung des Sporenraumes. Zu der Zeit, da der Widerstand des die Spore ge-

---

1) Grundzüge, 2. Aufl. Band II. S. 84.

2) Zur Flora Mecklenburgs. Band I. S. 125.

schlossen füllenden Parenchyms die Darstellung von Längsdurchschnitten erlaubt, sind die Zellen des Scheitels des Prothallium weit kleiner und zahlreicher, als die seines Grundes. Dies lässt schliessen, dass dort schon vor geraumer Zeit eine Vermehrung der Zellen begonnen hat, welche hier weit später erst und mit weit minderer Lebhaftigkeit eintreten wird. — Der Inhalt der Zellen des Prothallium unterscheidet sich nicht von dem der reifen Spore; Zellenkerne sind in der dicken, trüben Flüssigkeit nicht wahrzunehmen.[1])

Während der Anlegung des Prothallium verändert sich nicht unbeträchtlich die primäre Zellhaut der Spore; besonders in ihrem oberen Theile. Sie nimmt an Dicke zu; auf Durchschnitten lässt sie eine Zusammensetzung aus mehreren Schichten erkennen. Unschwer lässt sie sich vom Prothallium abstreifen.[2]) Von der Fläche gesehen, erscheint die früher gleichartige jetzt fein gekörnelt — alles Erscheinungen, die in überraschender Gleichartigkeit auch am Embryosack der Nadelhölzer sich finden.

Das kugelförmige Prothallium, durch Vermehrung und Dehnung seiner Zellen etwas an Masse zunehmend, sprengt die obere Hälfte des Exosporium in drei Lappen, indem jede der drei auf dem Scheitel der Spore zusammentreffenden Leisten in zwei Längshälften sich trennt. Ein kleiner Theil des Scheitels des Prothallium — drei unter Winkeln von 120° zusammenstossende sehr spitze Dreiecke — wird dadurch frei gelegt.

Aus der Vermehrung einzelner Zellen der Oberfläche dieser blos gewordenen Stellen gehen Archegonien hervor, deren erstes ausnahmslos genau auf dem Scheitel des Prothallium entsteht (T. II f. 2). Bleibt dieses erste unbefruchtet, so bilden sich noch mehrere in von ihm absteigender Ordnung; über acht zählte ich in keinem Falle.

Die Mutterzelle eines Archegonium theilt sich durch eine der freien Aussenfläche parallele Wand; die gleiche Theilung wiederholt sich in der äusseren der beiden neugebildeten Zellen. Senkrechte Längswände

---

1) Die Undurchsichtigkeit des milchigen Zellinhalts ist so gross, dass sie selbst bei sehr dünnen Durchschnitten die Erkennung der Zellengränzen hindert, so lange das Präparat in reinem Wasser liegt. Zusatz concentrirter Glycerinlösung erzeugt schneller eine weit vollständigere Durchscheinenheit als das von Mettenius (Beiträge zur Botanik, Heft 1, S. 11) empfohlene Chlorcalcium.

2) Vergl. Mettenius, berliner botan. Ztg. Jahrg. 1848, Sp. 690.

theilen darauf die obern beiden Zellen in je zwei Längshälften (T. II f. 3 bei a), in deren jeder sofort eine zur letztentstandenen rechtwinklige Längswand auftritt. Die unterste Zelle des Archegonium nimmt an Grösse etwas zu; sie wird zu dessen Centralzelle. Von den sie überragenden zwei Doppelpaaren viermal kleinerer Zellen pflegt das untere sich durch Querwände noch einmal zu theilen (T. II f. 3 bei a^1); Ausnahmen sind selten.

Während dieser Vorgänge blättert der vom Exosporium unbedeckte Theil der primären Membran der Sporenzelle sich allmälig ab, vorher aufquellend.[1]) Durch Auseinanderweichen der vier Längsreihen von Zellen, welche die Centralzelle des Archegonium decken, bildet sich jetzt ein auf diese zuführender offener Gang (T. II f. 5). Noch vor dessen Auftreten entstand in ihr eine sphärische, die Mutterzelle beinahe ausfüllende, freie Tochterzelle (T. II f. 4—6). Sie ist die Anfangszelle der neuen Generation, das Keimbläschen, befähigt nach Befruchtung durch die in den kleinen Sporen erzeugten Samenfäden zu einer neuen wedel- und sporentragenden Pflanze der Isoëtes sich auszubilden.

Zur Umwandlung in ein Prothallium und zur Hervorbringung von Archegonien gelangen alle reifen Makrosporen der Isoëtes lacustris. Eine Weiterentwickelung, die Bildung von Embryonen beblätterter Pflanzen erfolgt aber nur in solchen, die zusammen mit Mikrosporen ausgesäet wurden, analog der gleichen Erscheinung bei den Selaginellen und den Rhizocarpeen. — Von Mikrosporen streng getrennt gehaltene Prothallien leben lange, bei meinen Versuchen von Anfang September bis Mitte März. Einzelne derselben brachten selbst dann noch neue, normal gebaute, anscheinend des Befruchtetwerdens fähige Archegonien hervor.

Die kleinen Sporen der Isoëtes lacustris haben bei der Reife die Gestalt von Kugelquadranten; in seltenen Fällen sind sie tetraëdrischer Form. Die scharfen Kanten und Ecken der Spore werden von der Exine gebildet; die der inneren Sporenhaut sind stumpf zugerundet. Am oberen wie am unteren Ende der Spore entwickelt sich das Exosporium

---

1) Ein besonders überzeugendes Beispiel derartiger Häutung ganzer Zellgewebsmassen durch Abwerfen der primären Haut und der Verdickungsschichten der Oberhautzellen giebt die Wachsthumsgeschichte der Adventivwurzeln einiger Gräser, insbesondere der *Avena sativa*.

zu einer warzigen Spitze (T. II f. 8, 9); den Berührungskanten der Spore mit den drei Schwestersporen entlang zu einer weit vorgezogenen, schneidigen Falte (T. II f. 7). Die Aussenfläche der Exine ist aufs feinste gekörnelt, fast glatt, ihre Farbe ein lichtes Gelbgrau.

Der Inhalt der völlig entwickelten kleinen Spore ist feinkörniges Protoplasma, in dem viele kleinere Oeltropfen enthalten sind. Bei durchfallendem Lichte erscheint das Gemenge der sehr verschieden lichtbrechenden Flüssigkeiten fast undurchsichtig. Im Mittelpunkt der Spore schwebt ein kugeliger Zellenkern von scharfen Umrissen, mit durchsichtiger Inhaltsflüssigkeit (T. II f. 7).

Etwa vier Wochen, nachdem die Mikrosporen durch Verwittern der Wand der Sporangien frei wurden, theilt sich der Primordialschlauch der Zelle in zwei bis vier Portionen, welche zu Tochterzellen sich individualisiren (T. II f. 8). Bisweilen erfüllen die Theilhälften des Primordialschlauchs die Mutterzelle vollständig; die von ihnen ausgesonderten Zellwände erscheinen dann, soweit sie den Berührungsflächen zweier Primordialschlauch-Hälften entsprechen, als der Innenwand der Sporenzelle angesetzte Scheidewände (T. II f. 9).[1] Häufiger aber ist die Theilung des Primordialschlauchs mit einer Zusammenziehung desselben auf kleineren Raum verbunden;[2] die Tochterzellchen, von abgeplattet ellipsoidischer Form, liegen frei im Innenraume der Spore. In der Inhaltsflüssigkeit der Tochterzellen zeigen sich jetzt zahlreiche sehr kleine Amylumkörperchen.

Jedes dieser Zellchen erzeugt in seinem Inneren eines bis zwei linsenförmige Bläschen, in deren jedem ein in rechtsläufiger Spirale aufgerollter Faden aus mit Jod sich bräunender Substanz entsteht (T. II f. 11). Sein eines Ende ist mässig verdickt, das andere in eine fadenförmige Spitze ausgezogen. Hat er seine volle Ausbildung erreicht, so werden die Spore und ihre Tochterzellchen durch Anschwellen des Inhalts gesprengt; die linsenförmigen Mutterbläschen der Samenfäden

1) In solcher Weise getheilte Sporen gleichen vollkommen den ellipsoidischen Zellkörperchen, welche aus den Mikrosporen führenden Sporangien der *Salvinia natans* im Frühjahre hervorbrechen, und in deren Fächern die Mutterbläschen der Samenfäden entstehen (S. 109 meiner Schrift „Vergleichende Untersuchungen der Entwickelung höherer Kryptogamen" u. s. w. Leipzig 1851).

2) Analog dem Vorgange bei der Sporenbildung von Leber- und Laubmoosen (Pellia und Phascum; a. a. O. S. 20, 73).

kommen frei in den nach Aussen geöffneten Raum der Spore zu liegen. Bald zerreisst auch die (mit Jod sich bläuende) Membran des Bläschens selbst; das eine Ende des Samenfadens tritt aus dem Risse hervor und beginnt sofort eine lebhaft schwingende, das Mutterbläschen in rasche Drehung setzende Bewegung (T. II f. 12). Endlich entringt sich der Faden dem Bläschen völlig; seine spiraligen Windungen entfernen sich etwas von einander. In fortwährender Drehung um die Achse seiner Spirale schlüpft er aus der geborstenen Spore und bewegt sich im Wasser umher, mit dem dicken Ende voraus, das dünnere nachschleifend (T. II f. 13—15).[1]) Seine Bewegungen sind wenig schneller, als die der Spermatozoïden der Moose.[2])

Wird der Samenfaden durch Jod getödtet, so lässt sich, bei günstiger Beleuchtung, eine geringe Zahl seinen vorderen zwei Windungen ansitzender äusserst feiner Wimpern erkennen (T. II f. 16, 17). Zusatz färbender Stoffe zum Wasser, in welchem Samenfäden sich bewegen, zeigt, dass während des Lebens dieser jene Wimpern lebhaft schwingen. — Die Dauer der Bewegung der Spermatozoïden von Isoëtes überstieg bei meinen Beobachtungen in keinem Falle drei Stunden.

Ende August ausgesäete Mikrosporen entliessen die ersten Samenfäden Mitte September; die Erzeugung von Spermatozoïden dauerte bis in den Januar. Das Wasser der Gefässe, in welche ich grosse und kleine

---

1) Der Forscher, dem die Lehre von den selbstbeweglichen Fortpflanzungsorganen der Kryptogamen die neuesten Bereicherungen verdankt, Thuret, steht im Widerspruche mit andern, diesen Gegenstand behandelnden Botanikern, insbesondere mit mir, indem er für erwiesen annimmt, dass das hintere Ende der Samenfäden der Charen, Moose und Gefässkryptogamen verdickt sei und stumpf ende. Das Dasein eines lang fadenförmigen Schwanzes stellt er in Abrede (*Annales des sc. natur.* Série III. Tome XVI). Es ist misslich, einem so trefflichen Beobachter, wie Thuret, zu widersprechen. Ich habe geglaubt, auf Erscheinungen der Art das meiste Gewicht legen zu müssen, wie ich f. 14 der T. I abbilde: das hintere Ende des Samenfadens ist an einem kleinen Gegenstande, dem eigenen Mutterbläschen z. B. kleben geblieben, und dieser wird bisweilen auf linienweiter Entfernung vom Samenfaden nachgeschleppt. Aehnliches sah ich bei Pellia, bei Farrnkräutern und Equiseten. Thuret erwähnt ausdrücklich der undeutlichen Umrisse und der schleimigen Beschaffenheit des keuligen Hinterendes der Spermatozoïden. Bestände dasselbe aus so weichem, halbflüssigen Schleime, dass er bei Anhaften irgendwo in lange Fäden sich ausziehet, so würde der Widerspruch Thuret's und meiner Angaben sich befriedigend erklären.

2) Mettenius, der Entdecker der Spermatozoïden von Isoëtes, weist hin auf die Trägheit ihrer Bewegungen in Vergleich mit den reissend schnellen derer der Farrn.

Sporen ausgesäet, wimmelte von Samenfäden an einigen Tagen Mitte Oktobers. Der dünnflüssige Schleim, welcher den Mündungskanal reifer Archegonien ausfüllt, umschloss zu dieser Zeit öfters fädliche Körper fester schleimigen Stoffes, welche füglich die Reste bewegungslos gewordener Spermatozoïden sein konnten.

Die erste Erscheinung, welche den Beginn der Entwickelung eines Embryo in einem Archegonium anzeigt, ist die Theilung des befruchteten Keimbläschens durch eine gegen die Längsachse des Archegonium etwas geneigte transversale Scheidewand (T. II f. 18—20). Während der Bildung dieser dehnt sich das Keimbläschen, oft nicht unbeträchtlich, in zur Längsachse des Archegonium rechtwinkliger Richtung. Von den beiden Theilhälften des befruchteten Keimbläschens wird — wie bei fast jeder vegetativen Zellvermehrung, nach Verschwinden des primären Kernes der Zelle und Auftreten zweier neuer (T. II f. 20) — zunächst die untere (T. III f. 2), darauf auch die obere getheilt durch eine die erst entstandene unter rechtem Winkel schneidende Wand (T. II f. 21). — Die aus nur zwei bis vier Zellen bestehende Anlage zum Embryo der neuen Generation hat die Form eines liegenden Eyes; in Richtung ihrer Längsachse betrachtet (T. II f. 18, 19) erscheint sie nicht grösser, als das unbefruchtete Keimbläschen. Aber sie hat bereits begonnen durch ihre Längsdehnung zerstörend einzugreifen in das Gewebe des Prothallium.

Wie in zahlreichen ähnlichen Fällen — bei Entwickelung der noch im Prothallium verborgenen Keimpflanze der Farrn, beim Eindringen des unteren Endes der Moosfrucht in die sich bildende Vaginula, bei dem Verdrängen des Endosperms durch den heranwachsenden Embryo vieler Phanerogamen — zeigen die dem rudimentären Embryo nächst benachbarten Zellen des Prothallium eine ziemlich lebhafte Vermehrung, bevor sie aufgelockert, von der sich entwickelnden Keimpflanze verdrängt und endlich aufgelöst werden. Der Embryo erscheint auf seinen ersten Entwickelungsstufen von einem Gewebe sehr enger Zellen umschlossen (T. II f. 21). Schon während der ersten Theilungen des befruchteten Keimbläschens sterben die Mündungszellen seines Archegonium ab; ihre Inhaltsflüssigkeit wird wasserklar, ihre Wandungen nehmen die tiefbraune Farbe an, welche todten Zellmembranen von Gefässkryptogamen so allgemein zukommt. Aehnliche Veränderungen gehen bisweilen in den Zellen der Oberfläche des Pro-

thallium vor sich, die der Archegonienmündung angränzen (T. II f. 21; T. III f. 1—7).

In den seltensten Fällen wird mehr als ein Archegonium desselben Prothallium befruchtet. Die übrigen verkümmern; der Inhalt ihrer Centralzellen verschrumpft zu einem unregelmässig gestalteten Ballen dunkelbrauner Substanz; alle Zellenmembranen des Archegonium bräunen sich; eine Färbung, welche dann und wann auch auf die Häute angränzender Zellen des Prothallium übergeht (T. II f. 21).

Das vierzellige Rudiment des Embryo wächst gegen den Mittelpunkt des kugeligen Prothallium hin durch wiederholte Theilung seiner dem Ausführungsgange des Archegonium abgewendeten Zellen. Gleichzeitig beginnt eine lebhafte Vermehrung der einen seitlichen Zelle, welche das spitzere Ende der eyförmigen Embryoanlage einnimmt. Sie theilt sich durch eine verticale zur horizontalen Achse des Embryo spitzwinklige Wand. Die äussere der neu entstandenen Zellen wird durch eine der letztgebildeten Wand rechtwinklig angesetzte senkrechte Scheidewand sofort auf's Neue getheilt. In der jeweiligen Scheitelzelle des auf solche Weise hervortretenden Auswuchses des Embryo wiederholt sich längere Zeit hindurch die Theilung durch wechselnd nach zwei Richtungen geneigte Wände (T. III f. 4, 5, 8). Diese bis zu einem gewissen Punkte stetig sich verlängernde seitliche Sprossung der rudimentären jungen Pflanze ist der erste Wedel.[1])

---

1) Der Ausdruck „W e d e l" ist nicht wohl zu entbehren für die das Laub darstellenden seitlichen Sprossungen, gemeinhin beschränkter Längsentwickelung, der Hauptachse der grossen Mehrzahl der Gefässkryptogamen. Eine wissenschaftliche Bedeutung kann dem Worte gegeben werden durch seine ausschliessliche Anwendung auf Zweige begränzten Wachsthums und blattähnlicher Bildung. In diesem Sinne mögen die Stengel der Marchantieen und Riccieen, die blattlosen Halme vieler Juncus-Arten, die blattartigen Zweige von Ruscus u. A mit Fug und Recht Wedel genannt werden. — Die Farrnwedel für Blätter zu erklären, dawider spricht, wie ich anderen Orts (S. 88 meiner Schrift „Vergleichende Untersuchungen höherer Kryptogamen" u. s. w. Leipzig 1851) erörtert, das Vorkommen von Spreublättern auf den Wedeln aller Farrn im engsten Sinne; die Entwickelung des fruchttragenden Wedels der Ophioglossen und Botrychien aus dem sterilen; vor Allem aber die Entstehung neuer Jahrgänge von Wedeln der Ophioglosseen als Adventivsprossen (Vergleichende Untersuchungen T. XVI f. 28), aus der Vermehrung von Zellen des untern Endes des Gefässbündels des nächst älteren Wedelpaares, analog der Bildung neuer Jahresschossen des *Tamus elephantipes* (M o h l, Vermischte Schriften S. 186; — will man die Entstehung von Adventivsprossen an bestimmt vorgezeichneten Stellen im Innern des Gewebes zum Vergleichungs-

Die aus der Theilung der (primären) Scheitelzelle des Wedels hervorgehenden Zellen zweiten Grades werden durch radiale Längswände getheilt. Jede der tertiären Zellen theilt sich, durch den Sehnen der gewölbten freien Aussenflächen parallele Wandungen, in eine innere und eine äussere Zelle. In der letzteren tritt eine zur nächst vorher entstandenen rechtwinklige, in Bezug auf die Längsachse des Wedels radiale Wand auf; acht peripherische Zellen umschliessen nahe unter der fortwachsenden Wedelspitze vier axile. Die ursprünglich von oben und unten abgeplattete Gestalt des Wedels (T. III f. 3, 10, 11) wandelt sich durch diese Zellenvermehrung allmälig in die konische um (T. III f. 13). Durch wiederholte Theilung der Zellen seines Umfanges mittelst radialer Längswände, wechselnd mit solchen den Tangenten der freien Aussen-

---

punkte nehmen, so ist auch die normale Verzweigung der Equisetaceen als ähnlicher Fall anzuführen: [Vergleichende Untersuchungen S. 94]). Noch deutlicher für die Zweignatur der Wedel redet vielleicht die Entwickelungsgeschichte der bei Ophioglossum häufig erscheinenden Wurzelbrut. Aus der Vermehrung einer Cambialzelle des Gefässbündels, welches die Längsachse der weit kriechenden Adventivwurzel durchzieht, geht ein rudimentärer Wedel hervor, dessen Vorderseite ein zweiter Wedel entspriesst, noch während der erste im Parenchym der Wurzelrinde verborgen ist. — Es kann kein Grund wider die Zweignatur der Wedel sein, dass sie nachweislich nicht in den Achseln von Blättern (Spreuschuppen) der Hauptachse entstehen. Die aus den Wachsthumserscheinungen der Phanerogamen abgeleiteten morphologischen Regeln — Regeln, die zudem nicht ohne weitgreifende Ausnahmen sind (ich erinnere an das Verhältniss des Pedunculus der Asclepiadeen zu dem mit ihm auf gleicher Höhe entspringenden Blattpaare) — können nicht ohne Weiteres auf die Kryptogamen angewendet werden. Aechte Dichotomie, Gabelung der Endknospe oberhalb der jüngsten Blätter ist eine sehr vielen Kryptogamen, namentlich den Selaginellen und den Lycopodien, normal zukommende Lebenserscheinung.

Minder klar, als die Zweignatur der Wedel der Polypodiaceen, ist die Wedelnatur des pfriemlichen Laubes der Isoëteen. Es steht ihr entgegen die (von Karl Müller bereits hervorgehobene: Berliner botan. Zeitg., Jahrg. 1848 Sp. 335) Aehnlichkeit des Lebensprocesses des Nebenblattes der Selaginellen mit dem Spreublatte (der Schuppe) der Isoëteen. Die Art der Entwickelung beider Organe ist indess insofern eine etwas verschiedene, als das Spreublatt der Isoëten aus Vermehrung einer einzigen Zelle, das Nebenblatt der Selaginellen aus Vermehrung einer Zellreihe hervorgeht. — Dass ich Organe, die so viel Gleichartiges zeigen, wie die Blätter von Selaginella und die Wedel von Isoëtes, in dem einen Falle Blätter, im anderen Zweige nenne, beruht einestheils auf der Uebereinstimmung des ersten Wedels des Isoëtes-Embryo in Entwickelung und zum Theil auch in Stellung mit dem ersten Wedel der Farrn; anderntheils darauf, dass bei Isoëtes dem Wedel die Fruchtbildung zugetheilt ist, die bei Selaginella ausschliesslich dem Stengel obliegt; an der die Blätter entschieden keinen Theil haben.

wände parallelen wächst der Wedel ferner in die Dicke. Hat er eine gewisse Stufe der Entwickelung erreicht, so wird sein Längenwachsthum sehr beschleunigt durch den Eintritt einer Quertheilung seiner meisten Zellen. Diese Vermehrung hebt an nahe unter der Spitze des Wedels und schreitet von da vor einerseits gegen die Basis, andrerseits gegen den Scheitel, insofern sie in die nach ihrem Beginn gebildeten Zellen der Wedelspitze sich fortsetzt. Die Zellen des Umfangs theilen sich zuerst; von ihnen rückt die Vermehrung gegen die Längsachse, ohne die vier dieser angrenzenden Zellreihen zu erreichen. Diese bleiben doppelt so lang, als die Zellen der peripherischen Schichten; sie sind bestimmt, durch wiederholte Längstheilungen später zum Gefässbündel sich umzubilden (T. III f. 13).

Der erste Wedel spreizt entweder rechtwinklig von der Längsachse des Archegonium und des Embryo (T. III f. 5, 13); oder er strebt aufwärts, oft in so spitzem Winkel, dass sein Scheitel in die obere Wölbung der Centralzelle des Archegonium sich drängt (T. III f. 3, 6, 8). Dieser Fall ist der häufigste; sehr selten dagegen richtet der Wedel sich abwärts, gegen das Centrum des Prothallium (T. III f. 7).

Schon zu der Zeit, da der Wedel in Richtung seiner Längsachse nur vier bis sechs Zellen zählt, beginnt die freie Aussenwand der einen Zelle sich blasig zu wölben, welche die Mitte des Grundes der oberen, dem Scheitel des Prothallium zugewendeten Wedelfläche einnimmt (T. III.f. 10). Die Ausstülpung schwillt zu einem an der Ober- und Unterseite abgeplatteten Ellipsoïd an, und wird durch eine Scheidewand vom ursprünglichen Raume der Mutterzelle getrennt (T. III f. 11). Die rundliche, einem kolbigen Haare nicht unähnliche Zelle, welche der Basis der Vorderseite des Wedels nun ansitzt, ist die Anfangszelle des einzigen Spreublattes (Schuppe der Autoren), welches er hervorbringt. Ihre ersten Theilungen ähneln völlig denen der Zelle ersten Grades einer Brutknospe von Marchantia oder Lunularia.[1]) Die Zelle wird zwei bis dreimal durch Querwände getheilt, welche, zur künftigen Längslinie des Spreublatts rechtwinklig, auf dessen Flächen senkrecht stehen (T. III f. 12). Demnächst theilt sich die Scheitelzelle, nach ihr auch die tieferen Zellen durch eine zur vorher gebildeten Querwand rechtwinklige Längswand. Die Theilhälften vermehren sich, nach dem Auftreten

1) Vergleichende Untersuchungen S. 50.

neuer Querwände in jeder der beiden oberen (T. VIII f. 7), durch die Entstehung den freien Aussenrändern des Spreublatts paralleler Wände, denen in den äusseren der neugebildeten Zellen zum Aussenrand rechtwinklige Scheidewände folgen. Das Organ, jetzt stumpf-spatelförmig (T. X f. 4, 6), fährt fort, die Zahl seiner Zellen durch Theilung derer seines Umfangs mittelst ziemlich regelmässig wechselnd längs und quer gestellter Wände zu vermehren. Diese Thätigkeit der Zellen endet weit früher an der Spitze des Blattes, als an seiner Basis. Hier findet eine (intercalare) Vermehrung der Zellen vorwiegend in die Länge statt, noch geraume Zeit, nachdem die Theilungsfähigkeit der Zellen der Blattspitze aufhörte.

Alle diese Theilungswände stehen senkrecht auf den Flächen des Spreublattes. Schon früh aber treten auch den Flächen der Schuppe parallele Wandungen in den Zellen ihrer Mitte auf (T. III f. 13; T. IV f. 1). Von hier rückt diese Theilung vor gegen die in intercaler Längs- und Breitenvermehrung begriffenen Zellen des Blattgrundes. In den der Basis nächsten wiederholt sie sich bisweilen, so dass hier das erste Spreublatt aus drei, im Uebrigen aus zwei Zellschichten besteht, mit Ausnahme des Randes und der Spitze, die stets eine einfache Zellfläche darstellen. Einzelne Zellen des Randes wachsen zu ziemlich langen spitzen Papillen aus.

In allen Hauptpunkten stimmt die Entwickelung der Schuppe von Isoëtes überein mit der der Spreublätter der Farrnkräuter. Nicht allein ist die Regel der frühesten Vermehrung der einzigen Anfangszelle bei beiden wesentlich die Gleiche — sie beruht bei beiden auf dem Wechsel unter einander rechtwinkliger Längs- und Quertheilungen; — sondern beide haben mit einander auch gemein den späteren Eintritt intercalarer Zellenvermehrung des Grundes, die Art der Vermehrung der Zellschichten der Mitte, endlich die dem Organe, dessen Anhängsel sie sind, rasch vorauseilende Entwickelung und den zeitigen Tod.

Unmittelbar nach der Anlegung des Spreublattes beginnt am Grunde des Wedels die Bildung einer die Schuppe und einige Zellen unter ihr umfassenden Scheide. Zunächst durch Wölbung nach aussen der freien Aussenwände eines jene Theile umgebenden Kranzes von Zellen (T. III f. 10, 11) bildet sich eine gegen die Vorderfläche des Wedels geöffnete hufeisenförmige wulstige Erhebung (T. III f. 12), welche bei Eintritt der intercalaren Zellenvermehrung der Wedelbasis durch je in den

Scheitelzellen sich wiederholende Theilung mittelst wagrechter Wände zur ziemlich hohen Ringscheide emporwächst (T. III f. 13; T. IV f. 1).

An der Ursprungsstelle des Spreublattes wächst der Wedel nicht in die Dicke; dicht über dem Grunde erscheint seine Vorderseite schräg einwärts gebogen (T. III f. 12, 13; T. IV f. 1). In seinem untersten Theile wird das ihn durchziehende Gefässbündel excentrisch, der Vorderfläche nahe gerückt.

Die primäre Achse der Keimpflanze, welche beim Auftreten des ersten Wedels aus nur wenigen Zellen bestand, hat während der Entfaltung jenes und der Bildung seines Spreublatts an Länge, wie an Umfang erheblich zugenommen, mehr noch durch Dehnung, als durch Vermehrung ihrer Zellen. Sie stellt jetzt eine halbkugelige, gegen den Mittelpunkt des Prothallium gerichtete beträchtliche Hervorragung des Embryo dar, deren einer Seitenfläche der Wedel ansitzt (T. III f. 1, 2, 4, 12, 13).

Auch an ihrer entgegengesetzten Seitenfläche hat jetzt ein Zellvermehrungsprozess begonnen: die Anlegung der ersten Wurzel, einer Adventivwurzel, gleich allen Wurzeln der Gefässkryptogamen. Ihre Entwickelung hebt an mit der Vermehrung einer Zelle des inneren Gewebes des Embryo: — der durch eine Zellschicht von der Oberfläche der Keimpflanze getrennten Zelle, welche der Anfangszelle des ersten Wedels gegenüber liegt (*rc.* der f. 12 der T. III). Diese Zelle theilt sich in dauernd wiederholter Folge durch einander gegenständige Querwände, bildet wechselnd über und unter der primären Zelle liegende Zellen zweiten Grades. Die unteren entstehen durch das Auftreten einer nach unten schwach convexen Wand; sie haben bei der Bildung die Form von Menisken. Ihre Vermehrung erfolgt nach nur zwei Richtungen; alle in ihnen sich bildenden Scheidewände stehen senkrecht auf der gewölbten oberen und unteren Fläche der Zelle, deren gesammte Nachkommenschaft je eine der in einander geschachtelten kappenförmigen Zellschichten darstellt, welche die äusserste Spitze der Wurzel umhüllen und während des Wachsthums derselben allmälig von aussen her sich abblättern (T. III f. 13; T. IV f. 1, 2). — Bevor nach Bildung einer unteren secundären Zelle die Zelle ersten Grades durch eine der letztentstandenen Scheidewand gegenständige sich theilt, treten in ihr auf dreimal hinter einander der Längsachse der Wurzel parallele Wände, deren eine der Aussenseite der Wurzel (der dem Vegetationspunkte der

Keimpflanze abgewendeten) zugekehrt ist. Die beiden anderen Theilwände sind rechtwinklig zu dieser. So bilden sich drei seitliche Zellen zweiten Grades, welchen die Entstehung einer minder hohen oberen, durch Theilung der primären Zelle mittelst einer Querwand nachfolgt (T. XIII f. 1—4). Ich werde die ersteren drei die äusseren, die zweite die innere der oberen secundären Zellen nennen. Beide Arten von oberen Zellen zweiten Grades, die seitlichen wie die ihnen nachfolgenden, vermehren sich nach allen drei Richtungen. Ihre Theilungen wiederholen sich öfter und dauern länger an, als die der unteren secundären Zelle, welche der nämlichen Theilungsperiode der primären angehört.

Die Bildung seitlicher Zellen zweiten Grades zieht eine sehr beträchtliche einseitige Verdickung der Wurzel nach sich. An ihrer, der künftigen Ursprungsstelle der zweiten Wurzel abgewendeten Seite nimmt ihr Durchmesser weit schneller zu, als an der entgegengesetzten. In Folge davon erscheint jede neue kappenförmige Hüllschicht der Wurzelspitze schiefer angesetzt als die vorhergehende; reicht an der dem Vegetationspunkte der Pflanze zugewendeten Seite der Wurzel höher hinauf, als an der entgegengesetzten.

Jede neu entstandene innere der oberen Zellen zweiten Grades wird zuerst durch eine zur Achse der Wurzel einwärts geneigte Wand in ungleiche Längshälften getheilt, deren innere, nach dem Vegetationspunkte der Keimpflanze hinliegende, die kleinere ist. Beide vermehren sich sofort nach allen drei Richtungen. Von ihren Theilhälften bleiben die beiden der Längsachse der Wurzel angränzenden innersten, einander zugewendeten Zellen in der Theilung durch (zur Längsachse der Wurzel rechtwinklige) Querwände hinter allen übrigen um einen Schritt zurück. Dafür werden sie getheilt, jede zweimal, durch unter sich rechtwinklige Längswände. So tritt in der Wurzel ein excentrischer, der Innenseite näherer Strang von sechszehn Längsreihen gestreckter Zellen auf, die Anlage zum Gefässbündel (T. IV f. 2). Die Zellen der Aussenfläche des (im Gegensatze zur nach und nach abblätternden Wurzelhaube) bleibenden Theils der Wurzel theilen sich einmal öfter durch radiale Längs- und durch Querwände, als die des Innern; die Oberhaut der Wurzel besteht aus tafelförmigen Zellen, viermal kleiner als die von Innen ihnen angränzenden. Diese Theilungen der Aussenfläche-Zellen erfolgen noch innerhalb der von den vergänglichen kappenförmigen Hüllschichten der Wurzelspitze geschützten Region; an der Aussenseite

der Wurzel, wo diese Hüllen minder weit hinauf reichen, früher (der Wurzelspitze näher) als an der inneren (T. IV f. 2; T. XIII f. 2).

An der kaum borstendicken ersten Wurzel des Keimpflänzchens fallen einige dieser Verhältnisse, in Folge der untergeordneten Entwickelung des zur Bildung der Wurzelrinde bestimmten Gewebes, nur wenig in die Augen. Sie zu erläutern musste ich vorgreifend den Entwickelungsgang der starken Wurzeln mehrjähriger Individuen besprechen.

Die eine Zelle unterhalb der Insertionsstelle des Spreublattes des ersten Wedels, welche dessen scheidig werdender Grund umfasste, ist der Vegetationspunkt der (secundären) Hauptachse der Pflanze; auf diese eine Zelle ist zu dieser Zeit die Endknospe des Embryo beschränkt. Bei Entfaltung der Knospe theilt sich die Zelle durch wechselnd nach entgegengesetzter Richtung geneigte Scheidewände. Die Linien, in denen diese Wände einander schneiden, sind rechtwinklig zur Vorderfläche des ersten Wedels.

Bis zur höchsten Ausbildung der Pflanze vermittelt die dauernd wiederholte gleiche Theilung der Scheitelzelle des Stammes dessen ferneres Wachsthum. Die Richtung der in ihr auftretenden Scheidewände bleibt dabei beständig die nämliche: rechtwinklig zur grossen Achse des ellipsoïdischen Querdurchschnittes des Stammes, parallel der Furche der Unterseite desselben.

Die Vermehrungsweise der so entstehenden Zellen zweiten Grades gleicht im Allgemeinen der oben geschilderten derer des ersten Wedels. — Nach der Bildung der zweiten secundären Zelle entsteht, an der dem ersten Wedel abgewendeten Seite des Endes der Hauptachse, der zweite Wedel aus Vermehrung der jüngsten Zelle zweiten Grades der Stammknospe. Die Art seiner Entwickelung entspricht völlig der des ersten (T. III f. 12, 13; T. IV f. 1). Seine Anlegung folgt unmittelbar dem Sichtbarwerden der ersten Wurzel; mit seiner Entfaltung hält das Emporwachsen der ihn umhüllenden Scheide des ersten Wedels ziemlich lange Schritt. Hat der zweite Wedel eine Höhe von drei bis vier Zellen erreicht, dann beginnt plötzlich an der Spitze des ersten, der in Folge der Vermehrung seiner Zellen in Richtung der Länge bis ziemlich an die Peripherie des Prothallium vorrückte (T. III f. 13), eine bedeutende Längsstreckung der Zellen, in denen jetzt Chlorophyll auftritt. Der Wedel durchbricht das Prothallium, erscheint als grünes Spitzchen

ausserhalb desselben, und verlängert sich rasch (binnen 48 bis 96 Stunden gewöhnlich um mehr als 1 Zoll), indem die Längsdehnung der Zellen von der Wedelspitze gegen die noch jetzt in Zellenvermehrung begriffene Wedelbasis vorschreitet. — Bei meinen Aussaatversuchen durchbrachen die ersten Wedel keimender Sporen die Prothallien Ende September, 6 Wochen nach der Aussaat. Von da ab erschienen, fortwährend einzeln, durchbrechende Wedel bis Mitte Januar, wo ihre Zahl plötzlich bedeutend abnahm. Von Anfang Februar bis gegen Ende März wurden keine neuen Keimpflänzchen sichtbar; mit dem Eintritte des Frühlings aber kamen sofort deren wieder zum Vorschein, bis Mitte April immer zahlreicher werdend. Noch Mitte Mai enthielten fast alle untersuchten, vom Episporium umschlossenen Prothallien, die von der Aussaat Mitte August des vorhergehenden Jahres herrührten, Embryonen verschiedener Entwickelungsstufen. So bei der Zimmercultur; es ist wahrscheinlich, dass im Freien die im Herbst das Prothallium durchbrechenden Embryonen während des Winters zu Grunde gehen; dass nur die im Frühjahr aufgehenden Keimpflänzchen zu weiterer Entwickelung gelangen.

Bald nach dem ersten Wedel durchbricht auch die erste Wurzel das Prothallium. Sie krümmt sich abwärts, dringt in den Schlamm, so dass der Wedel senkrecht aufstrebt. Das Prothallium sitzt dem Embryo jetzt seitlich an. Die dünne Zellgewebsmasse seines Scheitels umfasst ringförmig den Theil des Keimpflänzchens zwischen der Wurzel und der Vorderfläche des Wedels. Das grosszellige stumpfe Ende der primären Achse der jungen Pflanze ragt in den Hauptheil des Prothallium, dessen Zelleninhalt, wie auch der der Zellen der ersten Achse der Pflanze, von jetzt ab allmälig in wasserklare Flüssigkeit sich umwandelt.

Nach dem Durchbruch von Wedel und Wurzel tritt ein etwa einmonatlicher Stillstand in der Weiterentwickelung des Keimpflänzchens ein. In dem ersten Wedel und der ersten Wurzel dauert Dehnung und auch Vermehrung der Zellen fort; im ersteren durch intercalare Vermehrung der Zellen der Wedelbasis, in letzterer durch das Wachsthum der Spitze. Aber nur sehr langsam und allmälig geht die Anlegung neuer Wedel und Wurzeln vor sich.

Erst nach dem Hervorbrechen aus dem Prothallium erfolgt die schon oben (S. 134, 137) erwähnte zweimalige Längstheilung des Stranges gestreckter Zellen, welcher im Innern von Wedel und Wurzel sich

differenzirte. Die Theilungen scheinen in der ganzen Länge beider unter der Endknospe sich vereinigenden Zellstränge gleichzeitig zu erfolgen (T. IV f. 2). Auch noch nach Anlegung des Gefässbündels dauert, wenn auch in minderem Maasse, die Theilung durch Querwände der Basalzellen des Wedels, an der auch die Zellen des zum Gefässbündel werdenden Stranges ab und zu Theil nehmen. Völlig ausgenommen davon ist eine unpaare Längsreihe von Zellen, welche in der Mitte der Vorderseite des Gefässbündels durch nachträgliche Längstheilung einer Reihe von Cambialzellen auftritt. In diesen unpaaren Zellen, deren Länge bei dem völligen Unterbleiben jeder Quertheilung die aller Nachbarinnen weit übertrifft, treten bald Verdickungsschichten auf, Ringfasern, stellenweis in Spiralfasern übergehend (T. IV f. 4). Das fortdauernde Längenwachsthum des umgebenden Gewebes dehnt das junge Gefäss bis zur Verzerrung, entfernt die einzelnen Ringfasern weit von einander (T. V f. 1).

In ähnlicher Weise erscheinen an der Innenseite der Gefässbündelanlage der Wurzel eine Reihe lang gestreckter Spiral- und Ringfasernzellen, gleich den Gefässzellen des Wedels von prosenchymatischer Form. Da wo die Vorläufer[1]) der Gefässbündel von Wedel und Wurzel unterhalb des Rudiments des zweiten Wedels sich vereinigen, im ersten Knoten der Pflanze, nehmen mehr als eine der Längsreihen der Cambialzellen prosenchymatische Form an; in ihnen allen bilden sich Verdickungsschichten (T. IV f. 4; T. V f. 1, 2). Diese Zellen, das erste Rudiment des Holzes, von kurzspindelförmiger Form (auf die ihnen benachbarten erstreckte sich nicht die intercalare Quertheilung), ähneln in ihrer Gestalt bereits ziemlich den Zellen, aus welchen die Hauptmasse des Holzkörpers der erwachsenen Pflanze bestehen wird.

Von den Zellen des Gewebes, welches dem Gefässbündel des Wedels wie dem der Wurzel angränzt, treten frühe schon viele an ihren Kanten aus dem Zusammenhange; in den Intercellularräumen wird Luft ausgeschieden. Bald vertrocknet das lufterfüllte Gewebe, verschwindet endlich völlig; es bilden sich weite Luftlücken; — wie bekannt, im Wedel vier der Achse parallele cylindrische Hohlräume, welche durch stehenbleibende Zellflächen in eine Reihe von Fächern getheilt werden;

---

1) Précurseurs Mirbel.

in der Wurzel eine grosse Luftlücke vor und neben dem excentrischen Gefässbündel.

Während der Grund des zweiten Wedels die Endknospe zu umscheiden beginnt, bildet diese ihm gegenüber, vor dem ersten, den dritten Wedel (T. V f. 1). Gleichzeitig hebt die Bildung der zweiten Wurzel an. Sie entsteht unter dem zweiten Wedel, der ersten Wurzel gegenüber, dicht neben dem ersten Knoten, aus der Vermehrung einer, dem zum Gefässbündel werdenden Zellstrange benachbarten Zelle; völlig in der nämlichen Weise wie die erste Wurzel, mit der sie einen nach unten geöffneten Winkel von beiläufig 30° bildet. Eine durch die Längsachse des ersten und zweiten Wedels wie der ersten Wurzel gelegte Ebene halbirt in der Regel auch sie (T. VI); kleine seitliche Abweichungen der Richtung sind indess nicht selten (T. V f. 2). In ihrer Längsentwickelung dehnt die Wurzel die äusserste Zellschicht des rudimentären Stämmchens des Keimpflänzchens beträchtlich aus, bevor sie dieselbe durchbricht (T. VI).

Die Anlage zur dritten Wurzel wird, analog der ersten und zweiten, erst dann sichtbar, wenn der dritte Wedel schon einen gewissen Grad der Längsentwickelung erreicht hat. Sie entspringt, wie die zweite, aus der Vermehrung einer, dem unteren Ende des Gefässbündel-Vorläufers des dritten Wedels und dem rudimentären Holzkörper des Keimpflänzchens angränzenden Zelle, somit dicht links über der Ursprungsstelle der ersten Wurzel. In ihrer Entwickelung wendet sie sofort sich etwas seitwärts; sie bahnt ihren Weg durch das Rindengewebe des Stammes der Keimpflanze in von der der ersten Wurzel um etwa 30° seitlich divergirender Richtung.

Auch der vierte und die nächstfolgenden Wedel, mindestens bis zum achten, ordnen sich nach $^1/_2$.[1]) Die Anlegung jedes neuen Wedels erfolgt geräume Zeit vor Aufhören des Wachsthums (der Zellenvermehrung des Grundes) des nächstvorhergehenden. Der unterste Theil des Rückens der Wedel geht ein in die Bildung der Rinde des Stammes, gleich der Basis der Blattunterseite der Equiseten, Lycopdiaceen und Phanerogamen. Die $^1/_2$ Stellung der Wedel bedingt eine überwiegende Zunahme der Masse des Rindengewebes an zwei einander gegenüber-

1) Wie Alex. Braun bereits 1847 nachwies (Flora S. 135) und als nächste Ursache der zweitheiligen Form des Stammes der Isoëtes andeutete.

liegenden, den Rückenflächen der Wedel entsprechenden Stellen des Stammumfanges. Hier entwickelt sich die Rinde zu zwei fleischigen, vom Holzkörper des Stammes schräg abwärts spreizenden, an der Basis (in Folge der Erstarkung jedes neu entstehenden Wedels) breiteren Fortsätzen, die durch eine flache, zur grossen Horizontalachse des Stammes rechtwinklige Einkerbung von einander getrennt sind: die erste Anlage der characteristischen Furche der Unterseite des Stammes.

Mit der Entfaltung jedes jüngeren Wedels, mit dem Wachsthum in die Dicke seiner Basis geht in gleichem Schritt die Zellenvermehrung in Umfang und Durchmesser des älteren Theils des Stammendes, wie des von ihm getragenen, den jungen Wedel umscheidenden Grundes seines Vorgängers. Die lebhafte Zunahme der Zellenzahl um das obere Ende der Längsachse rückt die früher entstandenen Theile des Stamm-Umfanges immer weiter nach aussen. Sie vermögen diesem Drängen längere Zeit zu folgen durch Dehnung ihrer Zellen, vorwiegend in Richtung der Tangenten. In der durch die kleine horizontale Achse des Stammes gelegten Ebene aber unterbleibt diese Dehnung fast völlig. Schon früh reisst hier das Rindenparenchym von aussen (seitlich und von unten) her ein; die Furche der Stammunterseite wird dadurch sehr vertieft.

Kurz nach der Anlegung jedes neuen Wedels entsteht seitlich unter ihm eine neue Wurzel; die vierte neben der zweiten; der dritten schief gegenüber. Die Anfangszelle der fünften Wurzel liegt neben der ersten, gerade gegenüber der dritten. Die sechste entspringt neben der zweiten, schief gegenüber der fünften. Die Ursprungsstellen der Wurzeln des ersten Jahres[1]) fallen somit sämmtlich in eine durch die Einkerbung der Unterseite und die Endknospe des Stammes gelegte Ebene. Die Wurzeln entwickeln sich in aufsteigender Ordnung; jede neu auftretende Wurzel entspringt etwas höher und der Längsachse des Stammes ferner, als die zweitvorhergehende, ihre nächste Nachbarin nach unten. Die Anfangspunkte der Wurzeln der ersten Vegetationsperiode bilden zusammen einen nach unten schwach convexen Bogen (T. VIII f. 2). — Wie die dritte, sind auch die folgenden Wurzeln in ihrer Entwickelung genöthigt, um den Gefässbündeln ihrer Vorgängerinnen auszuweichen, während des Durchbruchs durch die Rinde von jenen ab-

1) Wie auch die aller folgenden Vegetationsperioden.

wärts gegen die immer schärfer hervortretende Furche des Stammes sich zu beugen. Divergirte die dritte Wurzel rechts von der Längsachse des elliptischen Stammquerschnitts, so wird die vierte nach links von ihr ablenken; die fünfte gleichfalls links; die sechste rechts und so fort. Jede neue Wurzel convergirt in spitzerem Winkel zur kleinen Horizontalachse des Stammes, die letzten des ersten Jahres der Pflanze sind ihr und der Furche der Stammunterseite ziemlich parallel (T. VIII f. 3ᵇ).

Die Wurzeln, während des Durchbruchs durch die Rinde scharf nach unten sich krümmend, treten auf der unteren Fläche des Stammes in zwei der Einkerbung desselben ziemlich parallelen Reihen hervor. Die Durchbruchstellen lassen sich betrachten als eine langgezogene Ellipse geordnet.[1]) Die dem Centrum des Stammes zunächst hervortretenden tiefsten Wurzeln sind die ältesten, die an den breiten Seitenrändern hervorsprossenden höchsten die jüngsten. Die Gefässbündel der dritten und der folgenden Wurzeln, excentrisch gleich denen der ersten und zweiten, sind der der Stammfurche zugewendeten Seite der Wurzel angerückt; die Excentricität bezieht sich nicht auf die Längsachse des Stammes, sondern auf die durch diese und die Stammkerbe gelegte Ebene, in welche die Ursprungsstellen der Wurzeln fallen.

Das Gewebe der Region des Stammes, in welcher die dicht an einander gedrängten horizontalen Anfangsstellen der zu Wedeln abgehenden Gefässbündel zusammentreffen, bildet sich zum aufwärtswachsenden Theil des verhältnissmässig schwachen Holzkörpers um, welcher ohne ein Mark einzuschliessen die Längsachse des Stammes einnimmt.

In der Keimpflanze, so lange die $1/2$ Stellung der Wedel dauert, ist diese obere Hälfte des Holzkörpers von zweischneidiger Gestalt. Ihre meist spindelförmigen Zellen — Netz- und Spiralfaserzellen gemischt mit wenigen zartwandigen — haben ziemlich die gleiche Richtung; sie sind parallel dem grösseren Querdurchmesser des Holzkörpers (T. VII f. 2, 3; T. IX f. 1ᵇ); ein Längsschnitt durch die Stammfurche durchschneidet quer sämmtliche Holzzellen (T. VIII f. 1, 2). Mit dem Uebergange der Anordnung der Wedel durch die $1/3$ in die $2/5$, $3/8$, $5/13$, $8/21$ Stellung wird der obere Theil des Holzkörpers drehrund, Richtung und Form seiner Zellen sehr mannigfaltig, dem ersten Blicke

1) Mohl, vermischte Schriften S. 127.

anscheinend regellos; besonders dadurch, dass jetzt noch viele andere, als die ursprünglichen Gefässbündelzellen in die Holzbildung eingehen. Es werden auch solche Zellen zu Spiralfaserzellen, die zwischen den convergirenden Anfangsstücken der Gefässbündel liegen; eben dadurch schliesst die Holzmasse zur Cylinderform sich ab.

Die dicht an einander gedrängten Anfangsstellen der Wurzeln stellen die untere Hälfte der Holzmasse dar: eine nach oben concave, bogenförmige Aneinanderreihung von Spiralfaserzellen, rechtwinklig zur grösseren Horizontal-Achse der im ersten Jahre zweischneidigen oberen Holzmasse.

Am Schlusse der ersten Vegetationsperiode der Keimpflanze füllen sich die Zellen der Rinde mit Amylumkörnern, untermischt mit einigen wenigen Oeltröpfchen. Die den Holzkörper zunächst umschliessenden Zellen aber bleiben vermehrungsfähig. Sie theilten sich schon einige Zeit vor Eintritt der ersten Winterruhe ein- bis dreimal durch der Längsachse des Holzkörpers parallele Wände. So bildete sich ein den Holzkörper seitlich und von unten vollständig umschliessender Mantel von Cambium, der nach oben übergeht in das entwickelungsfähige Zellgewebe der Endknospe.

Mit dem Wiedererwachen der Vegetation im zweiten Frühjahre beginnt eine lebhafte Vermehrung der Zellen dieser Cambialschicht. Die Zunahme an Masse hält gleichen Schritt mit dem Wachsthum in die Dicke des aus Entfaltung der Endknospe hervorgehenden neuen Stammtheils. Am Bedeutendsten ist die Vermehrung der Cambialzellen an den Seiten des Holzkörpers; schwächer in der, den unteren halbmondförmigen Theil des Holzkörpers umhüllenden Hälfte des Cambium.

Die Entwickelung des Cambium drängte das mit assimilirten Stoffen gefüllte Rindengewebe nach aussen. Die sie durchziehenden Gefässbündel wurden dabei sehr bedeutend in die Länge gedehnt, doch nicht sofort bis zur Zerstörung. Augenscheinlich dauert noch die Lebensthätigkeit der Gefässbündelzellen; sie folgen durch eigene Dehnung ihrer Wände der Ortsveränderung des sie umgebenden Gewebes. Nur die Verdickungsschichten der Gefässe wurden während dieser Vorgänge wesentlich verändert; auf kleine Strecken aufgelöst, stellenweis verzerrt, so dass jede Spur von Ordnung ihrer Stellung aufhört (T. XII f. 3). — Auch die Funktion des Gefässbündels scheint noch nicht zu Ende mit dem Beginn der seiner Entstehung nachfolgenden Vegetationspe-

riode. Das in den Zellen der nach aussen gedrängten vorjährigen Rinde enthaltene Amylum und Oel wird allmälig aufgesaugt und den fortwachsenden Theilen der Pflanze zugeführt. Bei Ende jedes Vegetationsjahres enthalten die Zellen der vorjährigen Rinde nur wasserhelle Flüssigkeit. Die Nahrungsstoffe, welche in den Rindenzellen aufgespeichert sind, den fortwachsenden Theilen der Pflanze zuzuleiten giebt es keinen andern Weg, als die durch Entwickelung des ihre Basen umgebenden Cambium bereits in die Länge gezerrten Gefässbündels.

Die nach aussen gedrängte alte Rinde stirbt von der Peripherie her allmälig ab; ihre Zellwandungen färben sich tiefbraun, endlich wird sie zerstört. Die neue Rinde verhält sich der alten ähnlich darin, dass ihre Zellen in dem die Stammfurche auskleidenden Theile nur wenig in die Breite sich dehnen. Die Einkerbung des Stammes, die schon durch die mindere Entwickelung der ihr entsprechenden Region des Rinde bildenden Cambium tiefer erscheint als im vorhergehenden Jahre, wird es noch mehr durch das regelmässige Einreissen des nicht quer gestreckten Gewebes der Rinde von den Seiten her.

Mit der von ihnen durchsetzten Rinde wurden die vorjährigen Wurzeln weit nach aussen und unten gerückt. Gleich jener färben sie sich tiefbraun und sterben ab.

Die neuen Wurzeln, bestimmt zur Ernährung der Pflanze in der laufenden Vegetationsperiode, entstehen an der convexen Kante des unteren, halbmondförmigen Theiles des Holzkörpers aus Vermehrung einzelner dem Holze benachbarter Cambialzellen. Die Regel ihrer Zellenvermehrung entspricht in fast allen Punkten der oben geschilderten der ersten Wurzel; weicht nur darin ab, dass während des Durchbruchs durch die Stammrinde die vergänglichen Zellschichten der Wurzelhaube sehr überwiegend sich entwickeln, die bleibende Rindenschicht der Wurzel dagegen sehr schwach (T. XVI f. 5).

Die erste der zweijährigen Wurzeln bildet sich dicht unter dem Ursprungsorte der ersten Wurzel der Keimpflanze, da wo die Entwickelung des Cambium das Gefässbündel der zum Abwerfen bestimmten Wurzel an seiner Ansatzstelle abgerissen hat. Die zweite Wurzel entspringt unter der Einfügungsstelle der zweiten vorjährigen, die dritte unter der dritten jener, und so fort. — Auch in ihrer Richtung entsprechen die neuen Wurzeln völlig den älteren. Die beiden ersten, einander gegenüber entspringenden streben von den Seitenflächen des

Niederwuchses des Holzes hinwegekrümmt unter sich; sie brechen einander gegenüber senkrecht unter der Endknospe zu beiden Seiten der Stammfurche hervor. Die dritte und die folgenden Wurzeln biegen sich mehr und mehr seitlich; die letzten beiden Wurzelpaare einer Vegetationsperiode durchlaufen die Rinde wiederum so ziemlich der Stammfurche parallel. Alle Wurzeln beschreiben, während sie die Rinde durchwachsen, einen zur Einkerbung des Stammes concaven flachen Bogen. Ein Längsschnitt, durch die Stammkerbe geführt, legt in jeder Stammhälfte nur Anfang und Spitze der älteren der noch in der Rinde verborgenen Wurzeln blos; der mittlere Theil der Wurzel ist von der Schnittfläche hinweg gekrümmt (T. X f. 1).

Wie im ersten Jahre wird auch in allen folgenden die Rinde dicht unter der tiefsten Stelle der Einkerbung von den neu hervortretenden Wurzeln durchbrochen. — Die gebräunten vorjährigen Wurzeln stehen weit nach aussen von den diesjährigen. Da mehrere, zwei bis vier Jahrgänge derselben bis zur völligen Zerstörung sich zu erhalten pflegen, so tritt, besonders an älteren Pflanzen, mit grosser Schärfe die von Mohl hervorgehobene Eigenthümlichkeit zu Tage, dass die ältesten Wurzeln die äussersten, anscheinend höchsten, die jüngsten die innersten, anscheinend tiefsten sind. Wie aus dem Vorstehenden hervorgeht, eine eben nur scheinbare Abnormität, beruhend auf der ungewöhnlich starken Entwickelung der Rinde und deren jährlicher Erneuerung von innen heraus.

Es ist ausnahmslose Regel, dass die mittelsten einer jeden Generationsreihe von Wurzeln die ältesten sind, dass die den seitlichen Endpunkten der Stammfurche näheren später hervorbrechen, als die in deren Mittelpunkte. Dieses Verhältniss wird aber nicht selten dadurch minder augenfällig, dass die Dauer jeder Wurzel weit minder an bestimmte Frist gebunden ist, als die der Wedel. Ziemlich ausnahmslos sind die äussersten Wurzeln der vorhergehenden Reihe noch in Lebensthätigkeit, wenn die ersten, innersten der nächsten hervorzusprossen beginnen. Aeltere, kräftige Individuen, die im Laufe eines Jahres eine sehr grosse Anzahl (bis zu 20) Wedeln bilden, entwickeln während dieser Zeit zwei vollständige Generationsreihen von Wurzeln; der ganze Cyclus mit der tiefsten innersten anhebend und bis zur äussersten fortschreitend, wird zweimal hinter einander gebildet (T. X f. 1). An den reich bewurzelten Isoëten des festen Landes Südeuropas und Nord-

afrikas steigert sich diese Erscheinung bis zur Hervorbringung von sechs Generationsreihen von Wurzeln in der nämlichen Vegetationsperiode. — Mit dem Schlusse jedes Cyclus von Wurzeln wird der Zahl der vorjährigen Wurzeln ein Doppelpaar hinzugefügt, welches an den Hörnern des halbmondförmigen unteren Theils des Holzkörpers seinen Ursprung nimmt (T. X f. 1).

Die Stellung der Gefässbündel der Wurzeln bleibt die ganze Lebensdauer der Pflanze hindurch die gleiche, wie im ersten Jahre: stets sind sie der Seite der Wurzel dicht angerückt, welche der Einkerbung des Stammes sich zuwendet. — Die Cambialzellen zwischen den Anfangsstellen der zu neuen Wurzeln abgehenden Gefässbündel verholzen zum grösseren Theile; einzelne Zellen zwischen den durch Ring- und Spiralfaserzellen verdickten bleiben dünnwandig (T. XIV f. 1). So wächst die seitlich abgeplattete untere Hälfte des Holzkörpers an ihrer convexen Kante stetig nach unten, auch im Querdurchmesser zunehmend.

Die Wurzeln der Isoëtes pflegen während ihrer Längsentwicklung wiederholt, bis zu vieren Malen, gabelig sich zu verzweigen[1]). Der Anordnung der Zellen vor sehr kurzer Zeit gegabelter Wurzeln nach zu schliessen, scheint es, dass die Gabelung anhebt mit Längstheilung der Zelle 1. Grades der Wurzelspitze durch eine dem grössern Querdurchmesser des niederwachsenden Holzes rechtwinklige Wand (T. XIII f. 1). Die Gabelzweige der Wurzel spreizen von einander in Winkeln von beiläufig 30°; die beiden ersten parallel der Stammfurche. Die Richtung der nächsten Verästlungen ist um 90° von dieser verschieden. Die excentrischen Gefässbündel der Wurzelgabeln sind stets an die, dem Schwesterzweige der Wurzel zugewendete Seite gerückt (T. XIII f. 2).

Alljährlich wiederholen sich die gleichen Vorgänge. Die ältere Rinde wird abgestossen, durch neue ersetzt. Der obere cylindrische Theil des Holzkörpers wächst aufwärts durch Verholzung der seinen Scheitel überlagernden Zellen der Endknospe und Anlagerung der Anfänge zu neuen Wedeln abgehender Gefässbündel. Sein halbmondförmiger unterer Theil nimmt an der convexen Kante im Umfange zu durch die Anfügung der Basen zu neuen Wurzeln verlaufender Gefässbündel.

---

1) Entdeckt von Alexander Braun, Flora 1847, S. 33.

Dabei erstarkt die Pflanze fortwährend, die Zahl der Wedel und Wurzeln mehrt sich in jeder neuen Vegetationsperiode.

Die reichliche Entwickelung seitlicher Achsen (der Wedel) verbunden mit dem völligen Unterbleiben intercalarer Zellenmehrung in den Gliedern der Hauptachse hat zur nothwendigen Folge, dass der jüngere Theil der aus den verschmelzenden Basalstücken der seitlichen Achsen gebildeten Rinde den Vegetationspunkt der Hauptachse weit überragt. Der Scheitel älterer Pflanzen zeigt eine beträchtliche trichterförmige Vertiefung, deren einwärts geneigter Böschung die einander umscheidenden jüngeren Wedel aufgesetzt sind (T. X f. 1; T. XII f. 1). Den Grund der kraterförmigen Einsenkung nimmt die eigentliche Endknospe ein, ein stumpfer Kegel von Zellgewebe (T. XI f. 1, 2), welchen die Rudimente der jüngsten Wedel, bei 5- bis 8jähr. Pflanzen in $^5/_{13}$ Stellung, in ziemlicher Entfernung umstehen (T. X f. 3, 4).

Die Regel der Zellenvermehrung der Endknospe bleibt, wie schon oben (S. 138) erwähnt, die ganze Lebensdauer der Pflanze hindurch die gleiche. Die alternirend schrägen Wände, durch welche die Scheitelzelle in stetig wiederholter Folge sich theilt, sind gegen die grossen Lappen der Rinde geneigt; eine durch die Stammfurche gelegte Ebene schneidet jene Wände rechtwinklig. Die Theilhälften der Zellen zweiten Grades theilen sich durch Querwände frühe, schon als Zellen dritten oder vierten Grades (T. XI f. 1, 2; T. XIII f. 5). Dicht unter dem Scheitel der Endknospe wird die der ersten Anlage nach leiterartige Anordnung der Zellen umgewandelt in eine concentrisch schalige. Die inneren, der Achse des Stammes näheren Zellen der Nachkommenschaft der dritt- und viertjüngsten Zelle zweiten Grades strecken sich sehr beträchtlich in die Breite; radial in Bezug auf die Längsachse des Holzkörpers. Noch oberhalb der Ursprungsstelle des jüngsten Wedels wird dadurch die konische Endknospe völlig abgeflacht (T. XI f. 1, 2).

Die alljährliche Verjüngung der Cambialschicht vermehrt und erneut nicht allein das Rindengewebe; auch dem Holze älterer kräftiger Individuen werden neue Spiralfaserzellen angelagert, wenn auch nur sparsam. Einzelne Zellen des Cambium, durch zwei bis drei Cambialzellen von der ältern Hauptmasse des Holzkörpers getrennt, zeigen oft Verdickungsschichten, die durch ihre Zartheit und Farblosigkeit sich unzweifelhaft als vor Kurzem entstandene zu erkennen geben (T. XII f. 2). Den ältesten, in der ein- und zweijährigen Keimpflanze gebildeten

Theilen des Holzkörpers werden neue Elementarorgane in keinem Falle angelagert; das zweischneidige untere Ende seines Aufwuchses erhält die ganze Lebensdauer der Pflanze hindurch seine Form unverändert (T. X f. 1; T. XII f. 1). Die Bildung neuen Holzes im Umfange des bereits vorhandenen scheint nur einige Vegetationsperioden hindurch zu dauern. Alle Längsdurchschnitte drei bis acht Jahre alter Pflanzen zeigen den Aufwuchs des Holzes stets nahe unter dem oberen Ende etwas bauchig. Diese Stelle der grössten Dicke des Holzes rückt somit während der Entwickelung der Pflanze stetig aufwärts.

Die dem Holzkörper angesetzten Anfangsstücke der Gefässbündel, welche zu vor mehreren Jahren entstandenen Wedeln und Wurzeln abgingen, werden von dem sie seitlich umgebenden, in steter Lebensthätigkeit begriffnen Cambium zusammengedrückt (T. XII f. 4), endlich zerrissen, nach aussen gerückt und der Stumpf, welcher dem Holzkörper ansitzt, vom Cambialgewebe überwallt, ganz ähnlich der Weise, in welcher ein Baumstamm von Aesten seines unteren Theils sich reinigt.

Auf ihren frühesten Entwickelungsstufen lassen auch die kräftigen Wedel mehrjähriger Pflanzen, von der Vorderfläche gesehen, die leiterartige Anordnung ihrer Zellen klar erkennen (T. XIV f. 2, 3), welche aus der Art der Vermehrung der Zelle ersten Grades (S. 132) nothwendig folgt. Bald aber wird dieses Verhältniss undeutlich durch die rasche und kräftige Entwickelung des Wedels in die Dicke. Das Bild, welches etwas weiter entwickelte Wedel von oben betrachtet geben (T. X f. 3, 4), lässt schliessen, dass jetzt in der Endzelle nach je zweien Theilungen durch zur Vorder- und Rückenfläche des Wedels rechtwinklige Scheidewände solche Wandungen auftreten, die zu den Seitenflächen des Wedels rechtwinklig, dessen Vorder- oder Rückseite zugewendet sind.

Isoëtes lacustris zeigt eine deutliche Periodicität im Wechsel steriler und fruchtbringender Wedel.[1]) Bei den terrestrischen Arten ist dieser Wechsel noch auffälliger hervortretend. Die mikroskopische Untersuchung zeigt, dass die Wedel ein volles Jahr vor ihrer Entfaltung angelegt werden; im Hochsommer und Herbst die furchtbaren, im Frühjahr und Vorsommer die sterilen. Während des Winters ist die Ent-

1) Geschildert von Alex. Braun, Flora 1847, S. 34. Von Bischoff wird sie schwer erklärlicher Weise angezweifelt; kryptogamische Gewächse S. 84.

wickelung der Wedel bedeutend verlangsamt, doch unterbleibt sie nicht völlig. Die im Winter entstandenen, Ende des nächsten Herbstes an's Licht gelangenden Wedel sind auffallend kümmerlich ausgebildet; sie bilden durch die spärliche Entwickelung des Laubtheils bei starker Ausbildung der Basis den Uebergang zu den niederblattartigen Wedeln ohne alles Laub, wie sie bei terrestrischen Isoëten, I. Durieui und Hystrix namentlich, jede Vegetationsperiode eröffnen und schliessen.[1]) Bei halb-terrestrischen Arten, so bei I. velata und adspersa, haben die letzten Wedel eines Jahres, weit schärfer ausgeprägt als bei I. lacustris, einen verkümmerten Laub- und einen wuchernden Scheidentheil, dessen Zellen hier dicht mit Stärkemehl und Oel gefüllt sind.

Nur an den ersten Wedeln der Keimpflanze entspringt das Spreublatt unmittelbar über der Ansatzstelle des Wedels. Oft schon am zweiten, in allen Fällen aber am dritten und den folgenden Wedeln ist die Zelle, welche durch blasige Wölbung ihrer Aussenwand den Grund zur Bildung des Spreublattes legt, mindestens um eine Zelle vom Wedelgrunde entfernt (T. V f. 2; T. VI, VII f. 3 u. f.) Die intercalare Zellenvermehrung der Wedelbasis erfolgt mit besonderer Lebhaftigkeit in dieser einen Zelle und den mit ihr in einer Horizontalebene liegenden. Dadurch wird das Spreublatt am Wedel hoch empor gerückt (T. XI f. 2). Dicht unter der Schuppe entspriesst dann dem Wedel eine deren Grund bedeckende flache dreiseitige Zellenmasse (T. XIV f. 4—6). Ueber ihre Seiten hinaus entwickeln sich nach abwärts strebend die beiden unteren Ecken der dreieckigen Schuppe; die Basis dieser wird herzförmig, wie bei den Spreublättern der Polypodiaceen (T. IX f. 8). Ihre dem Gewebe des Wedels eingefügten Basalzellen entwickeln währenddem eine Lebensthätigkeit, die auffallend absticht von dem frühen Stillstande des Wachsthums ihres freien Theiles. Die horizontale Zellenreihe, hervorgegangen aus der Vermehrung der von der Wedelsubstanz umschlossenen ersten Zelle zweiten Grades des Spreublatts, wandelt sich um durch eine Folge rasch wiederholter Theilungen in einen quergestreckten ellipsoidischen Zellenkörper, dessen beide Enden unter steter Vermehrung der Zellen endlich aufwärts wachsen, so dass die Basis der Schuppe zu einer fleischigen Masse sehr kleiner Zellen mit trübem Inhalte wird, von Form eines nach oben geöffneten, zur Längsachse des Wedels ein-

1) Alex. Braun in der exploration scientifique de fr. Algérie, T. 36 f. 1^b, 2^b.

wärts geneigten Hufeisens. Auch nach unten, in die dreiseitige Sprossung der Vorderfläche des Wedels, greift die Wucherung des Spreublattgrundes, das vorhandene Zellgewebe zum Theil verdrängend (T. IX f. 1; T. XIV f. 8). Gegen das Ende der Längsentwickelung des Wedels verholzen durch spiralige Verdickungsschichten diejenigen seiner Zellen, welche der so bedeutend entwickelten Basis der Schuppe angränzen. In diese Holzbildung[1]) gehen ziemlich alle Zellen des Inneren der einer Ligula vergleichbaren Sprossung der Vorderseite des Wedels ein (T. IX f. 1). Von ihnen aufwärts ist es nur die eine der Einfügung des Spreublatts nächstbenachbarte Zellenlage, welche zu Spiralfaserzellen sich umwandelt; dagegen verholzt das ganze von den beiden Hörnern der halbmondförmigen Schuppenbasis eingeschlossene Gewebe. Die Mitte des unteren Endes der spät auftretenden Holzmasse reicht dicht an das axile Gefässbündel des Wedels.

Die im dritten Jahre nach der Keimung angelegten, im vierten zur Entwickelung kommenden Wedel der Isoëtes lacustris bringen die ersten Früchte. Schon in frühester Jugend des Wedels, mit dem Eintritt der intercalaren Vermehrung seiner Basis, wird das Sporangium[2]) angelegt. Von den zwei Zellen, in welche die Zelle unterhalb der Einfügungsstelle des Spreublatts durch Auftreten einer Querwand zerfällt, wird die obere zur Anfangszelle des die Basis der Schuppe deckenden Ligularfortsatzes, die untere zur Urmutterzelle des Sporangium (T. XIV

---

1) Zuerst beobachtet von Mettenius, Linnaea 1847.

2) Der von Schleiden vertretenen Ansicht entgegen, welche vermeintlichen Analogieen mit niederen Kryptogamen zu Liebe nur die Sporenmutterzellen der Moose und Gefässkryptogamen Sporangien genannt wissen will, halte ich diesen Ausdruck fest, gleich der grossen Mehrzahl der Botaniker, für die eigentlichen, Sporenmutterzellen und Sporen einschliessenden Früchte: für die Kapseln der Laub- und Lebermoose, für die Früchte der Farrn und Lycopodien, für die Bestandtheile der Fruchtstände der Equiseten und Rhizocarpeen, welche zunächst die Sporen enthalten. Schon darum, weil die Benennung „Sporangium" ursprünglich den Farrnfrüchten ertheilt wurde. Es erscheint weder nöthig noch räthlich, den Fortpflanzungsorganen der Kryptophyten Link's, der, so viel wir wissen, geschlechtslösen Pilze, Flechten und Algen, die gleiche Benennung zu geben mit denen der Charen, Moose und Gefässkryptogamen, welche eine unzweifelhafte Geschlechtsdifferenz, in ihrer Entwickelung einen auf's Deutlichste hervortretenden Generationswechsel zeigen. Zudem ist der Ausdruck „Sporangium" in Bezug auf die niederen Kryptogamen völlig entbehrlich. Die beschreibende Botanik besitzt bereits eine mehr als genügende Reihe treffender Benennungen für die in Rede stehenden Organe.

f. 4). Durch wiederholte Theilungen nach allen drei Richtungen, bei denen die Vermehrung in die Länge vorwiegt, verwandelt die Letztere sich bald in einen ovalen Hügel von Zellgewebe, dessen Längslinie mit der des Wedels zusammenfällt (T. XIV f. 5, 6). Die Längs- und Quertheilungen durch auf der Vorderfläche des Wedels senkrechte Wandungen werden lebhafter in jeder, durch den freien Aussenwänden der Oberflächezellen parallele Theilwände gebildeten neuen äusseren Zellenlage des Rudiments der Frucht. Das junge Sporangium wird binnen Kurzem zu einer eyförmigen Zellenmasse, die mit verhältnissmässig kleiner Grundfläche dem Wedel ansitzt. Das Gewebe desselben, welches der Anfügungsstelle des Sporangium angränzt, überwuchert später — bei Beginn der Sporenbildung — die Frucht von allen Seiten her, am stärksten von oben; es bildet sich ein weit über das Sporangium greifender häutiger Saum, der Schleier der beschreibenden Botaniker (T XIV f. 8).

Bis kurz vor dem Auftreten dieser letzten Wachsthumserscheinung des Wedelgrundes besteht das Sporangium durch und durch aus gleichartigen, zartwandigen Zellen, die jetzt in dreierlei Gewebe sich zu differenziren beginnen. Die beiden äussersten Zellenlagen nehmen mehr und mehr Tafelform an; sie werden zur Kapselwand. Das Innere scheidet sich in Gruppen zartwandig und in innigem Zusammenhange bleibender Zellen — die Urmutterzellen der werdenden Sporen — und in diese Gruppen von einander trennende Platten, aus je zweien Lagen von Zellen gebildet, in deren Intercellularräumen Luft sich ausscheidet. Die Zellen der Wandung des Sporangium sowohl als die des zur Erzeugung von Fortpflanzungszellen bestimmten Gewebes vermehren sich noch längere Zeit durch Theilung. Die Zellen der Platten, welche die Portionen jenes Gewebes von einander scheiden, folgen der Grössenzunahme des Sporangium durch Streckung ihrer Wände.

Endlich treten die Sporenmutterzellen aus dem Zusammenhange, sie nehmen Kugelform an. In den zur Bildung kleiner Sporen bestimmten Sporangien bilden sich einige Theilungsgenerationen der Urmutterzellen mehr, als in den Makrosporen bringenden; die Sporenmutterzellen der Letzteren sind erheblich grösser. — Die Sporenmutterzellen zeigen nach wie vor der Vereinzelung sehr deutlich einen grossen Kern. Allmälig werden die Umrisse desselben blässer; endlich entschwinden sie der Beobachtung, nachdem zwischen der Peripherie des Kerns und

der Innenwand der Zelle zwei stark abgeplattet sphärische Anhäufungen körnigen Schleims aufgetreten waren (T. XIV f. 14). Nach dem Verschwinden der Membran des primären Kerns nehmen jene Schleimhaufen sofort ellipsoïdische Gestalt an und erscheinen als zwei secundäre Kerne. Entweder theilt sich nun die Sporenmutterzelle, nach Einschnürung des Primordialschlauchs im Aequator (T. XIV f. 15) durch eine Querwand (T. XIV f. 6[b]); jede beider Theilhälften wird nach Verflüssigung der Membran ihres ellipsoïdischen Kerns und Auftreten zweier kugeliger Tochterkerne in zwei Tochterzellen von Form von Kugelquadranten getheilt (T. XIV f. 18, 20). Oder aber die beiden secundären Kerne der Mutterzelle werden verflüssigt, noch bevor die Theilung der Zelle begann; es treten vier tertiäre Kerne von Kugelform auf (T. XIV f. 16,[a] 17[a b]); die Zelle theilt sich mit einem Male in vier Tochterzellen. Dieser letztere Fall ist bei Weitem der seltenere. Auch bei seinem Eintreten liegen die vier Kerne in der Regel in einer Ebene, die vier Tochterzellen der Sporenmutterzelle (die Specialmutterzellen) erhalten wie im ersten Falle die Form von Kugelquadranten. Nur höchst selten kommt die Anordnung der Specialmutterzellen nach den Ecken eines Tetraëders vor. Die Scheidewände, durch welche die Specialmutterzellen getrennt werden, sind von gallertartiger Beschaffenheit. Sie quellen in Wasser leicht und rasch auf; — werden die Primordialschläuche durch verdünnte Säuren zur Contraction gebracht, so erfolgt das Aufquellen der Zellwände in demselben Maasse, als jene Primordialschläuche einschrumpfen.

Die Specialmutterzellen der kleinen Sporen trennen sich sehr bald nach ihrer Bildung; sie behalten in der Vereinzelung ihre dreikantige (selten sechskantige) Form. Jetzt erst, analog der gleichen Erscheinung bei Equisetum[1]) entsteht in jeder Specialmutterzelle durch freie Zellbildung, wiederholt um den bei Bildung der Specialmutterzelle schon vorhandenen Zellenkern, eine Tochterzelle, deren Gestalt derjenigen der Specialmutterzelle genau entspricht. Sie bekleidet sich mit dem zu Eingang dieser Schrift beschriebenen Episporium und wird durch Verflüssigung der Specialmutterzelle frei, geraume Zeit bevor die aufreissende Wand des Sporangium die reifen, im Aeusseren nicht weiter veränderten Sporen entlässt. Die Specialmutterzellen der grossen Sporen,

1) Vergleichende Untersuchungen S. 99.

die Länge wachsend,[1]) bohrt senkrecht abwärts in das Gewebe des Prothallium (T. XIX f. 2; T. XVIII f. 7), durchbricht endlich dasselbe und dringt rasch ziemlich tief in den Boden. Wenig später bricht auch der aufwärts wachsende Laubspross aus dem Prothallium hervor. Er bildet eine mässige Anzahl, zehn bis funfzehn, gestreckter Internodien. Alle seine Scheidenblätter sind dreizähnig; dies gilt von allen untersuchten Arten, von Equisetum arvense wie von E. pratense und variegatum.

Nach dem Hervortreten von Wurzel und Laubspross aus dem Prothallium bilden sich im Inneren beider Organe die Gefässbündel: im Stengel drei in engem Kreise stehende; in der Wurzel ein einziges axiles (T. XIX f. 5). Im ersten Knoten der Keimpflanze, da wo der erste Laubspross und die erste Adventivwurzel von der primären Achse sich abzweigen, wandeln sämmtliche Zellen der Region, in denen die Gefässbündel beider sich vereinigen, zu kurzen Ring- und Spiralfaserzellen sich um, eine geschlossene Holzmasse ohne Mark bildend (T. XIX f. 3). Die primäre Achse des Embryo, bei den Equisetaceen von weit beschränkterer Entwickelung als bei Farrn und Rhizocarpeen, jetzt seitlich an der Keimpflanze stehend, bleibt gefässlos. Ihre Zellen, in denen nun viel Chlorophyll auftritt, strecken sich aufwärts.

Hat der erste beblätterte Stengel einen gewissen Grad der Entwickelung erreicht, so entsteht im Innern seines Rindengewebes eine Adventivknospe aus Vermehrung einer Cambialzelle seiner Basis, auf der Höhe der soliden Holzmasse des ersten Knotens. Diese Knospe steht an der Seite des Laubsprosses, welche der primären Achse der Keimpflanze abgewendet ist, unter der Einsenkung zwischen zweien Lappen der ersten Scheide (T. XIX f. 3). In dieser ihrer Stellung wie in der Art ihrer Entwickelung entspricht sie vollständig den Adventivknospen, durch welche alle und jede Verzweigung der entwickelten Schafthalmpflanze erfolgt.[2]) Rasch und stark heranwachsend, gelangt sie nach Durchbrechen der Rinde ihres Muttersprosses bald ins Freie. Von der ersten beblätterten Achse unterscheidet sie sich durch vierzähnige Blattscheiden, und beim Hervortreten durch blassgelbe, elfenbeinähnliche Farbe. Der neue Sprössling, von weit kräftigerer Entwickelung als der erste Spross, ist das zweite Glied in der Reihe von Erstar-

1) Vergleichende Untersuchungen, S. 96.
2) Vergleichende Untersuchungen, S. 94.

Soweit unsere Kenntniss reicht, steht unter allen Gefässkryptogamen Isoëtes völlig allein durch den Besitz einer jährlich sich verjüngenden Cambiumschicht und eines am oberen wie am unteren Ende in die Länge wachsenden Stammes; Eigenschaften die sich gegenseitig zu bedingen scheinen. Durch die Organisation ihres Stammes, insbesondere durch die des niederwachsenden Theiles des Holzkörpers, nähert sich Isoëtes mehr noch den Dikotyledonen mit unentwickelten Stengelgliedern und von unten her nicht absterbendem Stamm, wie Cyclamen, Beta, als den wenigen Monokotyledonen mit in die Dicke wachsendem Stamme, wie Dracaena, Cordyline, Tamus. Genauere Untersuchungen erst, als die Botanik bis jetzt sie besitzt, werden entscheiden können, ob die Art der Anordnung der vom Niederwuchs des Holzes der Isoëtes aus hervorsprossenden Wurzeln in völligem Gegensatze steht mit derjenigen der Beiwurzeln, welche aus der Hauptwurzel der Dikotyledonen hervorbrechen. Einige der gemeinsten Culturpflanzen, Rüben und Rettige, zeigen oft eine so deutliche Regelmässigkeit in Stellung und Entstehungsfolge der Beiwurzeln, dass die Erlangung sicherer allgemeinerer Ergebnisse für wahrscheinlich gelten kann.

Die Vermehrung der Endzelle der Hauptachse von Isoëtes lacustris, der Art mit zweigetheiltem Stamme und $1/2$ Stellung der Wedel der Keimpflanze, erfolgt durch wechselnd nach zwei diametral entgegengesetzten Richtungen geneigte Wände. Die Scheitelzellen der Endknospen von Arten mit dreifurchigem Stamme und $1/3$ Stellung der Wedel keimender Pflanzen[1]) theilen sich durch eine Reihenfolge von Wänden, welche nach drei verschiedenen Richtungen, gegen die Stammfurchen geneigt, gestellt sind. Dieser Nachweis darf als erster Schritt gelten zur Erkennung eines Zusammenhanges zwischen der Regel der Zellenvermehrung des Endes einer Achse und den Stellungsverhältnissen der ihr entspriessenden appendiculären Organe. Eine analoge Erscheinung bietet die vergleichende Untersuchung verschiedenartiger Farrnkräuter. Die Stämme der Polypodien, Lomarien, Niphobolen, der Pteris aquilina, die kriechenden Ausläufer von Nephrolepis zeigen bei $1/2$ Stellung der Wedel eine Regel der Zellenvermehrung der Endknospe, welche genau

1) An getrockneten sehr jungen Exemplaren der Isoëtes tenuissima von mir gesehen. Delile's wiewohl rohe Abbildung (*Mém. du Muséum* T. XVI [1827] pl. 6 f. 11) lässt über die gleiche Anordnung der Wedel der Keimpflanze von Isoëtes setacea keinen Zweifel.

übereinstimmt mit der von Isoëtes lacustris. Andererseits entspricht die Art der Zellenvermehrung der Hauptachse von Aspidium filix mas und spinulosum, von Cystopteris fragilis, Scolopendrium officinarum, Struthiopteris germanica, Onoclea sensibilis genau derjenigen der Isoëten mit drei Stammfurchen. Die letztgenannten Farrnkräuter zeigen sämmtlich $1/3$ Stellung der Wedel der Keimpflanze, die bei vorschreitender Ausbildung des Farrn in die $3/8$ $5/13$ .... Stellung übergeht. Bei ihnen, wie bei der erst erwähnten Reihe von Farrn und bei Isoëtes lacustris, sind die Theilwände, welche in der Scheitelzelle der Hauptachse der jungen Pflanze auftreten, parallel den Vorderflächen der ersten Wedel und rechtwinklig zu den wechselnd geneigten Theilungswänden der Scheitelzellen dieser letzteren.

In so offenbarer Zusammengehörigkeit auch diese Thatsachen stehen, so ist es dennoch unzweifelhaft, dass sie nur die entfernte Andeutung eines inneren Zusammenhanges zweier wichtiger Lebensäusserungen der Pflanze geben. Die Isoëten sind besonders lehrreich dadurch, dass bei ihnen Erscheinungen auftreten, welche nachdrücklich davor warnen, jener Uebereinstimmung der Zellenvermehrung der Endknospe mit der Wedelstellung junger Pflanzen allzuschweres Gewicht beizulegen. Aeltere Pflanzen der Isoëtes lacustris zeigen Stellungsverhältnisse der Wedel, die nicht minder complicirt sind als die vieljähriger Individuen dreifurchiger Arten.[1]) Die Vermehrungsart der Scheitelzelle der Endknospe bleibt aber dabei unausgesetzt die gleiche, wie im zartesten Alter. Nicht minder ist in der Zelle ersten Grades des Stammes der dreifurchigen Isoëten wie der Aspidien, Scolopendrien u. s. w. jede neu auftretende Theilungswand der drittvorhergehenden genau parallel. Es erfolgen beim Eintritt zusammengesetzterer Stellungsverhältnisse der Wedel durchaus keine Aenderungen des ursprünglichen Divergenzwinkels (60°) je zweier Theilungswände der Scheitelzelle.

Die zusammengesetzte Zellenmasse, auf welcher als der Endknospe neue appendiculäre Organe entstehen, folgt bei Hervorbringung dieser noch anderen Gesetzen, als denen die in der Vermehrung ihrer Zelle des ersten und der folgenden Grade sich offenbaren. Der vielzellige Körper erzeugt an mathematisch vorausbestimmbaren Punkten seiner Oberfläche

---

1) Vergleiche Alexander Braun, Flora 1846, Nr. 12. 13. Ich zählte bei Isoëtes velata und Hystrix wie bei Isoëtes lacustris an etwa 6jährigen Individuen $5/13$ Stellung.

Sprossungen, deren Anfangszellen der Abstammung nach unter einander keineswegs streng gleichwerthig sind. In den Lebenserscheinungen des Achsenendes tritt ein gemeinsames, geregeltes Bildungsstreben hervor; ein Streben, welches die Thätigkeit der einzelnen Zellen der Knospe beherrscht und verschiedenartig bestimmt, der Art, dass sie nicht anders zum Gesammtleben der Knospe sich verhalten, als die einzelnen Punkte der Membran einer regelmässig sich verästelnden einzelligen Pflanze, einer Bryopsis z. B., zu deren Gesammtheit. Es waltet in der Entwickelung der Pflanze ein Gestaltungstrieb, der bei höheren Gewächsen auf Zahlenverhältnisse einzelner Zellen sich nicht zurückführen lässt.

ERKLÄRUNG DER ABBILDUNGEN.

Die an den Figuren angebrachten Buchstaben bedeuten:

a Archegonium; **ac** Centralzelle, **ao** Mündung desselben.
ax Ende der primären Achse des Embryo.
cb Cambium.
ct Rinde des Stamms.
e Embryo.
fr Wedel; **fr**[1] der erste, **fr**[2] der zweite Wedel der Keimpflanze, u. s. f. **fv** Gefässbündel. In einigen Fällen sind die zu Wedeln abgehenden Gefässbündel schlechthin **fr**[1] u. s. w., die zu Wurzeln verlaufenden r^1, r^2 u. s. f. bezeichnet (so auch f. 1^b der T. IX).
g Endknospe; **gc** deren Scheitelzelle.
l Holzkörper; **lsp** der Aufwuchs, **lnf** der Niederwuchs desselben.
lg Die den Grund des Spreublatts deckende nachträgliche Sprossung der Vorderseite des Wedels.
r Wurzel; **rc** die Zelle I. Grades derselben.
v Scheide der Wedelbasis.

TAFEL II.

1. Grosse Spore, zwei Wochen nach der Aussaat, nach mehrstündigem Liegen in Glycerin bei 60facher Vergr. von oben gesehen. Die erstgebildeten Zellen des Prothallium erscheinen der Innenwand angelagert.
2. Prothallium im Längsdurchschnitt, vier Wochen nach der Aussaat. Vgr. 40.
3. Theil des Scheitels eines längsdurchschnittenen Prothallium mit zwei noch in der Entwickelung begriffenen Archegonien. Vgr. 300.
4. Archegonium, fertig bis zum Auseinandertreten der Berührungskanten der oberen drei Doppelpaare von Zellen, im Längsdurchschnitt. Gleiche Vgr.
5. 6. Archegonien, zur Befruchtung bereit, längsdurchschnitten. Gleiche Vgr.
7. Reife Mikrospore, Ansicht von oben (senkrecht auf den Querdurchmesser). Vgr. 500.
8. Seitenansicht einer Mikrospore, vier Wochen nach der Aussaat. Die Mutterzellchen der Samenfäden sind gebildet. Vgr. 500.
9. Mikrospore, drei Wochen nach der Aussaat. Durch Rollen der Spore unter der Deckplatte ist das Exosporium geborsten und zur Seite geschoben worden. Die Mutterzellen der Samenfäden nehmen den Innenraum der Spore völlig ein. Vgr. 500, wie auch der folgenden.

10. Kleine Spore, fünf Wochen nach der Aussaat, geborsten. Sie hat mehrere Samenfäden bereits entlassen; einer, zum Theil noch vom Mutterbläschen umschlossen, befindet sich noch in ihr, in lebhafter Bewegung.

11. Ein Samenfaden, von seinem Mutterbläschen umhüllt, durch Zerdrücken einer Spore frei gemacht.

12. Samenfaden, zum Theil noch in dem Mutterbläschen steckend, durch Jod getödtet.

13—15. In Bewegung begriffene freigewordene Samenfäden. 14 schleppt am dünnen Ende ein kleines Bläschen nach.

16. 17. Samenfäden, durch Jod getödtet.

18. 19. Eben befruchtete Archegonien, längsdurchschnitten, mit zweizelligen Rudimenten von Embryonen. Von der schmalen Seite gesehen. Vgr. 400.

20. Ein ähnliches Präparat; in der unteren Zelle der Embryo-Anlage ist die neue Theilung durch Auftreten zweier Zellenkerne vorbereitet. Vgr. 400.

21. Der Scheitel eines längsdurchschnittenen Prothallium, mit einem fehlgeschlagenen und einem befruchteten Archegonium, welch letzteres das vierzellige Rudiment eines Embryo umschliesst. Vgr. 300.

TAFEL III.

1. Befruchtetes Archegonium, längsdurchschnitten, mit zweizelliger Embryo-Anlage, letztere von der breiten Seite gesehen. Vgr. 400.

2. Ein ähnliches Präparat; der Embryo dreizellig. Vgr. 400.

3. Längsdurchschnitt eines Theils der Scheitelregion eines Prothallium mit abortirtem und befruchtetem Archegonium. Vgr. 300 wie auch der folgenden Abbildungen.

4. Der von letzterem umschlossene Embryo frei präparirt und von der Rückenfläche gesehen. Die Linie *a. b.* ist dem Schnitte parallel, welcher das befruchtete Archegonium der f. 3 öffnete.

5. Befruchtetes Archegonium, durch einen der Vorderfläche des eingeschlossenen Embryo parallelen Längsschnitt geöffnet.

6. Ein ähnliches Präparat; der Schnitt ist rechtwinklig zur Längsachse des ersten Wedels des Embryo. Das Ende der ersten Achse des Embryo liegt nach vorn.

7. Embryo, vom Archegonium umschlossen, welch letzteres durch einen gegen die Aussenfläche des Prothallium etwas geneigten Schnitt geöffnet ist. Der Schnitt hat den Einführungsgang des Archegonium entfernt, indem er nahe unter diesem durchging.

8. Ein Präparat, dem f. 5 abgebildeten ähnlich, mit weiter entwickeltem Embryo.

9. Embryo, frei präparirt, Seitenansicht.

10. Wenig weiter entwickelter Embryo, Längsdurchschnitt rechtwinklig zur Vorderfläche (beim Durchschneiden eines Prothallium zufällig erlangt).

11. Embryo, im Längsdurchschnitt; die Zahl seiner Zellen ist geringer als die der vorhergehenden Abbildung, aber die charakteristische Dehnung der Scheitelzellen der ersten Achse hat bereits begonnen.

12. Weiter vorgerückter Embryo, längsdurchschnitten.

13. Längsdurchschnitt des oberen Theils eines Prothallium, welches einen bis zum Durchbruch der Pflanze erster Generation entwickelten Embryo umschliesst; dieser ist vom Schnitte ebenfalls der Länge nach halbirt. Vgr. 200.

TAFEL IV.

1. Embryo, etwas weiter entwickelt als der f. 13 der vorhergehenden Tafel, längsdurchschnitten. Vgr. 200.
2. Längsdurchschnitt eines Embryo, dessen erste Wurzel und erster Wedel vor Kurzem das Prothallium durchbrachen. Vgr. 200.
3. Ansicht der Rückenfläche des zweiten Wedels einer Keimpflanze gleicher Entwickelungsstufe. Vgr. 200.
4. Längsdurchschnitt einer weiter entwickelten Keimpflanze. Die Spitzen des ersten Wedels und der ersten Wurzel sind nicht mitgezeichnet. Vgr. 200.

TAFEL V.

1. Das Stämmchen, die Basen des ersten und zweiten Wedels und die Ansatzstelle der Wurzel einer weiter vorgerückten Keimpflanze. Vgr. 250.
2. Das Stämmchen und der zweite Wedel eines längsdurchschnittenen Keimpflänzchen, dessen zweite Wurzel sich zu entwickeln beginnt. Diese selbst ist nicht durch die obere der Schnittflächen blosgelegt, welche dieses Präparat bilden; man sieht ein Stück ihrer Aussenfläche. Gleiche Vgr.

2b. Diese zweite Wurzel derselben Keimpflanze längsdurchschnitten durch den unteren der beiden Schnitte, welche das f. 2 abgebildete Präparat darstellten. Gleiche Vgr.

TAFEL VI.

Längsdurchschnitt einer drei Monate alten Keimpflanze. Die Spitzen des ersten und zweiten Wedels wie der ersten Wurzel sind in der Zeichnung weggelassen. Vgr. 200.

TAFEL VII.

1. Vier und einen halben Monat alte Keimpflanze, Seitenansicht. Vgr. 2.
2. Dieselbe im Längsdurchschnitt. Vgr. 60. Die dunkel und fleckig gehaltenen Stellen sind das Amylum führende Zellgewebe der Rinde; die Zellen der von diesen nach aussen gelegenen Rindenportionen enthalten nur wasserhelle Flüssigkeit.
3. Holzkörper und Endknospe desselben Präparats. Vgr. 300.
4. Sechs Monat alte Keimpflanze, Seitenansicht. Vgr. 3.

TAFEL VIII.

1. Längsdurchschnitt rechtwinklig zum grösseren Querdurchmesser des Stammes einer vier Monate alten Keimpflanze. Vgr. 200.
2. Längsdurchschnitt des Stammes rechtwinklig zu den Seitenflächen des Holzkörpers einer etwa acht Monate alten Keimpflanze. Vgr. 200.

3ª. Querdurchschnitt einer einjährigen Pflanze in der Höhe der Endknospe. Vgr. 30.

3ᵇ. Querdurchschnitt derselben Pflanze in der Höhe der Vereinigungsstelle des Aufwuchses und des Niederwuchses des Holzkörpers. Gleiche Vgr.

4. Querdurchschnitt der gleichen Stelle einer zweijährigen Pflanze. Vgr. 10.

5. Querdurchschnitt eines abnormen, dreifurchigen, etwa 6 Jahre alten Stammes der *Isoëtes lacustris* in der Höhe der Vereinigungsstelle von Aufwuchs und Niederwuchs. Natürliche Grösse.

6. Der mittlere Theil desselben Präparats, 30fach vergr.

7. Die Endknospe desselben Individuum, von oben gesehen. Vgr. 300.

TAFEL IX.

1. Längsdurchschnitt rechtwinklig zur Stammfurche einer zehn Monate alten Pflanze. Vgr. 30.

2. Holzkörper und Endknospe derselben. Vgr. 300.

TAFEL X.

1. Längsdurchschnitt durch die Stammfurche einer etwa achtjährigen Pflanze. Vgr. 30.

2. Querdurchschnitt der Stamm-Mitte einer Pflanze gleichen Alters. Die Hauptmasse der Rinde, ihre beiden seitlichen Lappen, sind weggelassen. Vgr. 20.

3. 4. Endknospen von Pflanzen gleichen Alters, von oben gesehen. Vgr. 300.

5. Rudiment eines Spreublatts, von der Fläche gesehen. Vgr. 200.

6. Ein solches, weiter entwickelt.

7. Ausgebildetes Spreublatt. Vgr. 6.

TAFEL XI.

1. Die Endknospe und der obere Theil des Holzkörpers des Tafel IX f. 1 abgebildeten Stammes. Vgr. 300.

2. Dieselben Theile eines rechtwinklig zur Kerbe durchschnittenen Stammes. Vgr. 250.

TAFEL XII.

1. Längsdurchschnitt des Stammes, rechtwinklig zu dessen Furche, einer sechsjährigen Pflanze. Vgr. 20.

2. Längsdurchschnitt der Seitenfläche aus der Mittelregion des Holzkörpers einer älteren Pflanze, nebst einem Theile des Cambium. Eine der Zellen des Letzteren, durch drei Cambialzellen von den nächsten Holzzellen getrennt, beginnt zu verholzen. Vgr. 250.

3. Längsdurchschnitt eines Gefässbündelstücks aus dem älteren Theile der Rinde. Vgr. 250.

4. Querdurchschnitt nahe am Holzkörper eines zu einem älteren Wedel verlaufenden Gefässbündels. Gleiche Vgr.

TAFEL XIII.

1. Längsdurchschnitt der Spitze einer Wurzel, in welcher vor Kurzem die Gabelung eingeleitet wurde. Vgr. 400.
2. Die Hälfte einer gegabelten Wurzel im Längsschnitt. Vgr. 100.
3. Querdurchschnitt einer Wurzelspitze. Vgr. 400.
4. Querdurchschnitt einer gabelnden Wurzelspitze. Vgr. 400.
5. Längsdurchschnitt rechtwinklig zur Stammfurche der Endknospe eines kräftigen Exemplars. Vgr. 300.

TAFEL XIV.

1. Ein Stück des in Richtung seines grösseren Querdurchmessers längsdurchschnittenen Niederwuchses des Holzkörpers einer älteren Pflanze (Theil des T. IX f. 1 abgebildeten Präparats). Vgr. 200.
2. Junger Wedel einer alten Pflanze, von vorn gesehen. Vgr. 300.
3. Etwas entwickelterer Wedel in gleicher Ansicht. Gleiche Vgr.
4. Etwas jüngerer Wedel im Längsdurchschnitt. Vgr. 300.

5. 6. Der untere Theil der Vorderfläche etwas weiter entwickelter, fruchtbringender Wedel im Längsdurchschnitt. Vel. ist der die Frucht umsäumende Schleier. Gleiche Vgr.

7. Das untere Ende einer längsdurchschnittenen jungen Frucht (ihrer Stellung nach zur Bildung von Makrosporen bestimmt). Gleiche Vgr.
8. Längsdurchschnitt der Basis eines Wedels, der eine halbreife, Mikrosporen bildende Frucht trägt. Vgr. 20.

9. 10. Complexe von je 4 an einander haftenden Sporenmutterzellen. Vgr. 400.

11—20. Entwickelungsstufen der Mutterzelle von Mikrosporen; f. 14 bei 500facher, die übrigen bei 400facher Vgr.

11—13. Die Mutterzelle gleichmässig von körnigem Protoplasma erfüllt, in welchem der centrale Kern frei schwimmt.

14. An beiden Polen des kugeligen Kerns bilden sich Anhäufungen festeren Schleims, die Rudimente der secundären Kerne.

15. Nach Resorption des primären Kerns und nach Ausbildung der secundären schnürt sich der Primordialschlauch der Mutterzelle ein, deren Theilung einleitend.

16ᵃ. Die secundären Kerne sind in der Wiederauflösung begriffen, bevor die Theilung des Mutterzellraums erfolgte.

16ᵇ. Eine Mutterzelle, von einer durch ihren Aequator gelegten Scheidewand in zwei Hälften getheilt.

17ᵃ. ᵇ. Mutterzellen, jede mit 4 freien tertiären Kernen, die bei 17ᵃ in eine Ebene, bei 17ᵇ nach den Ecken eines Tetraëders geordnet sind.

18. Vier durch die Mutterzelle vereinigte Specialmutterzellen; entstanden durch wiederholte Theilung der zwei Theilhälften der Mutterzelle (der Specialmutterzellen ersten Grades). Die diese theilenden Wände haben verschiedene Neigung.

19. Ein ähnliches Präparat; die vier Specialmutterzellen liegen in derselben Ebene.

20. Complex von Specialmutterzellen decussirter Stellung im letzten Stadium der Ausbildung, unmittelbar vor der Vereinzelung. Die innerste Schicht der sehr verdickten Zellhaut der Specialmutterzellen bricht das Licht weit stärker als die bereits

aufgequollenen äusseren Schichten. Behandlung mit Jodtinctur hat die Primordialschläuche der Zellen zum Zusammenschrumpfen gebracht.

21. Junge Mikrosporen, von den Specialmutterzellen umschlossen. Vgr. 300.
22. Halbreife Mikrosporen nach Resorption der Specialmutterzellen. Gleiche Vgr.

TAFEL XV.

1. Längsdurchschnitt eines Stämmchens der Isoëtes tenuissima, natürliche Grösse.
2. Die Endknospe desselben, 300fach vgr.
3. Querdurchschnitt des Stammes in der Höhe des Niederwuchses des Holzkörpers derselben Art. Vgr. 20.
4. Längsdurchschnitt eines Stammes derselben Art. Gleiche Vgr.
5. Querschnitt durch Stamm und Niederwuchs des Holzkörpers der Isoëtes adspersa. Vgr. 20.
6. 7. Tangentalschnitte rechtwinklig zu einer der Stammfurchen der Isoëtes velata, 6 dicht am Niederwuchs des Holzkörpers, 7 ihm etwas ferner.

TAFEL XVI.

1. Längsdurchschnitt eines alten Stammes der Isoëtes Hystrix. Vgr. 10.
2. Endknospe eines etwas jüngeren Individuum derselben Art im Längsdurchschnitt. Die von diesem halbirte Stammfurche liegt zur Rechten. Vgr. 300.
3. 4. Terminalknospen der Isoëtes setacea, von oben gesehen. Vgr. 300.
5. Längsdurchschnitt einer vom Rindenparenchym umhüllten jungen Wurzel der Isoëtes tenuissima, nebst einem Theile des niederwachsenden Holzes und des diesem angränzenden Cambium. Der Inhalt der Zelle I. Grades und der aufwärts gekehrten Tochterzellen derselben ist mitgezeichnet. Vgr. 300.

II.

ÜBER DIE KEIMUNG DER EQUISETACEEN.

Die Fortpflanzung der Familie der Gefässkryptogamen, welche durch die hohe Organisation wie durch die morphologischen Eigenthümlichkeiten ihrer Vegetationsorgane vor allen ihren Verwandten sich auszeichnet, ist bis auf die neueste Zeit in tiefes Dunkel gehüllt gewesen. Seit Vaucher's Mittheilungen[1]) hat unsere Kenntniss der Keimung der Schafthalme bis heute nur eine wesentliche Erweiterung erfahren: die Auffindung der Antheridien und Samenfäden durch Thuret.[2]) Seine Entdeckung wurde durch Milde[3]) und durch mich[4]) bestätigt; Milde sowohl als ich gaben dabei die auf die einzelne Zelle zurückgeführte Entwickelungsgeschichte des Prothallium. Gleich den Aussaaten aller früheren Beobachter gingen auch die unsrigen zu Grunde, bevor Archegonien, geschweige denn Embryonen sich gebildet hatten; doch habe ich die ersten Rudimente von Archegonien 1850 beobachtet und abgebildet;[5]) die von Milde gezogenen Prothallien starben noch früher ab, als die Meinigen.

---

1) Die Untersuchungen Vaucher's der Keimung von Equisetum sind nicht allein ungleich genauer und vollständiger als die J. Agardh's (*mémoires du muséum d'hist. nat.* T. IX [1822]); sondern auch früher angestellt. Beobachtungen Vaucher's, die eben so weit reichen als die Agardh's, stammen bereits aus dem Jahre 1815.

2) Als beiläufige Notiz in dessen Arbeit über die Samenfäden der Farrn gegeben: *Annales des sc. nat.* Série III. T.

3) Linnaea, 1850.

4) Vergleichende Untersuchungen, S. 96 ff.

5) a. a. O. T. XX. f. 61, 62.

Ich habe seither meine Aussaatversuche dauernd fortgesetzt, und das Verfahren dabei mannichfach geändert. In den früheren Fällen wurden die Prothallien durch wuchernde niedere Algen und Moosvorkeime zeitig erstickt, bis auf diejenigen, die auf zufälligen Erhebungen des Bodens sich angesiedelt hatten. Ich machte neuerdings die Erde der Aussaat-Töpfe geflissentlich uneben; ich hielt die jungen Prothallien nur mässig feucht und entzog sie völlig den direkten Sonnenstrahlen. Die Sporen keimten rasch und entwickelten sich üppig; mit ihnen zugleich Vaucheria sessilis, Nostoc commune und Cylindrospermum humicola, deren Ueberhandnehmen den jungen Prothallien mit der alten Gefahr drohte, bis durch zeitweiliges starkes Ueberbrausen mit kaltem Wasser der Wucherung dieser Algen Einhalt gethan wurde. Bei solcher Behandlung entwickelten Prothallien, gekeimt aus Anfang Mai dieses Jahres ausgesäeten Sporen des Equisetum arvense, bereits Mitte Juni die ersten beblätterten Pflanzen.

Ich übergehe die Keimung der Spore, die ersten Entwickelungsstufen des Prothallium und die Bildungsgeschichte der Antheridien, als bereits (a. a. O.) ausführlich von mir geschildert. Dagegen habe ich über die Beschaffenheit der Samenfäden einiges nachträglich zu bemerken. Wie bekannt, tragen die beiden engeren vorderen Windungen des Spermatozoïds zahlreiche, ziemlich starke Wimpern, welche während der Bewegung des Samenfadens lebhaft schwingen. Die weitere letzte Windung, welcher diese Wimpern fehlen, erscheint während des raschen Umherschweifens des Samenfadens im Wasser etwas verjüngt; nach der Tödtung des Spermatozoïds durch Iod dagegen stark verbreitert.[1]) Diese auffallende Erscheinung gründet sich auf eine, soviel bis

1) Wie auch Thuret in seinen vor Kurzem veröffentlichten Abbildungen (*Annales des sc. nat.* Série III. T. XVI. pl. 16) die Sache darstellt. Ich habe früher (vergleichende Untersuchungen S. 101) den Samenfäden von Equisetum allgemein ein langgezogen peitschenförmiges Hinterende zugeschrieben. Es ist unzweifelhaft ein nicht seltenes Vorkommen, dass ein Samenfaden mit fadenförmiger Verlängerung seiner letzten Windung an Theilen des Prothallium festklebt und vergeblich sich loszuringen sucht. Der Antheridie eben entschlüpfte, kräftig sich bewegende Spermatozoïden zeigen nichts dergleichen, auch nicht nach Tödtung durch Jodtinctur. An zum Stillliegen gebrachten findet man nur kurze Anhängsel des Hinterendes (T. XVII f. 2—6) und auch diese nicht immer. Es ist nicht wahrscheinlich, dass ein so langer schwanzartiger Fortsatz bei der Tödtung eingezogen werde. Besser wird die Erscheinung durch die bei Besprechung der Samenfäden von Isoëtes (S. 129 dieses Bandes) bereits aufgestellten Annahme sich

jetzt bekannt im Pflanzenreiche völlig allein stehende Organisation. Das Ende des Samenfadens trägt an der Innenseite der Schraubenwindung einen breiten, flossenförmigen Anhang; eine zarte Membran, die während des Schwärmens des Fadens lebhaft flimmert, ähnlich den undulirenden Membranen der Spermatozoën von Kröten und Tritonen. — Bei irgend rascher Bewegung des Samenfadens ist der häutige Saum gleich den Cilien des Vorderendes unsichtbar; erst bei dem Erlahmen der Lebensthätigkeit des Spermatozoïds wird die Erscheinung deutlich (T. XVII. f. 1—6). Die Undulationen der Flosse dauern länger. als die Schwingungen der Wimpern. Das Hinterende des Samenfadens erscheint noch spitzlich, wenn die stillstehenden Cilien der vorderen Windungen bereits sichtbar werden.

Die Prothallien von Equisetum arvense, pratense und palustre sind scharf ausgeprägt diöcisch. Die Individuen, welche Antheridien tragen, bringen deren sehr reichlich; Archegonien aber nur in den seltensten Ausnahmefällen, und dann auf spät erscheinenden Sprossungen der Basis des Prothallium. Analog den Bildungen, die den Randzellen alter Farrnprothallien entspriessen, lassen sich diese als neue Individuen betrachten. Die männlichen Prothallien erreichen nicht die volle Grösse der weiblichen. Sie bestehen in der Regel aus nur einer bis zweien dickfleischigen Ausbreitungen von Zellgewebe, deren Ränder die Antheridien tragen, und etlichen dünnhäutigen, sterilen Sprossen. Ihr Chlorophyll contrastirt mit dem der weiblichen Prothallien durch einen deutlichen Stich ins Gelbe. Die tiefbraune Färbung, welche die ihres Inhalts entleerten Antheridien anzunehmen pflegen, giebt den männlichen Prothallien zeitig ein krankhaftes Aussehen.

Die Archegonien erzeugenden Prothallien bilden durchaus keine Antheridien. Sie verzweigen sich stärker und werden weit kräftiger, als die männlichen. Ein weibliches Prothallium ist bei normaler Entwickelung eine im allgemeinen Umriss kreisförmige Vereinigung von drei bis sechs fleischigen Zellgewebsmassen, die sehr zahlreiche, kräftig grüne

---

erklären lassen, dass das Hinterende des Samenfadens aus sehr weicher, halbflüssiger Masse bestehe, die leicht irgendwo festklebt und sich dann zu Fäden auszieht. Diese Vermuthung gewinnt dadurch an Wahrscheinlichkeit, dass Samenfäden, die ihre Bewegung (nach $^1/_4$ bis 2stündiger Dauer) freiwillig endeten, stets einen Schwanz, oft von sehr bedeutender Länge, zeigen. Solche Samenfäden sind unzweifelhaft durch Einwirkung von Wasser aufgequollen. Ihre fleischige Substanz pflegt Vacuolen zu enthalten.

krause Sprossungen von zarterer Textur tragen, von 1/4 bis 1/2 Zoll Durchmesser. Mit jungen Pflanzen des Anthoceros punctatus hat das Gebilde grosse Aehnlichkeit. Die Archegonien treten weit später auf, als die Antheridien gleichzeitig ausgesäeten Sporen entsprossener männlicher Prothallien; das jüngere weibliche Prothallium zeigt sich anscheinend steril. — Die Sporen, aus denen weibliche, und die, aus denen männliche Prothallien entstehen, sind von durchaus gleicher Grösse und gleicher Beschaffenheit. Aeussere Einflüsse scheinen deutlich von Wirkung auf das Geschlecht der keimenden Prothallien. Ein trockenerer, hellerer Standort scheint bei Eq. arvense die Entwickelung von Antheridien entschieden zu begünstigen. Die Sporen von Eq. arvense und pratense gaben bei der Aussaat vorwiegend männliche,[1]) die von Eq. palustre bei meinen wiederholten Versuchen nur weibliche Prothallien.

Die Archegonien entstehen aus der Vermehrung einzelner Zellen des Vorderrandes der dickfleischigen Lappen des Prothallium. Nach Anlegung des Archegonium pflegt die Zellgewebsmasse, welcher das Organ eingefügt ist, unter ihm weiter zu wachsen, so dass die Archegonien, ähnlich denen von Pellia, später auf die Oberfläche des Prothallium zu stehen kommen. Neben jedem Archegonium bildet sich gewöhnlich eine schmale dünnhäutige Sprossung des Prothallium (T. XIX. f. 1).

Die Mutterzelle eines Archegonium, chlorophyllhaltig gleich ihren Nachbarinnen, unterscheidet sich von diesen nur durch ihren reicheren Gehalt an Protoplasma. Nach beträchtlicher Wölbung ihrer freien oberen Wand erfolgt ihre erste Theilung durch eine horizontale Membran. Die untere beider Theilhälften, völlig dem Gewebe des Prothallium eingesenkt, wird zur Centralzelle des Archegonium. Durch wiederholte Zweitheilung der oberen bildet sich der Mündungsgang desselben.

Die erste dieser Theilungen ist die durch eine verticale Längswand. Eine ebenfalls senkrechte Wandung, rechtwinklig zu der eben gebilde-

---

1) 1849, 50 und 51 erhielt ich nur männliche Prothallien, an denen erst spät und einzeln auf Adventivsprossen Rudimente von Archegonien sich zeigten. Im Sommer des laufenden Jahres überwog die Zahl männlicher Prothallien die der weiblichen etwa um die Hälfte. Der Sommer 1852 scheint der Keimung der Schafthalme besonders günstig gewesen zu sein. In einem Garten cultivirte Exemplare des Eq. variegatum hatten selbst Sporen ausgesäet (Anfang Mai). Mitte Juli entwickelten die in Mehrzahl vorhandenen weiblichen Prothallien beblätterte Pflänzchen.

ten, tritt sofort in jeder der beiden neuentstandenen Zellen auf. Die vier Zellen, welche die inzwischen nach oben sich stark wölbende Centralzelle decken und umkleiden, wachsen gleichmässig aufwärts und werden während dem wiederholt durch horizontale Querwände getheilt, — genau in der Art wie die vier Scheitelzellen der Fruchtanlage einer Jungermanniee.[1] So bildet sich ein die Centralzelle des Archegonium überragender Cylinder, zusammengesetzt aus vier Längsreihen von Zellen (T. XVII f. 7—9). Das oberste Doppelpaar derselben streckt sich sehr bedeutend in die Länge. Ihm folgt in dieser Längsdehnung das nächstbenachbarte, wiewohl in minderem Maasse. Die beiden unteren Zellendoppelpaare des Halstheiles des Archegonium strecken sich kaum merklich aufwärts; dagegen greift bis in sie, mindestens bis in das untere derselben, die in den Nachbarinnen der Centralzelle anhebende Vermehrung: die Theilung durch auf den Wänden dieser letzteren senkrechte Membranen, wechselnd mit ihnen parallelen. In Folge dieser Theilungen erscheint bei völliger Ausbildung des Archegonium die Centralzelle desselben von einer oder zweien epitheliumähnlichen Zellschichten umgeben (T. XVII f. 10—12).

In der Centralzelle bildete sich schon auf den ersten Entwickelungsstufen des Archegonium eine freie Tochterzelle, das Keimbläschen. Sie entsteht um einen in der Scheitelwölbung der Zelle auftretenden secundären Kern (T. XVII f. 7, 8), bisweilen schon zu der Zeit, da die Quertheilungen der den Archegonienhals bildenden zwei Zellenpaare eben erst beginnen (T. XVII f. 7). Allmälig wächst sie heran; verdrängt während der Ausbildung des Archegonium mehr und mehr den übrigen Inhalt der Centralzelle, namentlich den bei ihrer Bildung noch vorhandenen zweiten Kern derselben. Auch dieser ist, wie es scheint, ein secundärer Kern; durch abgeplattete Form und mindere Grösse (T. XVII f. 7, 8) weicht er ab vom kugeligen primären Kern der Centralzelle (T. XVII f. 9). Bei dem Aufbrechen des Archegonium pflegt etwas körniger Schleim, der letzte Rest des nicht in Bildung des Keimbläschens eingegangenen Inhalts der Centralzelle, der Aussenwand der freien sphärischen Zelle anzulagern (T. XVII f. 11).

Jetzt treten die vier, den Halstheil des Archegonium bildenden Längsreihen von Zellen an ihren Berührungskanten aus dem Zusammen-

---

1) Vergleichende Untersuchungen, S. 18, 38.

hange. Es bildet sich ein auf die Centralzelle zuführender, die Längsachse des cylindrischen Halses durchziehender offener Kanal, der Einführungsgang des Archegonium. Die vier langgestreckten Zellen seiner Mündung biegen sich halbkreisförmig zurück. Dadurch erhält das Archegonium eine sehr abenteuerliche Gestalt; es gleicht einem vierarmigen Wurfanker (T. XVII f. 11, 12). Die bogigen Mündungszellen enthalten beim Auseinandertreten keine festen Stoffe mehr; die wenigen Chlorophyllbläschen sowohl als der Zellenkern sind verschwunden. In gleicher Weise verhalten sich die vier sie tragenden Zellen. Der freie Hals des Archegonium ist glasartig durchsichtig.

Die Archegonien der Equisetaceen weichen in ihrem Baue weit weniger von den gleichen Organen der Farrnkräuter ab, als ihre Antheridien. Sie stimmen namentlich in allen wesentlichen Zügen überein mit denjenigen Archegonien der Polypodiaceen, deren Halstheil aus nur vier Längsreihen von Zellen besteht.[1]) Man darf es aussprechen, dass die Equisetaceen durch die Diöcie ihrer Prothallien, wie durch die ausnahmslose Aehnlichkeit des Baues ihrer Archegonien mit denen der Rhizocarpeen, namentlich der Pilularia, den Uebergang von den Farrn zu den Rhizocarpeen vermitteln.

Männliche und weibliche Prothallien wachsen in nächster Nachbarschaft, oft mit ihren Sprossungen sich verflechtend. Der Weg zu den Archegonien, den nicht nur jeder Regen, sondern schon jeder starke Thau den Samenfäden bahnt, wird ihnen noch dadurch erleichtert, dass beim freiwilligen Aufbrechen überreifer Antheridien[2]) die eingeschlossenen noch in ihren Mutterzellchen enthaltenen Samenfäden mit nicht unbeträchtlicher Gewalt, mehrere Linien weit spritzend, hervorgetrieben werden. — Im Einführungskanale eines vor Kurzem befruchteten Archegonium fand ich schleimige Massen, abgestorbenen Samenfäden völlig ähnlich (T. XVII f. 13).

Die erste Veränderung, welche am befruchteten Archegonium sichtbar wird, ist die weitere Vermehrung der Zellen des die Centralzelle umgebenden Gewebes. Es theilen sich diese wiederholt durch Längs- und Querwände; besonders lebhaft die Zellen der epitheliumartigen

---

1) Vergleichende Untersuchungen, S. 81.

2) Bei dem allein das von Thuret abgebildete zierliche Krönchen (*Ann. d. sc. nat.* III S. T. XVI. t. 16. f. 1) sich bildet.

Schicht, welche der Centralzelle zunächst angränzt. Unmittelbar nach der Befruchtung schliesst sich vollständig das untere Ende des Einführungsganges durch horizontale Dehnung der Zellen seiner Wände (T. XVII f. 13). Das befruchtete Keimbläschen hat unterdessen an Grösse etwas zugenommen. Sein Kern ist verschwunden; eine Schicht feinkörnigen Protoplasma's überzieht seine Innenwand (T. XVII f. 13). Jetzt erst, nach der Obliteration des unteren Endes des Einführungsganges, beginnt die Reihenfolge von Theilungen des Keimbläschens, durch welche der Embryo angelegt wird.

Das Keimbläschen theilt sich zunächst durch eine gegen die Längsachse des Archegonium geneigte Wand. Beide Theilhälften werden sofort aufs Neue durch Querwände getheilt, welche rechtwinklig zu den eben gebildeten stehen. Bald schreitet die obere, bald die untere der zwei ersten Zellen des rudimentären Embryo ihrer Schwester in dieser Theilung voraus (T. XVII f. 14).

Jetzt oder wenig später schrumpfen die zurück gekrümmten Zellen der Archegonienmündung zusammen und fallen ab. Auch die sie tragenden vier gestreckten Zellen des Archegonienhalses enden ihre Lebensthätigkeit. Soweit ihre Wände den Einführungsgang des Archegonium bilden, färben sie sich tiefbraun.

Die Zahl der Archegonien eines kräftig entwickelten Prothallium beträgt 20 bis 30; sie übertrifft somit die der Antheridien selbst der grössten männlichen Prothallien. In der Regel wird mehr als ein Archegonium befruchtet; ich zählte bis zu sieben Embryonen in einem und demselben Prothallium. Bei unbefruchtet gebliebenen Archegonien erstreckt sich die braune Färbung auf die Wände des ganzen, offen bleibenden Einführungsganges und auf die Centralzelle sammt Inhalt (T. XIX f. 1).

Durch eine Reihenfolge je in der Endzelle sich wiederholender Theilungen, welche in der dreiseitigen Zelle anhebt, die das untere Ende des Embryo-Rudiments einnimmt, wird die erste, unentwickelt bleibende Achse des Embryo angelegt (T. XVII f. 14—18; T. XVIII f. 1—3). Die Zellen zweiten Grades derselben theilen fürs Erste sich nur durch auf den freien Aussenflächen senkrechte Längs- und Querwandungen (T. XVII f. 19); spät erst treten diesen Flächen parallele Wände auf, innere Zellen bildend. — Eine ähnlichen Regeln folgende Zellenvermehrung beginnt in der einen seitlichen Zelle des vierzelligen Embryo-Rudiments. Die Linien, in welchen die ersten der in ihr auftretenden Theilungs-

wände sich schneiden, sind parallel der Längsachse des Archegonium (T. XVII f. 16—18). Es wird dadurch eine seitliche Sprossung des Embryokügelchens gebildet: die zweite Achse der Keimpflanze, ihr erster blätterbringender Spross. Durch das beträchtliche Wachsthum in die Dicke der primären Achse unterhalb der Ursprungsstelle der secundären, noch mehr durch die Aufwärtskrümmung der Letzteren während ihrer Entwickelung wird die Anlage des secundären Sprosses binnen Kurzem nahezu auf den Scheitel der kugeligen Zellenmasse gerückt, als welche der Embryo jetzt erscheint; in geringe Entfernung von der Stelle, an welcher das (jetzt völlig obliterirte) untere Ende des Einführungsganges des Archegonium mündete (T. XVIII f. 5, 6).

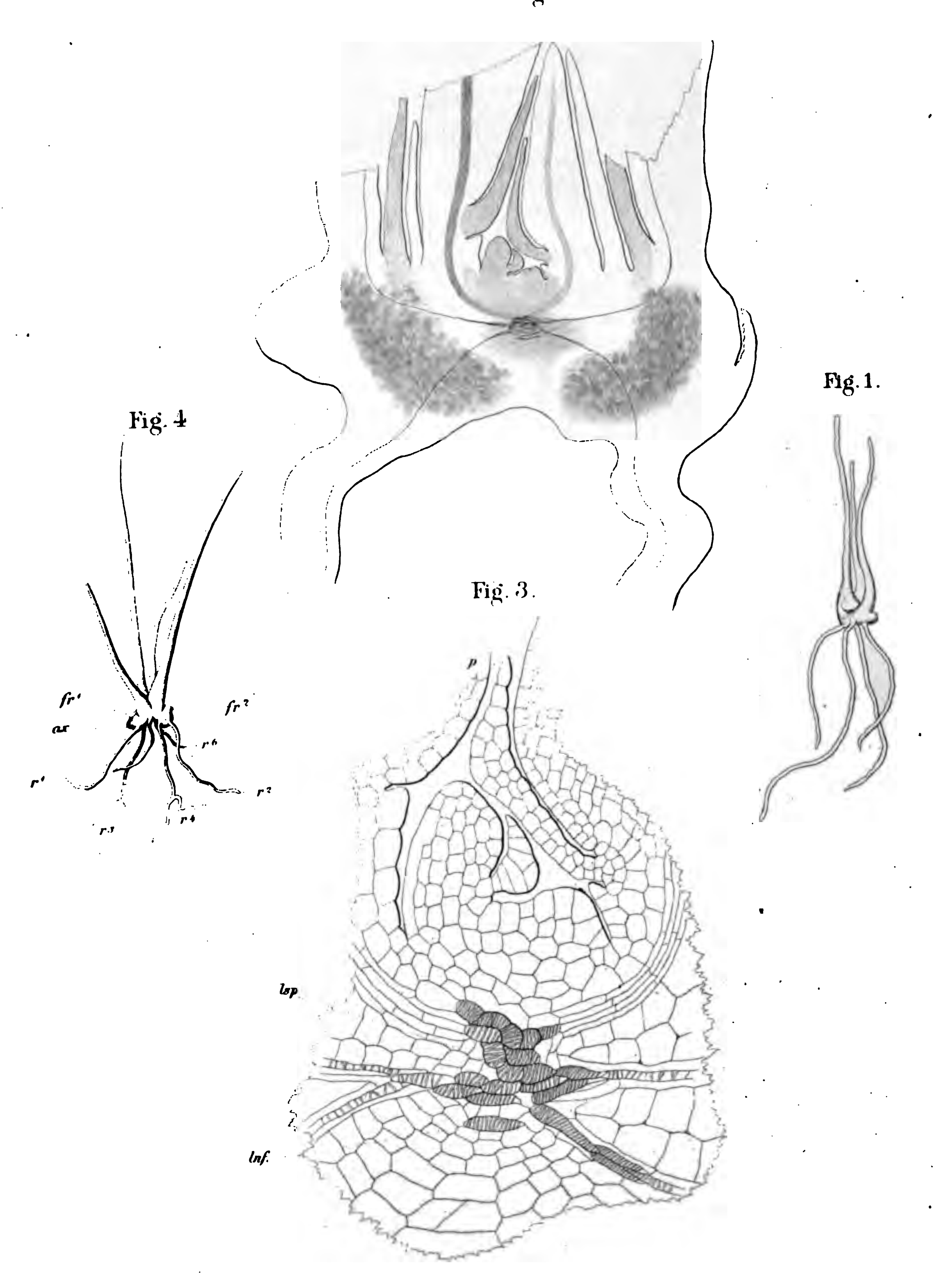
Bis jetzt lässt sich die Embryoanlage ohne grosse Schwierigkeit frei präpariren. Von nun an aber treten die Zellen der Oberfläche ihrer primären Achse in immer innigeren Zusammenhang mit den benachbarten Zellen des Prothallium, während diese — zum Theil noch immer in Vermehrung begriffen — von der an Grösse rasch zunehmenden neuen Pflanze mehr und mehr zusammengedrückt, endlich resorbirt werden.

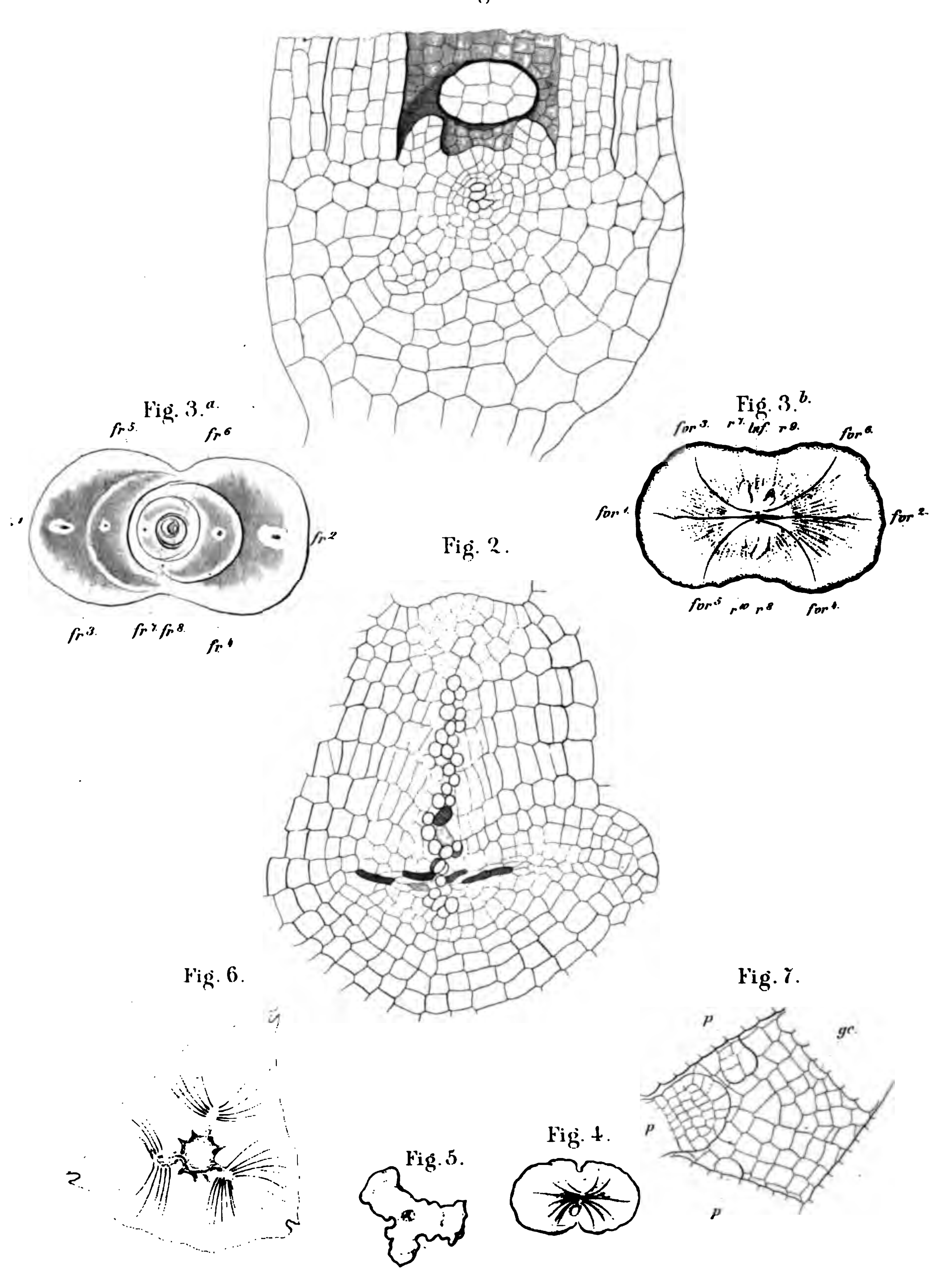
Das Ende der secundären Achse des Embryo gleicht schon frühe in Gestalt, wie in der Art der Vermehrung seiner Zellen vollkommen der Endknospe des Sprosses einer entwickelten Schafthalmpflanze. An dem spitz-kegelförmigen Wärzchen von Zellgewebe lässt sich die verhältnissmässig grosse Scheitelzelle, wie die leiterartig ineinander greifende Anordnung der Zellen zweiten Grades deutlich unterscheiden (T. XVIII f. 5). Wenn die Knospe diese Form angenommen hat, bildet sie sofort ihr erstes Blatt: gleich denen der ausgebildeten Pflanze eine geschlossene gleichhohe Ringscheide (*a* der fig. 5 der T. XVIII), deren Rand, durch anfangs gleichzeitige Theilung seiner Zellen mittelst wechselnd nach innen und aussen geneigter Wände aufwärts sich verlängernd, nach einiger Zeit in d r e i zuerst stumpfe, bald spitzer werdende Lappen auswächst (T. XVIII f. 6).

Gleichzeitig mit diesen drei Spitzen des Randes des ersten Scheidenblatts wird die erste Adventivwurzel der Keimpflanze sichtbar. Aus der Vermehrung einer Zelle des inneren Gewebes der primären Achse entstanden, zeigt sie sich zuerst als kleiner, halbkugeliger Höcker an der dem secundären beblätterten Sprosse abgewendeten Seite des Embryo (T. XVIII f. 6). Die Wurzel, durch Vermehrung einer Zelle des Inneren ihrer Spitze, in gleicher Weise wie die Wurzel der entwickelten Pflanze in



Taf. V




Fig. 1.
Fig. 3.a.
fr 5.
fr 6
fr 2
fr 3.
fr 7. fr 8.
fr 4
Fig. 3.b.
for 3.
r 7.
for 6.
for 1.
for 2.
for 5
r 8
for 4.
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 7.
p
gc.
p
p
Fig. 4.
Fig. 5.



Taf. IV.

Fig. 1. Fig. 2.

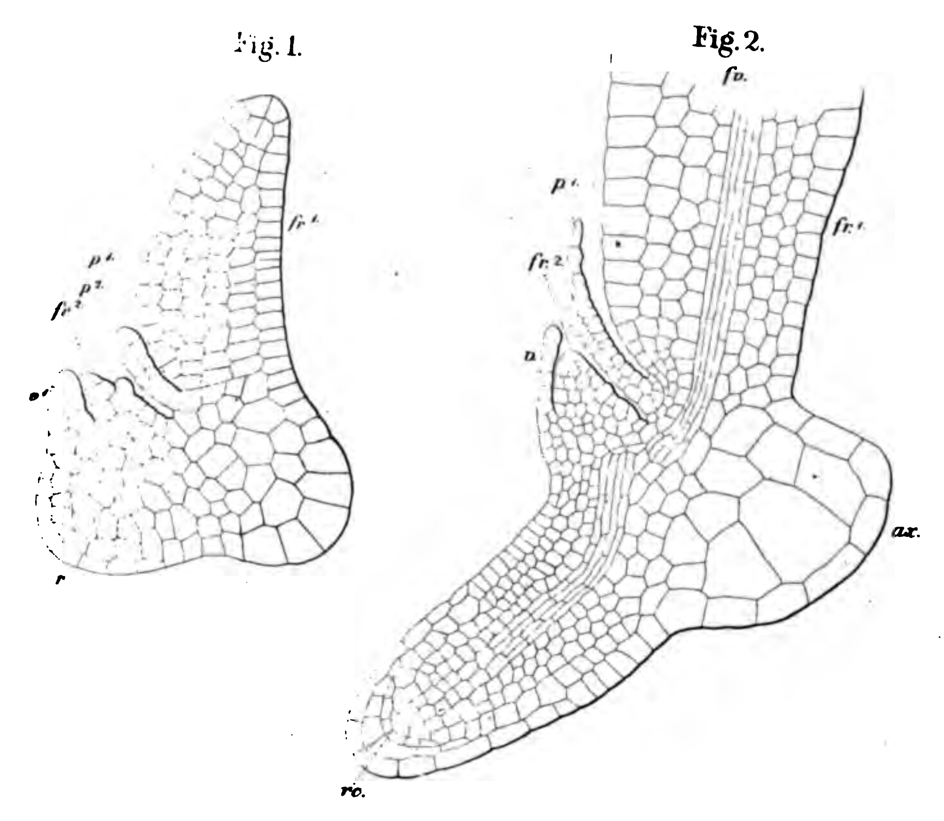


Fig. 4.

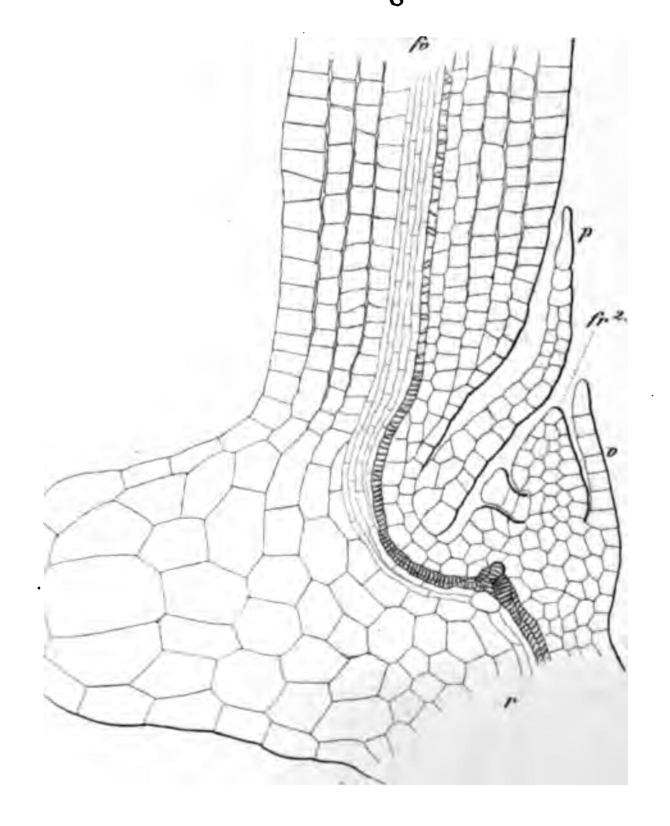
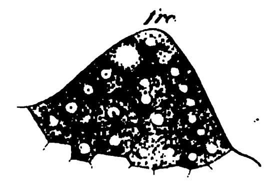
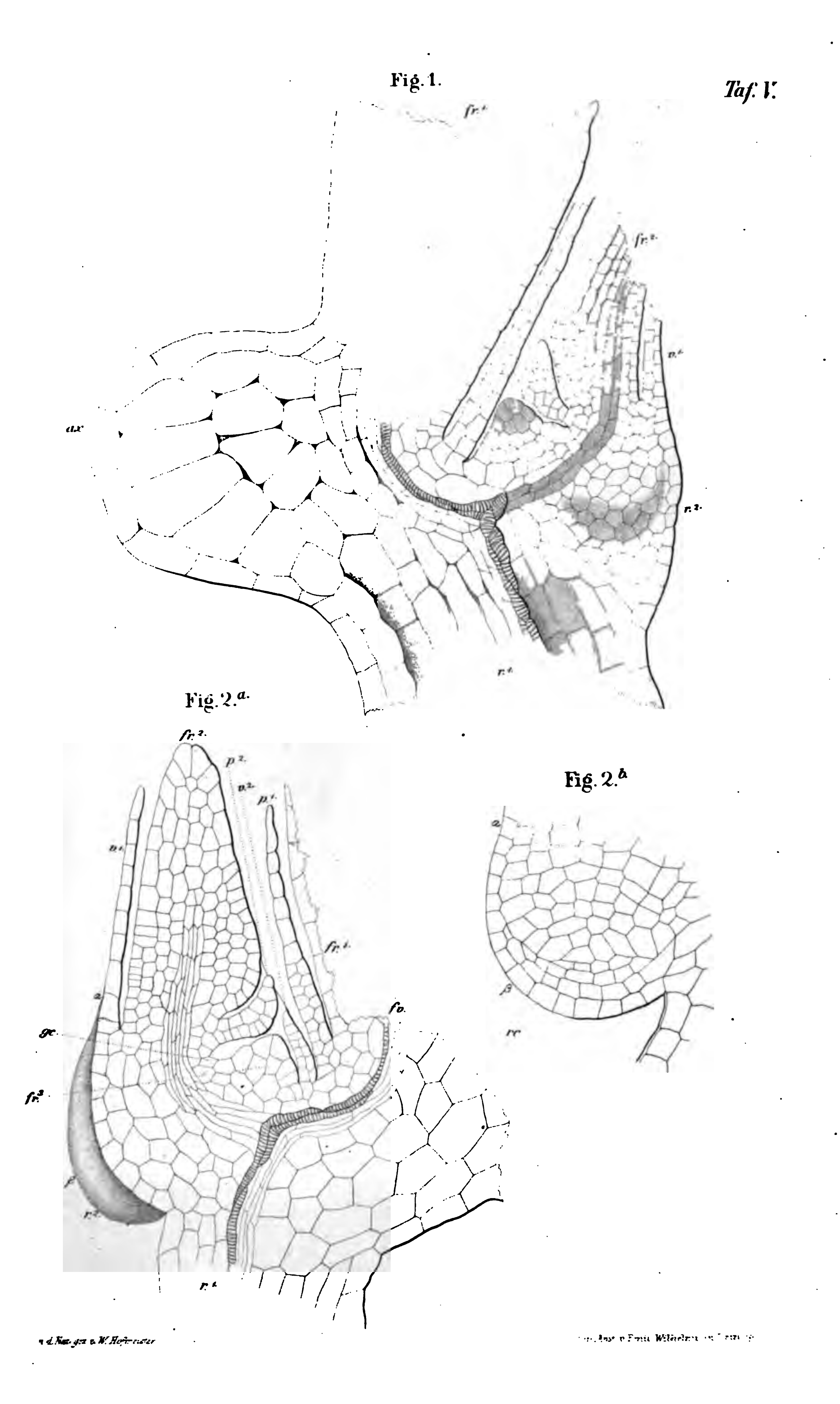


Fig. 3.

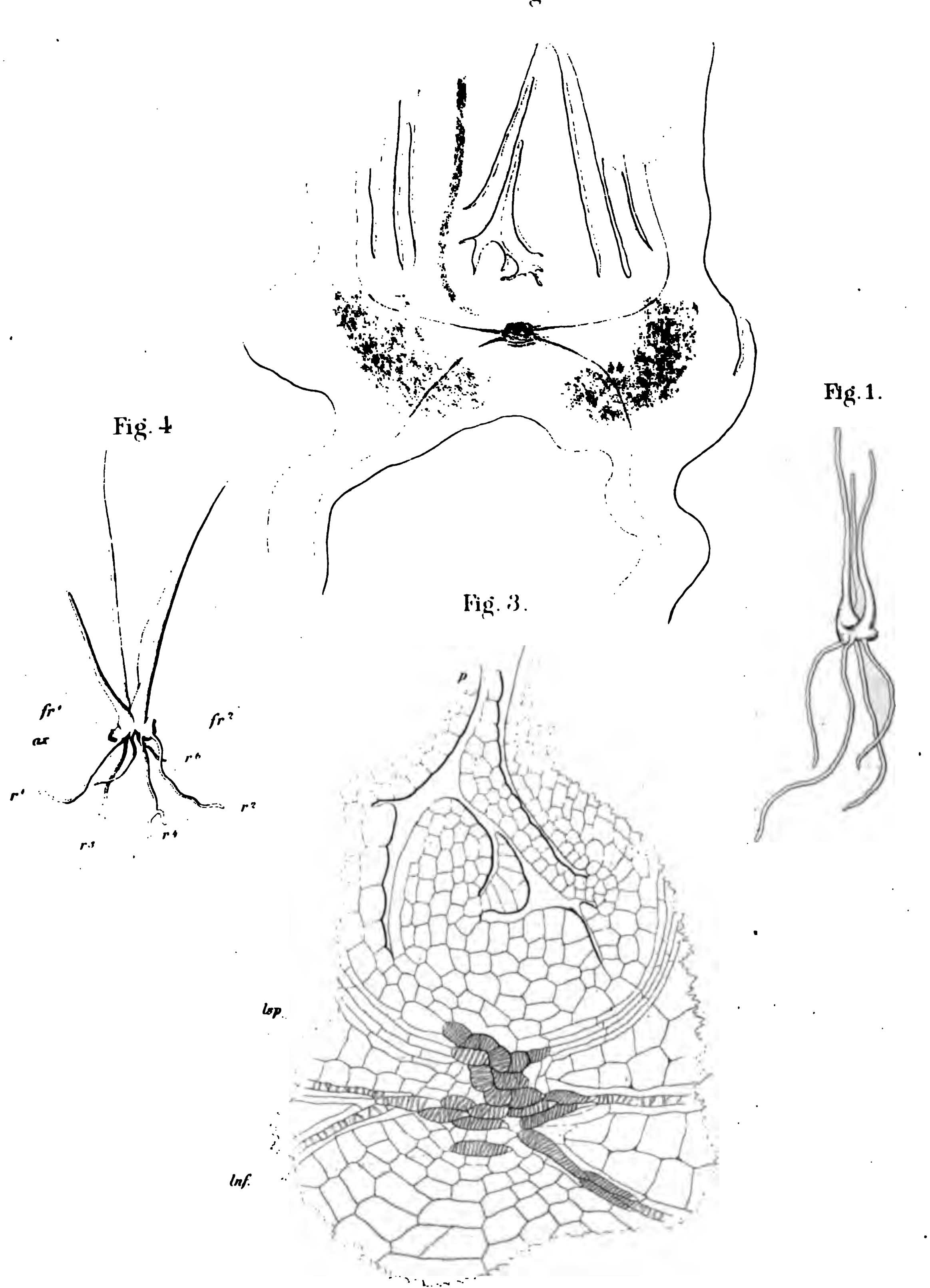




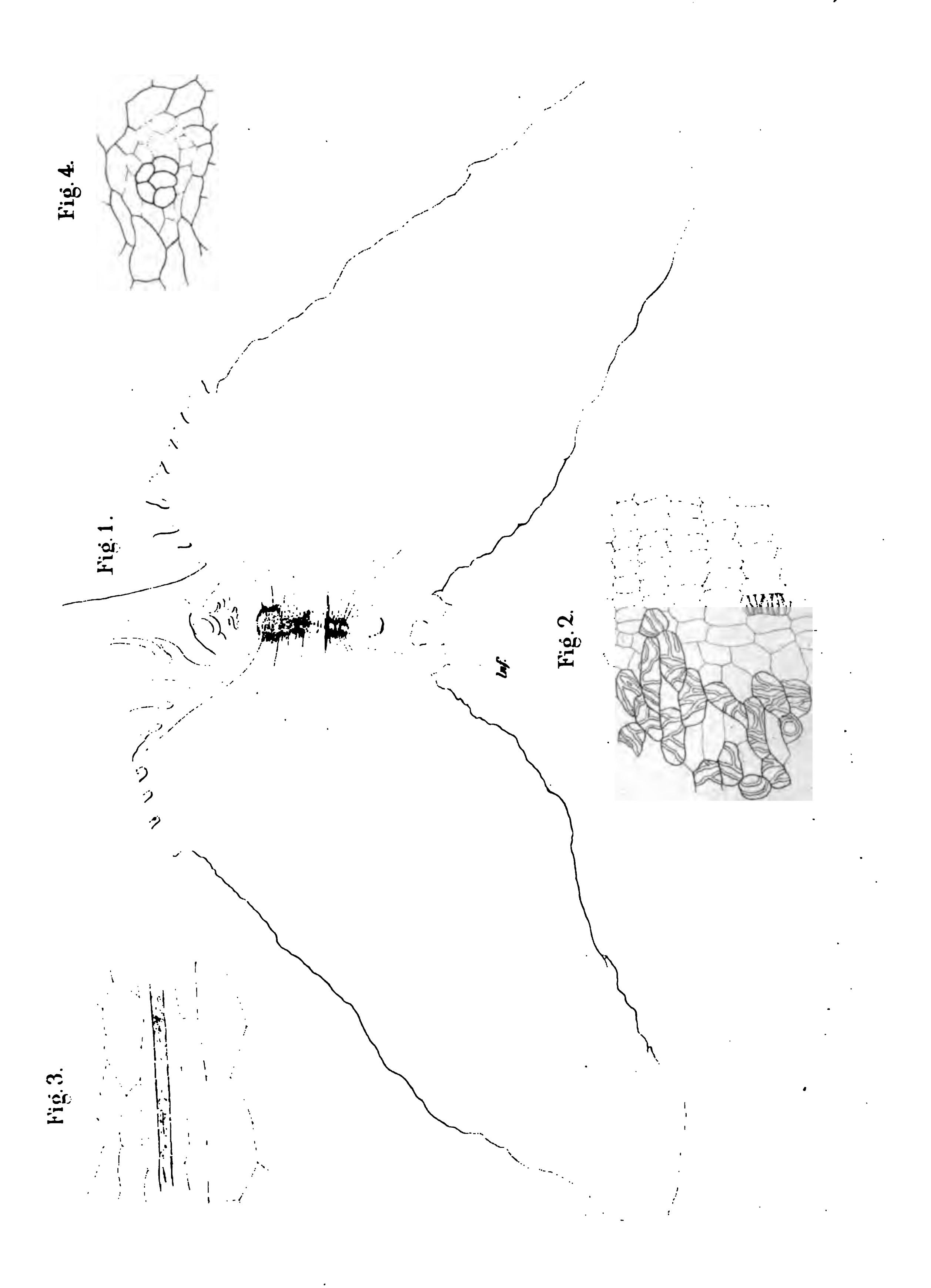
n. d. Nat. gez. v. W. Hofmeister

Lith. Anst. v. Emil Wilhelm in Leipzig




Fig. 2.
Fig. 1.
Fig. 4
fr¹
fr²
ax
r⁶
r¹
r²
r³
r⁴
Fig. 3.
p
lsp
lnf




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
inf

Taf. IX.

Fig. 1. a.

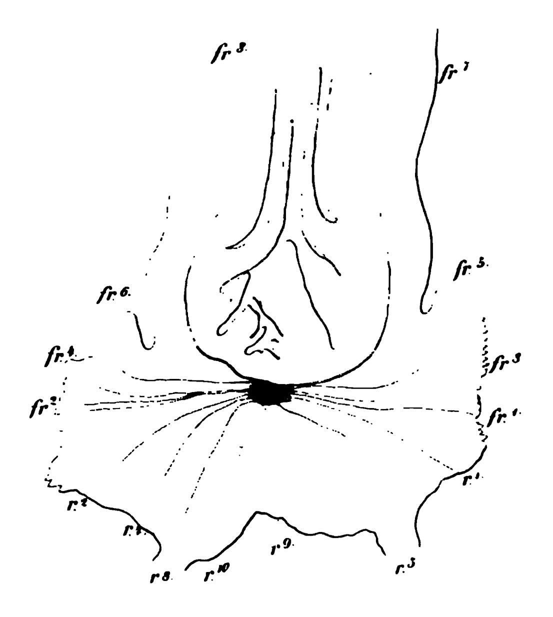
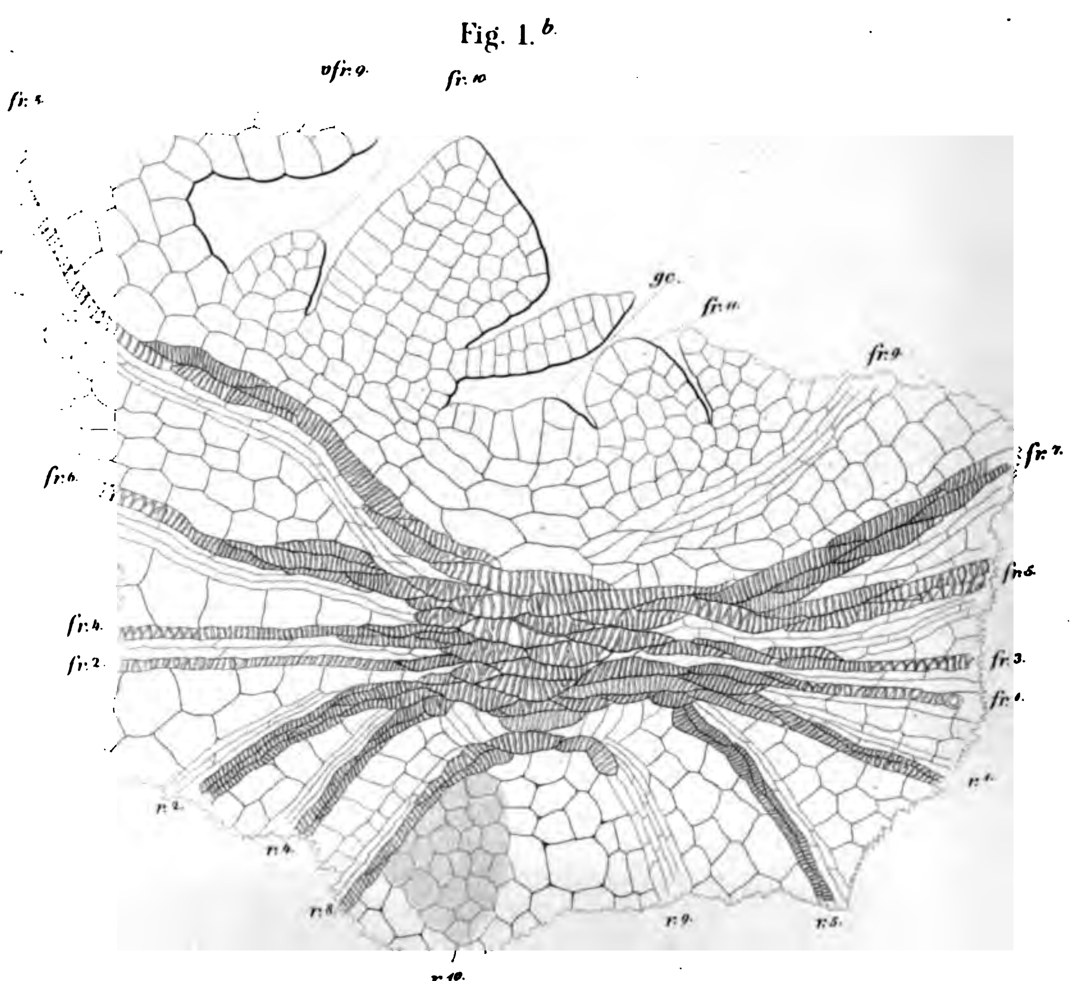


Fig. 1. b.





Taf. XIV.

Fig. 8.

Fig. 9. Fig. 10. Fig. 11. Fig. 12. Fig. 13.

Fig. 16.[b] Fig. 17[b] Fig. 14. Fig. 16.[a]

Fig. 5. Fig. 15. Fig. 6. Fig. 17[a].

Fig. 21.

Fig. 4.

Fig. 18. Fig. 19.

Fig. 7. Fig. 20.

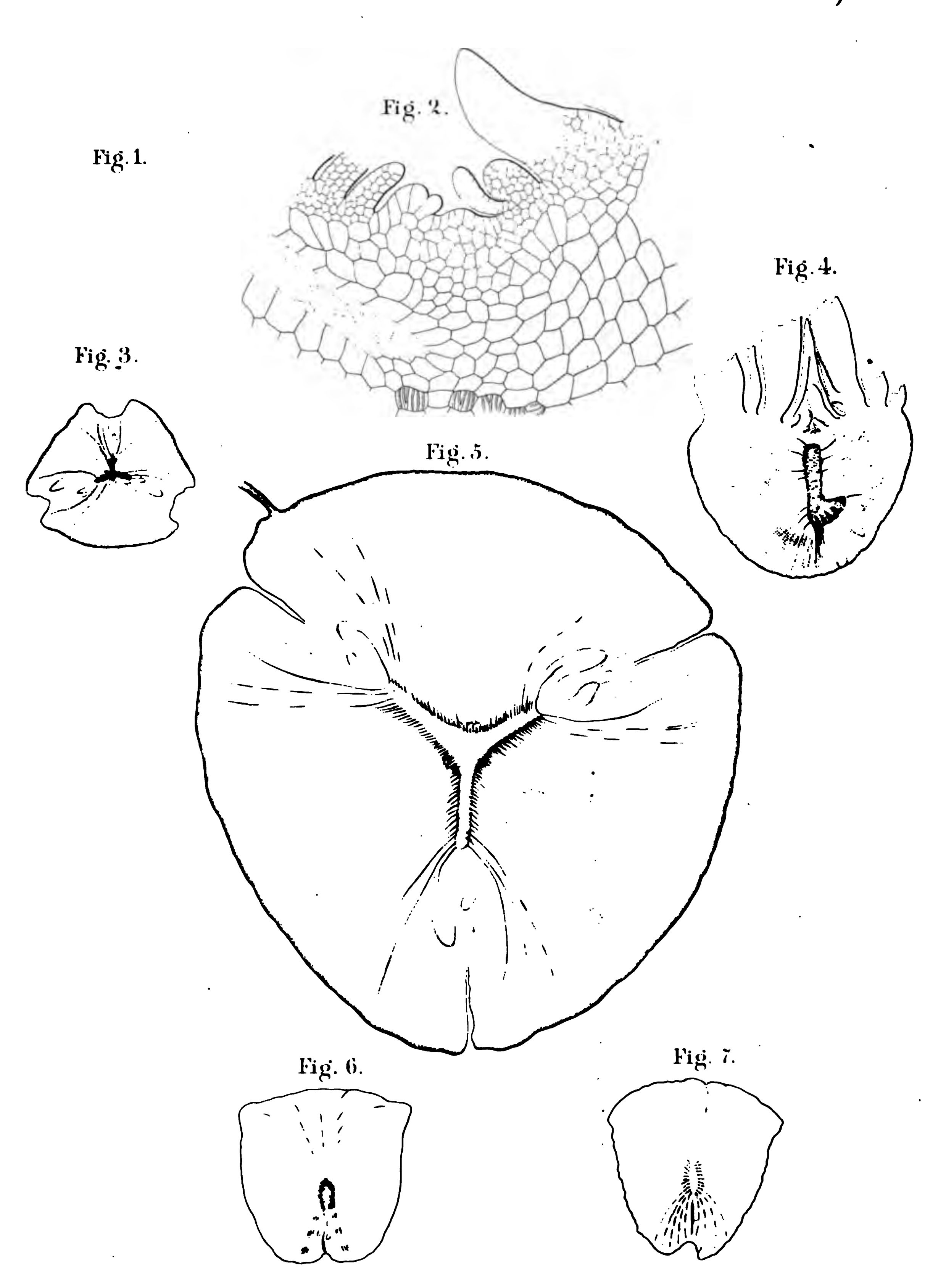
Fig. 22.

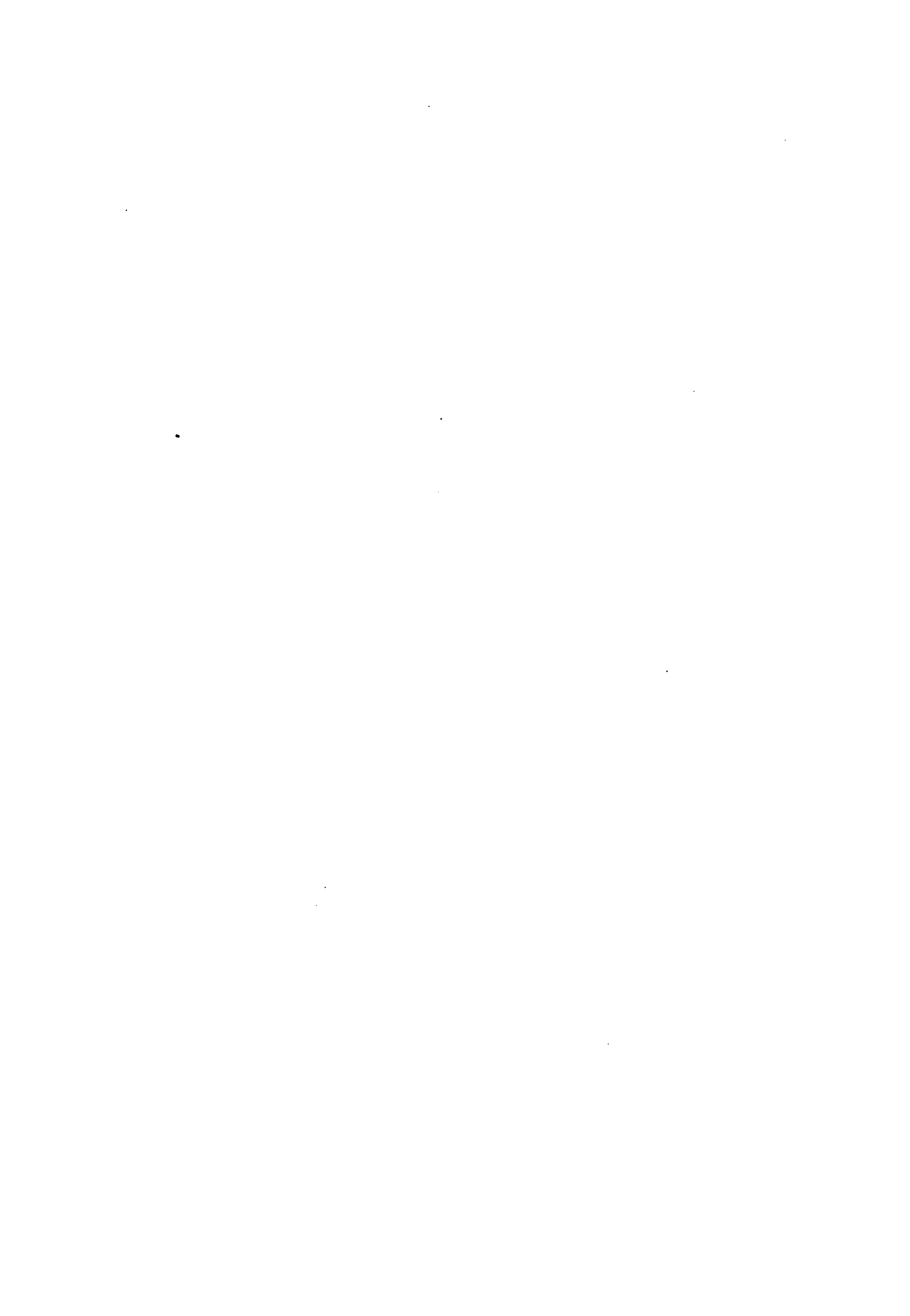
Fig. 1.

Fig. 3.

Fig. 2.




Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.



Taf. XVI.

Fig. 2.

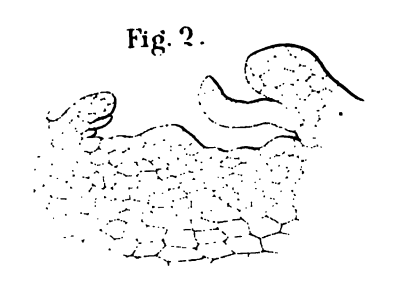


Fig. 1.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 5.



Taf.

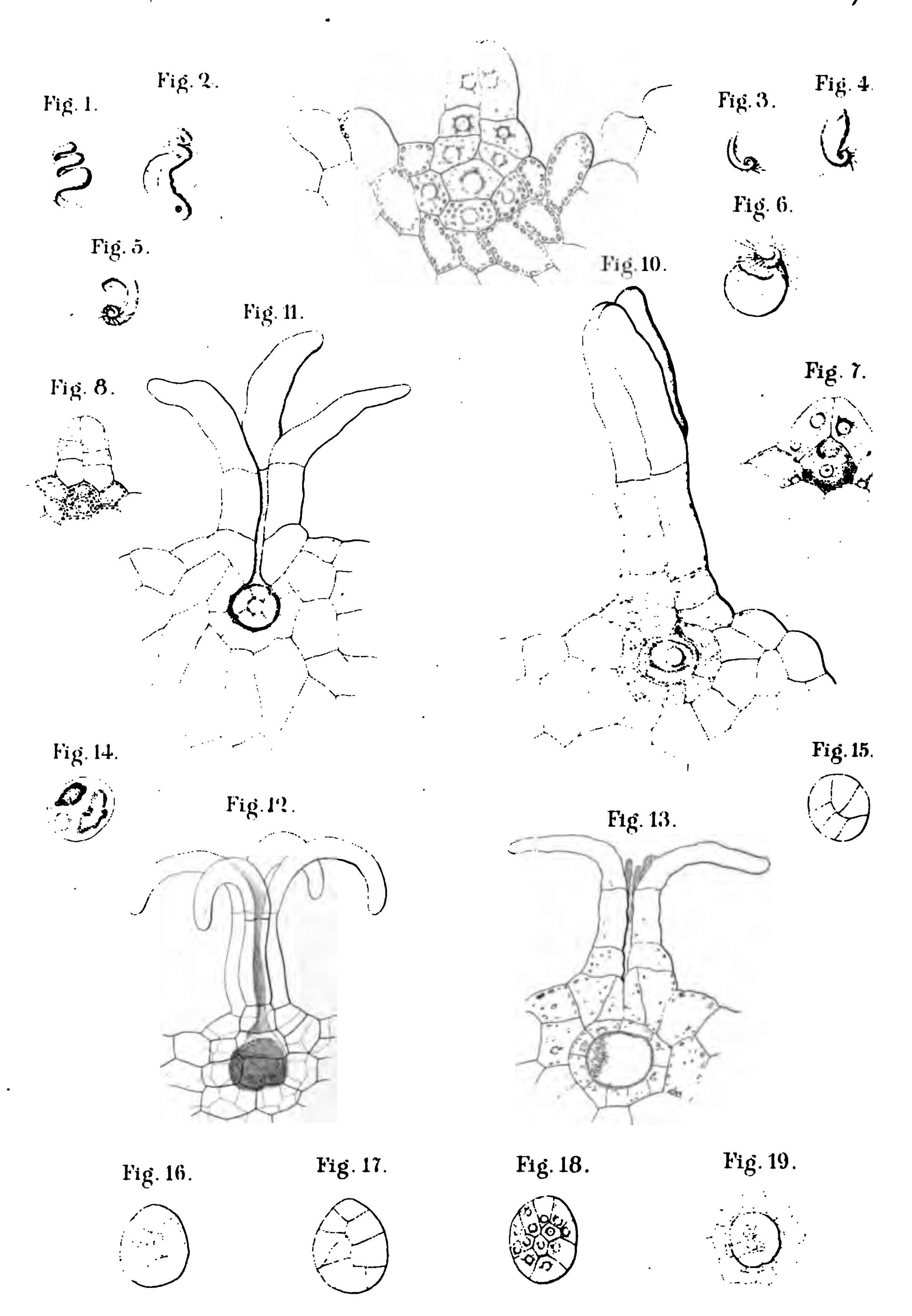
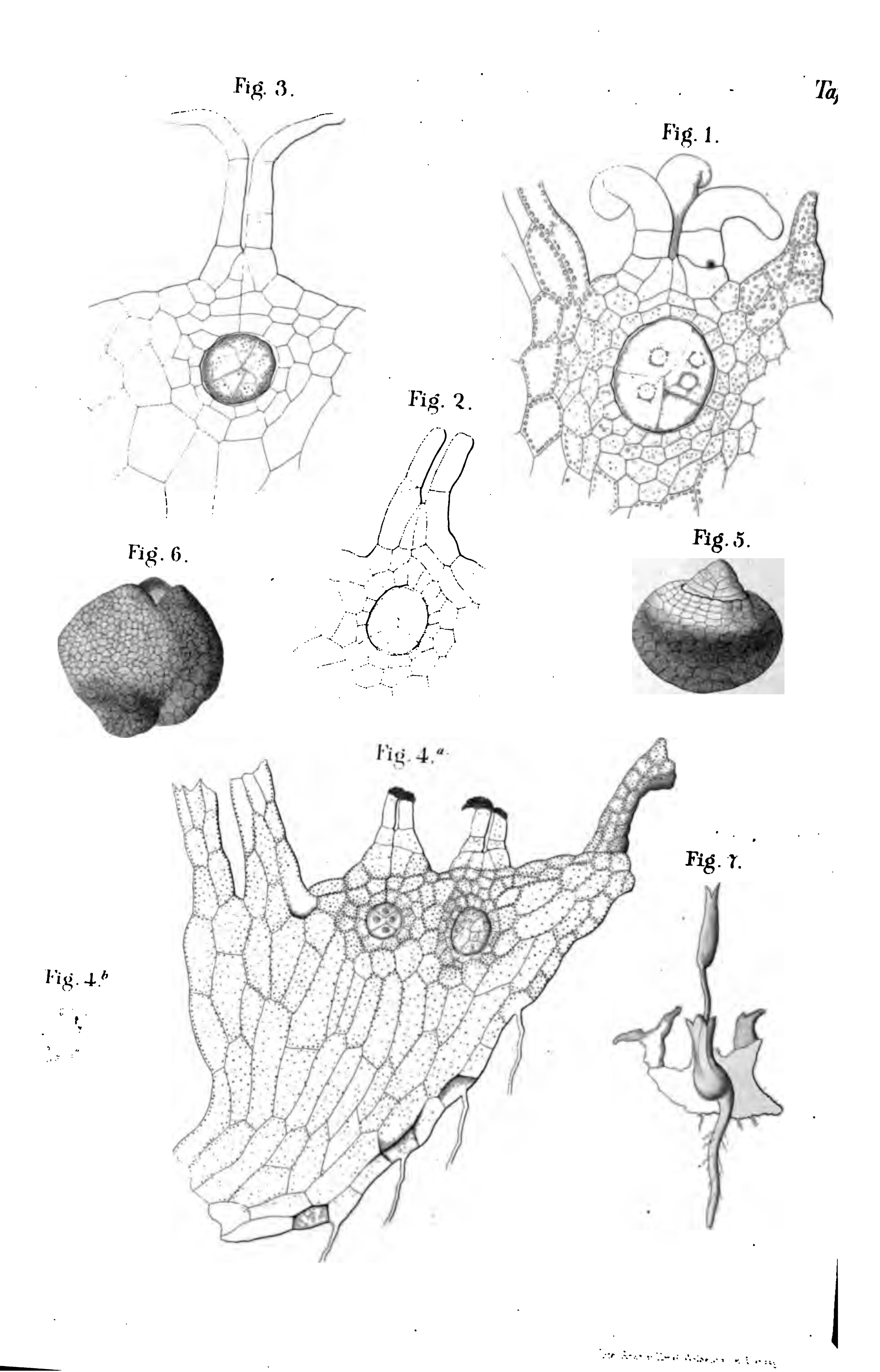
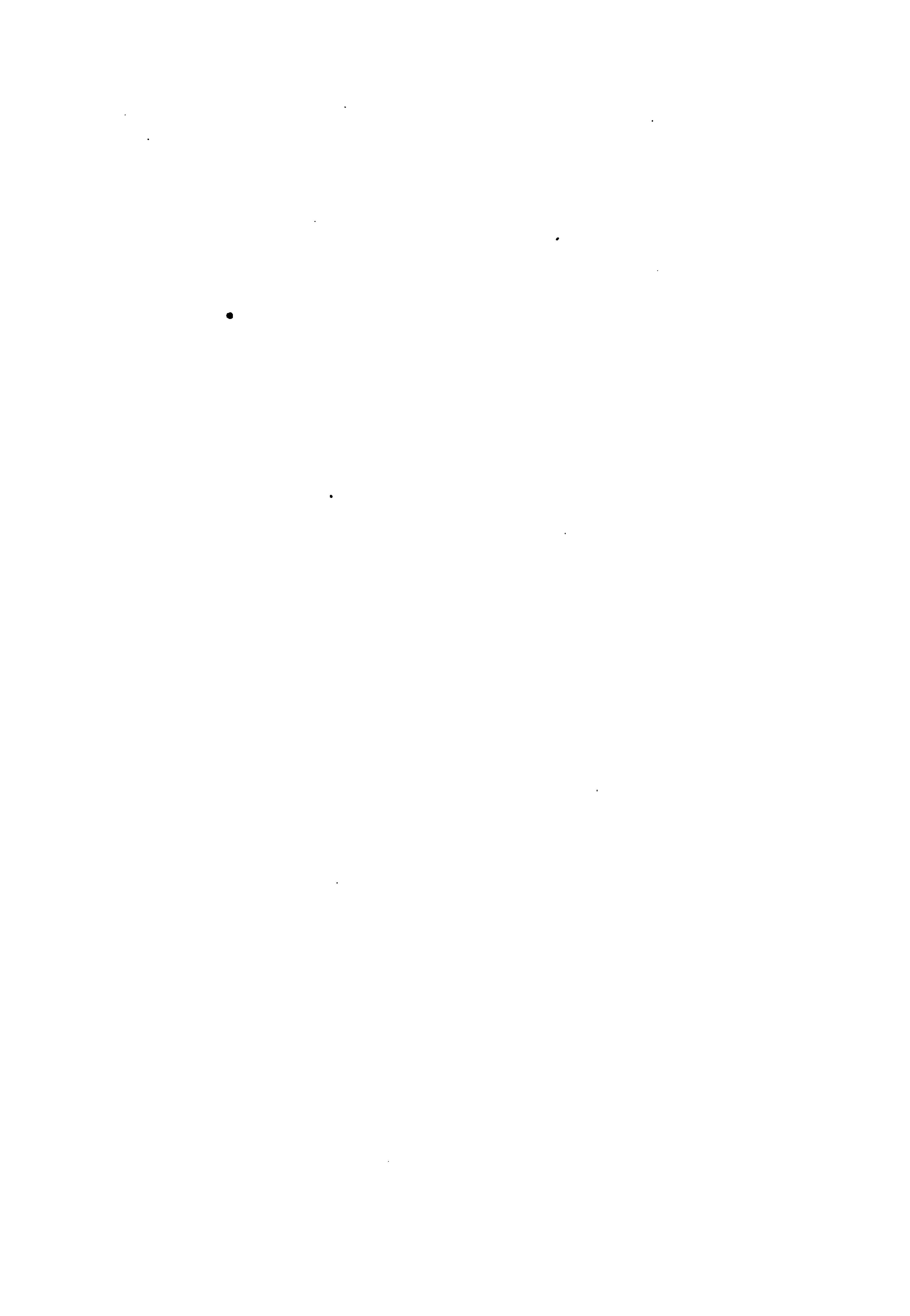
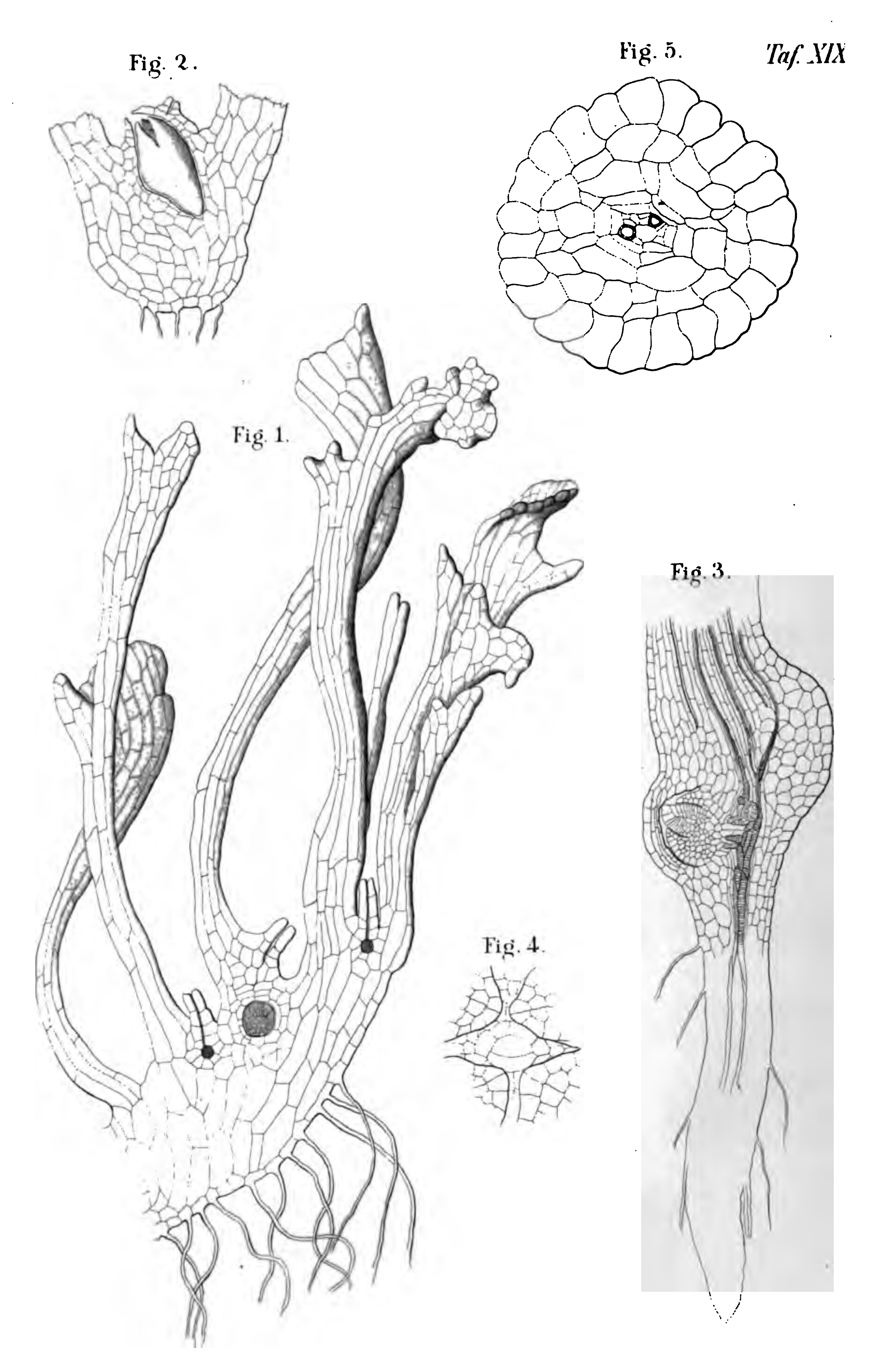


Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 19.


Fig. 3.
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 6.
Fig. 5.
Fig. 4.a
Fig. 4.b
Fig. 7.




Fig. 2.
Fig. 5.
Fig. 1.
Fig. 3.
Fig. 4.

ENTWICKELUNG DES PRODUCTS

EINER

POTENZ DES RADIUS VECTORS

MIT DEM

SINUS ODER COSINUS EINES VIELFACHEN DER WAHREN ANOMALIE IN REIHEN,

DIE

NACH DEN SINUSSEN ODER COSINUSSEN DER VIELFACHEN DER WAHREN, EXCENTRISCHEN ODER MITTLEREN ANOMALIE FORTSCHREITEN.

VON

P. A. HANSEN.

Es zerfällt diese Abhandlung in mehrere Theile, die mit einander in Verbindung stehen. Bezeichnet man den Radius Vector der Ellipse mit r, die wahre, excentrische und mittlere Anomalie bez. mit f, ε und g, so werden im § I die Producte $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ in Reihen entwickelt, die nach $\cos if$ und bez. $\sin if$ fortschreiten. Im § II wird die Entwickelung von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$ nach $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$, so wie die entgegengesetzte Entwickelung ausgeführt. Im § III die Entwickelung von $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ nach $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$, die sowohl durch die Verbindung des Inhalts der beiden vor. §§, wie direct erhalten wird. Der § IV giebt die Entwickelung von $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$ nach $\cos hg$ und $\sin hg$, so wie die entgegengesetzte Entwickelung. Der § V enthält die Entwickelung von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$ nach $\cos ig$ und $\sin ig$, so wie die entgegengesetzte Entwickelung, und zwar werden diese einestheils durch den Inhalt der vor. §§, und anderntheils unmittelbar erhalten. Im § VI endlich entwickele ich $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ nach $\cos ig$ und $\sin ig$, und zwar auch einestheils aus dem Inhalt der vor. §§, und anderntheils unmittelbar.

Bei diesen Entwickelungen bediene ich mich stets der zu den Anomalien gehörigen imaginären Exponentialfunctionen, wodurch an Einfachheit viel gewonnen wird, und neue Formen aufgefunden werden, die ohne dieses Hülfsmittel schwer zu finden sein würden. Da ich in dem Bericht, welcher diese Abhandlung begleitet, den Inhalt derselben ausführlicher aus einander gesetzt habe, so erlaube ich mir, in dieser Einleitung darauf hinzuweisen.

§ I.

Entwickelung der Functionen $r^n \cos mf$ und $r^n \sin mf$ in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von f fortschreiten.

1.

Die zur wahren Anomalie f gehörige imaginäre Exponentialfunction nenne ich x, so dass also

$$x = c^{f\sqrt{-1}}$$

ist, wenn c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet. Nennt man ausserdem e die Excentricität und ϱ das Verhältniss des Radius Vectors zur grossen Halbachse, und setzt

$$e = \sin\varphi,\ \beta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

so geht die Gleichung

$$\varrho^n = \left(\frac{1-e^2}{1+e\cos f}\right)^n$$

in folgende über

$$(1) \qquad \varrho^n = (1-\beta^2)^n \cos^n\varphi\ (1+\beta x)^{-n}\left(1+\frac{\beta}{x}\right)^{-n}$$

wo der Exponent n jeden beliebigen Werth haben kann. Dieser Ausdruck zeigt, dass man ϱ^n in eine convergirende, nach den ganzen, positiven und negativen, Potenzen von x fortschreitende Reihe entwickeln kann. Wir dürfen also setzen

$$(2) \qquad \varrho^n = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} V_i^{(n)} x^i$$

wo i stets eine ganze Zahl ist, und nothwendig

$$V_{-i}^{(n)} = V_i^{(n)}$$

sein muss, weil ϱ^n eine reelle Grösse ist.*)

2.

Wenn die Werthe der mit $V_i^{(n)}$ bezeichneten Coefficienten ermittelt sind, so ist es leicht die in der Ueberschrift angegebenen Entwickelungen herzustellen. Aus der Gleichung (2) folgt nemlich sofort

$$\varrho^n x^m = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} V_i^{(n)} x^{i+m}$$

$$\varrho^n x^{-m} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} V_i^{(n)} x^{i-m}$$

Da nun für jeden Werth von p

$$x^p = \cos pf + \sqrt{-1}\,.\,\sin pf,$$

und wenn man mit a die grosse Halbachse, und mit r den Radius Vector bezeichnet, $r = a\varrho$ ist, so folgt hieraus leicht, dass

*) Imaginäre Exponenten schliesse ich nemlich durchgehends aus.

$$r^n \cos mf = a^n V_m^{(n)} + a^n \Sigma_1^\infty \left\{ V_{i-m}^{(n)} + V_{i+m}^{(n)} \right\} \cos if$$

$$r^n \sin mf = a^n \Sigma_1^\infty \left\{ V_{i-m}^{(n)} - V_{i+m}^{(n)} \right\} \sin if$$

3.

Durch den binomischen Satz ergiebt sich

$$(1+\beta x)^{-n} = 1 - \tfrac{n}{1}\beta x + \tfrac{n.n+1}{1.2}\beta^2 x^2 - \tfrac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\beta^3 x^3 \pm \text{etc.}$$

$$\left(1+\tfrac{\beta}{x}\right)^{-n} = 1 - \tfrac{n}{1}\tfrac{\beta}{x} + \tfrac{n.n+1}{1.2}\tfrac{\beta^2}{x^2} - \tfrac{n.n+1.n+2}{1.2.3}\tfrac{\beta^3}{x^3} \pm \text{etc.}$$

und hieraus wegen der Gleichungen (1) und (2)

$$V_0^{(n)} = \cos^n\varphi(1-\beta^2)^n \left\{1 + \tfrac{n^2}{1^2}\beta^2 + \tfrac{n^2(n+1)^2}{1^2.2^2}\beta^4 + \tfrac{n^2(n+1)^2(n+2)^2}{1^2.2^2.3^2}\beta^6 + \text{etc.}\right\}$$

$$V_{\pm 1}^{(n)} = -\cos^n\varphi(1-\beta^2)^n \left\{\tfrac{n}{1}\beta + \tfrac{n^2.n+1}{1^2.2}\beta^3 + \tfrac{n^2(n+1)^2.n+2}{1^2.2^2.3}\beta^5 + \text{etc.}\right\}$$

$$V_{\pm 2}^{(n)} = \cos^n\varphi(1-\beta^2)^n \left\{\tfrac{n.n+1}{1.2}\beta^2 + \tfrac{n^2.n+1.n+2}{1^2.2.3}\beta^4 + \tfrac{n^2(n+1)^2.n+2.n+3}{1^2.2^2.3.4}\beta^6 + \text{etc.}\right\}$$

etc. etc.

welche Reihen für jeden Werth von $\beta < 1$ convergiren. Für $n = 1$ folgen hieraus sofort die einfachen Ausdrücke

$$V_0^{(1)} = \cos\varphi; \quad V_{\pm 1}^{(1)} = -\beta\cos\varphi; \quad V_{\pm 2}^{(1)} = \beta^2\cos\varphi, \text{ etc.} \qquad (3)$$

4.

Der obige Ausdruck (1) für ϱ^n giebt leicht eine linearische Gleichung zwischen vier V Coefficienten. Es folgt nemlich daraus, und weil

$$\cos\varphi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$$

ist

$$\varrho^{n-1} = \frac{\varrho^n}{\cos^2\varphi} + \frac{\beta}{(1-\beta^2)\cos\varphi}\varrho^n x + \frac{\beta}{(1-\beta^2)\cos\varphi}\varrho^n \frac{1}{x}$$

Substituirt man hierin für ϱ^n und ϱ^{n-1} die Ausdrücke

$$\varrho^n = \Sigma V_i^{(n)} x^i, \quad \varrho^{n-1} = \Sigma V_i^{(n-1)} x^i$$

und vergleicht die mit derselben Potenz von x multiplicirten Glieder, so ergiebt sich sogleich

$$V_i^{(n-1)} = \frac{1}{\cos^2\varphi} V_i^{(n)} + \frac{\beta}{(1-\beta^2)\cos\varphi}\left\{V_{i-1}^{(n)} + V_{i+1}^{(n)}\right\} \qquad (4)$$

vermittelst welcher man alle zur Potenz $n-1$ gehörigen V Coefficienten bekommen kann, wenn die zur Potenz n gehörigen berechnet worden sind. Man kann aber durch Zuziehung des Differentials von ϱ eine Gleichung zwischen drei V Coefficienten finden, welche bessere Dienste leistet. Das Differential lässt sich leicht wie folgt stellen,

$$x\frac{d\cdot\varrho^n}{dx} = n\frac{\beta(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2}\left(\frac{1}{x}-x\right)\varrho^{n+1}$$

und ausserdem giebt die Gleichung (1) die folgende

$$n\varrho^n = n\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2\varrho^{n+1} + n\frac{\beta(1+\beta^2)}{(1-\beta^2)^2}\left(x+\frac{1}{x}\right)\varrho^{n+1}$$

addirt und subtrahirt man diese, so erhält man

$$n\varrho^n + x\frac{d\cdot\varrho^n}{dx} = n\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2\varrho^{n+1} + 2n\frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)\frac{1}{x}\varrho^{n+1}$$

$$n\varrho^n - x\frac{d\cdot\varrho^n}{dx} = n\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2\varrho^{n+1} + 2n\frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)x\varrho^{n+1}$$

Die Substitution der Werthe

$$\varrho^n = \Sigma V_i^{(n)}x^i, \quad x\frac{d\cdot\varrho^n}{dx} = \Sigma i V_i^{(n)}x^i$$

giebt hiemit

$$(5)\qquad (n+i)V_i^{(n)} = n\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 V_i^{(n+1)} + 2n\frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)V_{i+1}^{(n+1)}$$

$$(6)\qquad (n-i)V_i^{(n)} = n\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 V_i^{(n+1)} + 2n\frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)V_{i-1}^{(n+1)}$$

deren eine auch aus der andern folgt, wenn man $-i$ statt i schreibt, und auf die Gleichung

$$V_i^{(n)} = V_{-i}^{(n)}$$

Rücksicht nimmt.

Die Gleichung (5) giebt

$$(7)\qquad V_i^{(n)} = \frac{n}{n+i}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 V_i^{(n+1)} + \frac{2n}{n+i}\frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)V_{i+1}^{(n+1)}$$

die wenn n positiv ist auf sichere Art alle $V_i^{(n)}$ durch die $V_i^{(n+1)}$ giebt, welches bei der Gleichung (4) nicht immer der Fall ist. Denn die beiden Glieder rechter Hand haben entgegengesetzte Zeichen und $V_i^{(n)}$ ist von der Ordnung β^i, wenn also β klein ist, so sind in (4) die beiden bez. mit $V_i^{(n)}$ und $V_{i-1}^{(n)}$ multiplicirten Glieder Grössen einer und derselben Ordnung, die von einander subtrahirt werden müssen. Dieser Uebelstand findet in (7) nicht statt. Wenn man daher für eine Reihe ganzer und positiver Werthe von n die V Coefficienten zu berechnen hat, und auf irgend eine andere Art dieselben für den grössten Werth von n, dessen man bedarf, berechnet hat, so erhält man durch die Gleichung (7) diese Coefficienten für alle übrigen Werthe von n auf sichere Art.

Eine andere Art die V Coefficienten für eine Reihe ganzer und positiver Werthe von n sicher zu berechnen, lässt sich aus der Gleichung (6) ableiten. Setzt man in diese $i+1$ statt i, so lässt sie sich in folgende verwandeln

$$V_{i+1}^{(n+1)} = \left(\frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}\right)^2 \frac{n-i-1}{n} V_{i+1}^{(n)} - \frac{2\beta}{1+\beta^2} V_i^{(n+1)} \tag{8}$$

Rechnet man die $V_i^{(1)}$ durch die Gleichungen (3) und ausserdem für jeden ganzen und positiven Werth von n die $V_0^{(n)}$ auf irgend eine andere Art, so kann man durch (8) alle übrigen VCoefficienten sicher berechnen.

Aus (6) folgt ausserdem

$$V_i^{(n)} = \frac{n}{n-i}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right)^2 V_i^{(n+1)} + \frac{2n}{n-i}\frac{\beta}{1-\beta^2}\left(\frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\right) V_{i-1}^{(n+1)} \tag{9}$$

und aus (1) folgt sogleich

$$V_0^{(-1)} = \frac{1}{\cos^2\varphi}\,; \quad V_i^{(-1)} = \frac{\beta}{\cos\varphi(1-\beta^2)}\,; \quad V_2^{(-1)} = 0\,;\ \text{etc.}$$

Diese geben in Verbindung mit (9) alle VCoefficienten für eine Reihe negativer und ganzer Werthe von n mit Sicherheit.

5.

Wenn e und n beide klein sind, so kann man die VCoefficienten leicht durch die unendlichen Reihen des Art. 3 berechnen, aber wenn diese Bedingungen, oder nur eine derselben, nicht erfüllt sind, so wird diese Art der Berechnung beschwerlich, weil man viele Glieder der Reihen berechnen muss. Ich werde daher jetzt zeigen, wie man für einen gegebenen Werth von n alle diese Coefficienten durch Kettenbrüche berechnen kann, wenn $V_0^{(n)}$ anderweitig berechnet worden ist.

Eliminirt man $V_i^{(n)}$ zwischen den Gleichungen (5) und (6), und schreibt darauf n statt $n+1$, so bekommt man

$$(n+i-1)\beta V_{i-1}^{(n)} + i(1+\beta^2)V_i^{(n)} - (n-i-1)\beta V_{i+1}^{(n)} = 0 \tag{10}$$

welches eine Relation zwischen je drei auf einander folgenden, einem und demselben Werthe des Exponenten n zugehörigen, V Coefficienten ist. Aus dieser Gleichung liessen sich zwar, wenn $V_0^{(n)}$ und $V_1^{(n)}$ anderweitig berechnet worden sind, alle andern, demselben Werthe von n zugehörigen VCoefficienten berechnen, allein diese Berechnung führt auf kleine Differenzen grosser Zahlen, und ist daher unsicher. Die Berechnung durch Kettenbrüche, die ich jetzt auseinander setzen werde, ist von diesem Uebelstande frei, ja sie besitzt im Gegentheil die Eigenschaft, dass ein Fehler in dem zuerst anzuwendenden Verhältniss von zwei auf einander folgenden VCoefficienten in die übrigen mehr und mehr verkleinert übergeht und zuletzt unmerklich wird.

Sei nun, von $i = 1$ angefangen, für alle positiven und ganzen Werthe von i

$$\frac{V_i^{(n)}}{V_{i-1}^{(n)}} = p_i$$

so geht die Gleichung (10) über in

$$0 = (n+i-1)\beta + i(1+\beta^2)p_i - (n-i-1)\beta\, p_i\, p_{i+1}$$

und setzt man ferner

$$(11) \qquad p_i = -F_i\gamma_i$$

$$F_i = \frac{n+i-1}{i} \cdot \frac{\beta}{1+\beta^2} = \frac{i+n-1}{2i}\sin\varphi$$

$$\lambda_i = \frac{(n-i)(n+i-1)}{i(i-1)} \cdot \frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2} = F_i\,\frac{n-i}{i-1}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}$$

so verwandelt sie sich in

$$(12) \qquad 0 = 1 - \gamma_i - \gamma_i\,\gamma_{i+1}\,\lambda_{i+1}$$

woraus

$$\gamma_i = \frac{1}{1+\lambda_{i+1}\gamma_{i+1}}$$

und durch fortgesetzte Substitution die Kettenbrüche

$$\gamma_{i-1} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\lambda_i}{1+\cfrac{\lambda_{i+1}}{1+\text{etc.}}}} \qquad \gamma_{i-2} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\lambda_{i-1}}{1+\cfrac{\lambda_i}{1+\cfrac{\lambda_{i+1}}{1+\text{etc.}}}}} \qquad \text{etc.}$$

entstehen. Man bekommt also, wie man sieht, alle γ_i aus einem und demselben Kettenbruche durch blose Fortsetzung der Glieder desselben bis zu dem, welches von λ_2 abhängt. Sind hieraus die γ_i berechnet, und darauf die p_i durch (11), so wird

$$V_i^{(n)} = V_0^{(n)} p_1 p_2 p_3 \ldots p_i$$

und da

$$V_{-i}^{(n)} = V_i^{(n)}.$$

so hat man alle, einem und demselben Werthe des Exponenten n zukommenden VCoefficienten, wenn auf irgend eine andere Art $V_0^{(n)}$ berechnet worden ist.

Der obige Ausdruck für λ_i giebt zu erkennen, dass wenn n eine ganze und positive Zahl ist,

$$\lambda_n = 0$$

wird, es ist daher in diesem Falle

$$\gamma_{n-1} = 1.$$

für $i < n-1$ besteht also der Kettenbruch aus einer endlichen Zahl von Gliedern, und zwar hat man, um die γ_i von γ_1 bis γ_{n-1} zu bekommen, überhaupt nur $n-2$ Glieder zu berechnen. Z. B. für $n = 6$ wird

$$\gamma_5 = 1,\quad \gamma_4 = \frac{1}{1+\lambda_5},\quad \gamma_3 = \frac{1}{1+\lambda_4\gamma_4},\quad \gamma_2 = \frac{1}{1+\lambda_3\gamma_3},\quad \gamma_1 = \frac{1}{1+\lambda_2\gamma_2}$$

Derselbe Ausdruck für λ_i zeigt ferner, dass wenn n eine ganze und negative Zahl ist,

$$\lambda_{n+1} = 0$$

wenn man, wie erlaubt ist, auch in diesem Falle i stets positiv annimmt. Es wird daher nun

$$\gamma_n = 1$$

und für $i < (-n)$ besteht der Kettenbruch aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, deren Berechnung sich eben so gestaltet, wie die der eben angeführten, und ohne Weiteres sicher ausgeführt werden kann. Für grössere Werthe von i ist die Sache anders, jenachdem die ganze Zahl n positiv oder negativ ist. Wenn sie negativ ist, wird

$$F_{(-n)+1} = 0$$

und deshalb brechen in diesem Falle die VCoefficienten bei $V_{\pm n}^{(n)}$ ab. Ist hingegen n ganz und positiv, so kann F_i nie Null werden, und die VCoefficienten gehen ins Unendliche fort; wenn nun zugleich

$$i > n - 1$$

ist, so geht auch der Kettenbruch ins Unendliche fort und die Anzahl der Glieder desselben, die überhaupt berechnet werden müssen, um eine gewünschte Genauigkeit zu erhalten, hängt von der Beschaffenheit der Grenze ab, nach welcher die γ_i für ein stets wachsendes i hinstreben.

Macht man $i = \infty$ in dem Ausdruck für λ_i, so wird

$$\lambda_\infty = -\tfrac{1}{4}\sin^2\varphi$$

und die Gleichung (12) geht über in

$$0 = 1 - 4\gamma_\infty + \sin^2\varphi\,\gamma_\infty^2$$

woraus

$$\gamma_\infty = \sec^2\tfrac{1}{2}\varphi = 1 + \beta^2$$

folgt. Die Glieder des Kettenbruches convergiren also nicht gegen die Null, sondern gegen die endliche Grösse $-\sin^2\frac{1}{2}\varphi$. Wenn φ klein ist, so erwächst hieraus kein sonderlicher Uebelstand; wenn dieses aber nicht der Fall ist, so muss man um für den grössten Werth von i, dessen man bedarf, γ_i hinreichend sicher zu erhalten, eine grosse Anzahl der Glieder des Kettenbruches berechnen, in deren letztem man den genäherten Werth $\sec^2\frac{1}{2}\varphi$ für das betreffende γ_i substituiren muss.

Man kann diesen Uebelstand vermeiden, indem sich für γ_i ein anderer Kettenbruch entwickeln lässt, dessen Glieder, wenn sie nicht etwa abbrechen, stets zur Null hin convergiren. Um diesen aus dem Vorher-

gehenden abzuleiten, werde ich die folgenden allgemeinen Betrachtungen voransenden.

6.

Es sei die folgende allgemeine Gleichung zwischen q_i und q_{i+1} gegeben,

$$\text{(A)} \qquad q_i(1+a_i-b_i q_{i+1}) = 1$$

die man in einen Kettenbruch verwandeln soll. Man setze

$$a_i - b_i q_{i+1} = -\alpha_i r_{i+1}$$

wo α_i einstweilen unbestimmt ist. Hiemit geht (A) über in

$$q_i = \frac{1}{1-\alpha_i r_{i+1}}$$

woraus durch Verschiebung der Indices

$$q_{i+1} = \frac{1}{1-\alpha_{i+1} r_{i+2}}$$

u. s. w. entsteht. Eliminirt man hiemit q_i und q_{i+1} aus (A), und setzt zugleich

$$\alpha_i = b_i - a_i$$

so ergiebt sich

$$\text{(B)} \qquad 1 + a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} r_{i+2} = (1-\alpha_{i+1} r_{i+2}) r_{i+1}$$

Setzt man ferner

$$r_{i+1} = \frac{1}{1-\beta_i s_{i+2}}\,; \quad r_{i+2} = \frac{1}{1-\beta_{i+1} s_{i+3}}\,; \quad \text{u. s. w.}$$

eliminirt damit r_{i+1} und r_{i+2} aus (B), und bestimmt β_i so, dass

$$\beta_i = \alpha_{i+1} + a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}$$

wird, so erhält man

$$\text{(C)} \qquad s_{i+2}(1+c_i-d_i s_{i+3}) = 1$$

wo

$$c_i = a_i \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\,; \quad d_i = \beta_{i+1}$$

ist. Die Gleichung (C) ist aber von der nemlichen Form, wie die Gleichung (A), von welcher wir ausgegangen sind, man kann also diese Substitutionen ins Unendliche wiederholen, wodurch der folgende Kettenbruch entsteht,

$$q_i = \cfrac{1}{1-\cfrac{\alpha_i}{1-\cfrac{\beta_i}{1-\cfrac{\gamma_i}{1-\cfrac{\delta_i}{1-\text{etc.}}}}}}$$

in welchem

$$\alpha_i = b_i - a_i$$
$$\beta_i = \alpha_{i+1} + a_i \frac{a_{i+1}}{a_i}$$
$$\gamma_i = d_i - c_i = \beta_{i+1} - a_i \frac{a_{i+1}}{a_i}$$
$$\delta_i = \gamma_{i+1} + c_i \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i} = \gamma_{i+1} + a_i \frac{a_{i+1}}{a_i} \cdot \frac{\gamma_{i+1}}{\gamma_i}$$
etc.

7.

Um die Substitutionen des vor. Art. anzuwenden bemerke ich, dass im vorvor. Art. der Grenzwerth von γ_i gleich $1 + \beta^2$ gefunden wurde. Man kann also setzen

$$\gamma_i = q_i(1 + \beta^2)$$

wo q_i eine Grösse ist, die für wachsende i die Eins zur Grenze hat. Substituirt man diesen Werth von γ_i, so wie den des vorvor. Art. für λ_i in die Gleichung (12), so kommt

$$q_i\left(1 + \beta^2 + \frac{(n-i-1)(i+n)}{i(i+1)}\beta^2 q_{i+1}\right) = 1$$

vergleicht man diese mit (A), so wird

$$a_i = \beta^2;\quad b_i = -\frac{(n-i-1)(i+n)}{i(i+1)}\beta^2$$

Die Substitution dieser Werthe in die Endformeln des vor. Art. giebt im vorliegenden Falle

$$\alpha_i = \frac{n(1-n)}{i(i+1)}\beta^2 \quad ; \qquad \beta_i = \frac{(i+n)(i+1-n)}{(i+1)(i+2)}\beta^2$$
$$\gamma_i^1 = \frac{(n+1)(2-n)}{(i+2)(i+3)}\beta^2; \qquad \delta_i' = \frac{(i+1+n)(i+2-n)}{(i+3)(i+4)}\beta^2$$
etc. etc.

und es wird

$$\gamma_i = \cfrac{\sec^2\frac{1}{2}\varphi}{1 - \cfrac{\alpha_i}{1 - \cfrac{\beta_i}{1 - \cfrac{\gamma_i^1}{1 - \text{etc.}}}}}$$

*) Es ist sichtbar, dass wie auch n und β beschaffen sein mögen, die α_i, γ_i, etc. für wachsende i zur Null convergiren, während die β_i, δ_i, etc. zu β^2 convergiren. Je grösser i ist, desto weniger Glieder dieses Ket-

*) Ich bemerke hiezu, dass dieses derselbe Kettenbruch ist, den man aus [25] in *Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam* etc. erhalten haben würde.

tenbruchs brauchen berechnet zu werden, um eine gegebene Genauigkeit zu erhalten. Für $i = \infty$ wird $\alpha_i = 0$, etc. also

$$\gamma_\infty = \sec^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$

wie vorher.

Wenn n eine ganze Zahl ist, bricht der Kettenbruch für jeden Werth von i ab, und besteht also stets aus einer endlichen Anzahl von Gliedern. Es ist aus den obigen Ausdrücken sichtbar, dass wenn n positiv ist, die n^{te} der Grössen α_i, γ_i, etc. Null ist, und dass also, i mag sein wie es will, der Kettenbruch nie aus mehr wie $2(n-1)$ Gliedern besteht. Diese Anzahl ist stets vorhanden wenn $i > n-1$ ist, findet aber diese Ungleichheit nicht statt, so wird auch eine der Grössen β_i, δ_i, etc. gleich Null, und der Kettenbruch bricht früher ab. Ist $i = n-1$, so wird schon $\beta_i = 0$ und der Kettenbruch besteht nur aus Einem Gliede, ist $i = n-2$, so ist $\delta_i = 0$, und er besteht aus drei Gliedern u. s. w. Ueberhaupt besteht er aus höchstens $2n - 3$ Gliedern, wenn $i < n$ ist. Wenn n negativ ist, findet ein ähnliches Verhalten statt.

Es wird sich oft ereignen, dass wegen der Kleinheit von β der Kettenbruch so stark convergirt, dass man um die erforderliche Genauigkeit zu erhalten nur eine kleine Anzahl der vorhandenen Glieder zu berechnen braucht. Da man nun bei Anwendung des obigen Kettenbruches für jedes i alle merklichen Glieder desselben von neuem berechnen muss, der Kettenbruch des Art. 5 hingegen für jeden hinzukommenden Werth von i nur die Berechnung Eines Gliedes verlangt, so verfährt man am zweckmässigsten, wenn man nur für den grössten Werth von i, welcher erforderlich ist, γ_i aus dem Kettenbruche dieses Artikels rechnet, und sich für die übrigen γ_i des im Art. 5 abgeleiteten bedient.

8.

Um durch die eben entwickelten Methoden die $V^{(n)}_{\pm i}$ selbst zu bekommen bedarf es nur noch der Berechnung von $V^{(n)}_0$, und wenn beides n und β klein ist, so kann diese leicht durch die unendliche Reihe des Art. 3 ausgeführt werden. Wenn β klein ist, so kann man sich dieser Reihe auch für ziemlich grosse Werthe von n bedienen, während sie für sehr grosse Werthe von n beschwerlich wird; ist β nicht klein, so wird ihre Anwendung auch für kleine Werthe von n mühsam.

Die $V_i^{(n)}$ überhaupt sind hypergeometrische Reihen von der Gattung, über welche von *Euler, Gauss* und *Kummer* so vollständige und schöne Untersuchungen vorliegen, und man weiss dadurch, dass jede derselben sich auf mannigfaltige Art durch andere derselben Gattung ausdrücken lässt. Da in allen Reihen dieser Gattung, die hier vorkommen werden, das vierte Element ein Quadrat ist, so will ich sie hier allgemein mit $F(\alpha, \beta, \gamma, z^2)$ statt der gewöhnlichen Bezeichnung $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ andeuten. Es ist also

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} z^2 + \frac{\alpha \cdot \overline{\alpha+1} \cdot \beta \cdot \overline{\beta+1}}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot \overline{\gamma+1}} z^4 + \text{etc.} \quad (13)$$

Die Summe dieser Reihe, die ich auch der Einfachheit wegen blos mit F bezeichnen werde, lässt sich bekanntlich auch als particuläres Integral einer linearischen Differentialgleichung zweiter Ordnung ausdrücken; macht man in dieser z zur unabhängigen Veränderlichen, so wird sie

$$z(1-z^2)\frac{d^2F}{dz^2} + \{2\gamma - 1 - (2\alpha + 2\beta + 1)z^2\}\frac{dF}{dz} - 4\alpha\beta z F = 0 \quad (14)$$

Man kann diese direct aus der vorstehenden Reihe ableiten, und man kann sie auch *a posteriori* dadurch verificiren, dass man die Reihe in sie substituirt, wodurch ihr Genüge geleistet wird. Von den Verwandelungsformeln, die man kennt, will ich hier nur die folgenden anführen,

$$\left.\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) &= (1-z^2)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, z^2) \\ F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) &= (1-z^2)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{z^2}{z^2-1}\right) \\ F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) &= (1-z^2)^{-\beta} F\left(\gamma-\alpha, \beta, \gamma, \frac{z^2}{z^2-1}\right) \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) =$$
$$Az^{2(1-\gamma)} F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, z^2) + BF(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z^2)$$

wo
$$A = \frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(1-\gamma)\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}$$
$$B = \frac{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)}$$

und überhaupt $\Pi(p)$ die Gaussische ΠFunction bedeutet. *Kummer* bezeichnet die beiden letzten dieser Gleichungen besonders als Fundamentalgleichungen für die Verwandelung der FFunctionen, indem sich aus diesen alle übrigen ableiten lassen, in welchen alle vier Elemente von einander als unabhängig betrachtet werden.

9.

Vergleicht man die allgemeine Reihe (13) mit den Ausdrücken für $V_i^{(n)}$ des Art. 3, so findet man leicht dass

(16) $V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i} \beta^i \cos^n\varphi (1-\beta^2)^n F(n, n+i, i+1, \beta^2)$

wo zur Abkürzung

$$B_{-n,i} = \frac{n \,.\, n+1 \ldots . n+i-1}{1 \,.\, 2 \ldots i}$$

gesetzt ist, also $(-1)^i B_{-n,i}$ den i^{ten} Binominalcoefficienten der Potenz $-n$ bedeutet. Es ist hier immer i eine ganze positive Zahl, n kann aber jede beliebige Zahl sein. Dieser Ausdruck der VCoefficienten wird nur dann ein endlicher, wenn n eine ganze negative Zahl ist, durch Anwendung der ersten Verwandelungsformel (15) kann man ihn aber in einen andern umformen, welcher ein endlicher Ausdruck wird, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Die Substitution dieser Relation giebt sofort

(17) $V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i} \beta^i \cos^n\varphi (1-\beta^2)^{-n+1} F(i+1-n, 1-n, i+1, \beta^2)$

welches augenscheinlich eine endliche Function ist, wenn für n irgend eine ganze und positive Zahl substituirt wird. Schreiben wir für $i = 0$ die ersten Glieder hin:

$$V_0^{(n)} = \frac{\cos^n\varphi}{(1-\beta^2)^{n-1}} \left\{ 1 + \frac{(n-1)^2}{1^2}\beta^2 + \frac{(n-1)^2 (n-2)^2}{1^2 \,.\, 2^2}\beta^4 + \frac{(n-1)^2 (n-2)^2 (n-3)^2}{1^2 \,.\, 2^2 \,.\, 3^2}\beta^6 + \text{etc.} \right\}$$

Wenn n klein ist, kann man aus diesem Ausdruck $V_0^{(n)}$ für jeden Werth von β mit Leichtigkeit berechnen. Die Anwendung der obigen zweiten und dritten Verwandelungsformeln würde andere Ausdrücke der VCoefficienten geben, die ich aber hier nicht anführen will, da sie sich jeder leicht hinschreiben kann.

Aus den beiden eben entwickelten Ausdrücken für $V_{\pm i}^{(n)}$ kann man eine nützliche Relation ableiten. Setzt man $-n$ für n in (16), so entsteht

$$V_{\pm i}^{(-n)} = B_{n,i} \beta^i \cos^{-n}\varphi (1-\beta^2)^{-n} F(-n, i-n, i+1, \beta^2)$$

setzt man hingegen $n+1$ für n in (17), so kommt

$$V_{\pm i}^{(n+1)} = (-1)^i B_{-(n+1),i} \beta^i \cos^{n+1}\varphi (1-\beta^2)^{-n} F(i-n, -n, i+1, \beta^2)$$

in welchen die FFunctionen einander gleich sind, da man das erste und zweite Element einer jeden derselben mit einander verwechseln darf. Diese beiden Gleichungen geben

(18) $$V_{\pm i}^{(-n)} = (-1)^i \frac{n \,.\, n-1 \ldots n-i+1}{n+1 \,.\, n+2 \ldots . n+i} \frac{V_{\pm i}^{(n+1)}}{\cos^{2n+1}\varphi}$$

welche die VCoefficienten für ein negatives n aus denen für ein positives, und umgekehrt zum Theil, giebt.

10.

Durch angemessene Veränderung des vierten Elements der FFunctionen kann man namentlich in den Fällen wo, wie hier, von den drei ersten Elementen nur zwei von einander unabhängig sind, Relationen

finden, *) die in den oben angeführten, allgemeinen nicht enthalten sind. Die zwei wichtigsten dieser will ich hier für den vorliegenden Fall entwickeln. Sei

$$F_1 = F(n, n+i, i+1, \beta^2)$$

dann giebt die allgemeine Differentialgleichung (14) leicht

$$\beta(1-\beta^2)\frac{d^2F_1}{d\beta^2} + \{2i+1-(4n+2i+1)\beta^2\}\frac{dF_1}{d\beta} - 4n(n+i)\beta F_1 = 0 \quad (19)$$

Setzt man hinein

$$F_1 = F_2(1+\beta^2)^{-(n+i)}$$

so geht sie über in

$$\beta(1-\beta^2)(1+\beta^2)^2\frac{d^2F_2}{d\beta^2}$$

$$+\{2i+1-4(2n+i)\beta^2+(2i-1)\beta^4\}(1+\beta^2)\frac{dF_2}{d\beta} - 4(n+i)(n+i+1)\beta(1-\beta^2)F_2 = 0$$

Macht man in dieser e durch die Gleichung

$$e = \frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

zur unabhängigen Veränderlichen, so wird

$$e(1-e^2)\frac{d^2F_2}{de^2} + \{2i+1-2(n+i+1)e^2\}\frac{dF_2}{de} - (n+i)(n+i+1)eF_2 = 0$$

Die Vergleichung dieser mit (14) zeigt, dass ihr durch

$$F_2 = c\,F\left(\frac{n+i}{2}, \frac{n+i+1}{2}, i+1, e^2\right)$$

Genüge geleistet wird, wo c eine willkührliche Constante ist. Zur Bestimmung dieser dient der specielle Fall $e = 0$, welcher $\beta = 0$ bedingt, und da in diesem Falle die FFunctionen $= 1$ werden, so findet man $c = 1$. Substituirt man die vorstehenden Relationen in (16) und nimmt auf die Gleichungen

$$e = \sin\varphi, \quad \beta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi, \quad \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \cos\varphi, \quad \frac{1}{1+\beta^2} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

Rücksicht, so wird

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i}\frac{\sin^i\varphi}{2^i}\cos^{2n}\varphi\, F\left(\frac{1+i+n}{2}, \frac{i+n}{2}, i+1, \sin^2\varphi\right)$$

Dieser Ausdruck ist für jeden Werth von $\sin\varphi < 1$ eine convergirende Reihe, für ganze und negative Werthe von n gehen endliche Ausdrücke daraus hervor. Transformirt man die FFunction durch die erste Verwandelungsformel (15), so kommt

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i}\frac{\sin^i\varphi}{2^i}\cos\varphi\, F\left(\frac{1+i-n}{2}, \frac{2+i-n}{2}, i+1, \sin^2\varphi\right) \quad (20)$$

welche innerhalb derselben Grenzen wie die vorhergehende convergirende Reihen giebt, die sich in endliche Ausdrücke verwandeln, wenn n eine ganze und positive Zahl und grösser wie i ist. Für $i = 0$ entstehen hieraus die beiden Ausdrücke

---

*) S. *Kummers* Abhandlung. *Crelle's* Journal B. 15.

$$V_0^{(n)} = \cos^{2n}\varphi\left\{1 + \frac{n.n+1}{2.2}\sin^2\varphi + \frac{n.n+1.n+2.n+3}{2.2.4.4}\sin^4\varphi + \text{etc.}\right\}$$

$$V_0^{(n)} = \cos\varphi\left\{1 + \frac{n-1.n-2}{2.2}\sin^2\varphi + \frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{2.2.4.4}\sin^4\varphi + \text{etc.}\right\}$$

Diese Ausdrücke der V Coefficienten bilden die eine der oben angekündigten Relationen, um die andere zu erhalten setzen wir

$$F_1 = F_3(1+\beta)^{-2(n+i)}$$

in die Gleichung (14), die dadurch in folgende übergeht,

$$\beta(1-\beta)(1+\beta)^2\frac{d^2F_3}{d\beta^2}$$
$$+\{2i+1-4(n+i)\beta+(2i-1)\beta^2\}(1+\beta)\frac{dF_3}{d\beta}-2(2i+1)(n+i)(1-\beta)F_3=0$$

Macht man hierin η durch die Gleichung

$$\eta^2 = \frac{4\beta}{(1+\beta)^2}$$

zur unabhängigen Veränderlichen, so ergiebt sich

$$\eta(1-\eta^2)\frac{d^2F_3}{d\eta^2} + \{4i+1-(2n+4i+2)\eta^2\}\frac{dF_3}{d\eta} - 2(2i+1)(n+i)\eta F_3 = 0$$

welcher durch

$$F_3 = cF\left(n+i, \frac{2i+1}{2}, 2i+1, \eta^2\right)$$

Genüge geleistet wird, und wo eben so wie oben $c = 1$ gefunden wird. Setzt man nun

$$\eta = \sin p$$

so giebt die obige Gleichung zwischen η und β

$$\cos p = \frac{1-\beta}{1+\beta} = \operatorname{tg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)$$

und die Gleichung (16) geht über in

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i}\cos^n\varphi\cos^n p\,\frac{\sin^{2i}p}{2^{2i}}F\left(n+i, \frac{2i+1}{2}, 2i+1, \sin^2 p\right)$$

welche für $\sin p < 1$ stets eine convergirende Reihe ist, und einen endlichen Ausdruck giebt wenn $n+i$ eine ganze und negative Zahl ist. Durch Anwendung der ersten Gleichung (15) verwandelt sie sich in

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i B_{-n,i}\frac{\cos^n\varphi}{\cos^{n-1}p}\cdot\frac{\sin^{2i}p}{2^{2i}}F\left(1+i-n, \frac{2i+1}{2}, 2i+1, \sin^2 p\right)$$

die unter denselben Bedingungen wie die vorstehende convergirt, und in einen endlichen Ausdruck übergeht wenn $n-i$ eine ganze und positive Zahl ist. Für $i = 0$ ergeben sich daraus

$$V_0^{(n)} = \cos^n\varphi\cos^n p\left\{1+\frac{n}{2}\sin^2 p + \frac{3}{2}\frac{n.n+1}{2.4}\sin^4 p + \frac{3.5}{2.3}\frac{n.n+1.n+2}{2.4.6}\sin^6 p + \text{etc.}\right\}$$

$$V_0^{(n)} = \frac{\cos^n\varphi}{\cos^{n-1}p}\left\{1-\frac{n-1}{2}\sin^2 p+\frac{3}{2}.\frac{n-1.n-2}{2.4}\sin^4 p-\frac{3.5}{2.3}.\frac{n-1.n-2.n-3}{2.4.6}\sin^6 p+\text{etc.}\right\}$$

Es lassen sich noch viele andere Verwandelungen hier hinzufügen, die ich aber übergehen werde, da sie hier keine sonderlichen Vortheile darbieten, die nicht schon in den vorstehenden enthalten wären.

11.

Die drei Grössen e, β und η, oder wenn wir $\beta = \sin k$ setzen, φ, k und p sind zugleich Null, und zugleich jene $= 1$, und diese $= 90^0$; über dieses Intervall können sie nicht hinaus gehen. Die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke sind nun vorzüglich für die Fälle zur Anwendung geeignet, wo φ, k und p sich nicht weit von ihrer unteren Grenze Null entfernen, während sie, namentlich wenn n nicht klein ist, unbequem werden wenn φ, k und p sich ihrer oberen Grenze nähern. Um Ausdrücke zu erhalten, die in diesem Falle bequem werden, muss man solche suchen, die nach den Potenzen von $\cos\varphi$, $\cos k$ und $\cos p$ fortschreiten. Mit diesen wollen wir uns jetzt beschäftigen. Machen wir in der allgemeinen Differentialgleichung (14) durch die Gleichung

$$y^2 = 1 - z^2$$

y zur unabhängigen Veränderlichen, so bekommen wir

$$y(1-y^2)\frac{d^2F}{dy^2} + \{2\alpha + 2\beta - 2\gamma + 1 - (2\alpha + 2\beta + 1)y^2\}\frac{dF}{dy} - 4\alpha\beta y F = 0$$

und die Vergleichung mit (14) zeigt, dass dieser durch die Relation

$$F = cF(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z^2)$$

Genüge geleistet wird, wo c eine willkührliche Constante ist. Es erwächst hieraus die Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z^2) = cF(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-z^2) \qquad (21)$$

deren Realität von der Möglichkeit der Bestimmung der Constante c abhängt. Es zeigt sich aber, dass diese im Allgemeinen nicht möglich ist, indem Fälle vorkommen, wo sie sich wie eine Function von z gestaltet, welches vermöge der Art der Entstehung derselben unmöglich ist. Die Ursache hiervon ist leicht zu finden, wenn man erwägt, dass jede Differentialgleichung der m^{ten} Ordnung m von einander wesentlich verschiedene particuläre Integrale haben muss, das heisst Integrale die sich nicht durch Anbringung einer Constante auf einander hinführen lassen. Da die Differentialgleichung, von welcher wir ausgegangen sind, von der zweiten Ordnung ist, so muss sie nothwendig zwei von einander wesentlich verschiedene particuläre Integrale haben, und die beiden F Functionen, die Bestandtheile der vorstehenden Gleichung sind, sind in der That solche, da sie im Allgemeinen sich nicht identisch machen lassen, wie ihre Reihenentwickelung zu erkennen giebt.

Da unsere Differentialgleichung linearisch ist, so können wir zufolge eines bekannten Satzes aus diesen particulären Integralen das vollstän-

dige Integral derselben zusammensetzen. Stellen wir nemlich die Gleichung auf

$$U = cF(\alpha,\beta,\gamma,z^2) + c^1 F(\alpha,\beta,\alpha+\beta-\gamma+1, 1-z^2)$$

wo c und c^1 willkührliche Constanten sind, so ist dieser Ausdruck das vollständige Integral der Differentialgleichung (14), nachdem darin U für F gesetzt worden ist. Aus dem vollständigen Integral irgend einer Differentialgleichung kann man dadurch, dass man den willkührlichen Constanten particuläre Werthe giebt, alle möglichen particulären Integrale derselben hervorbringen. Giebt man daher den Constanten c und c^1 in der vorstehenden Gleichung irgend welche bestimmte Werthe, so wird U ein particuläres Integral der genannten Differentialgleichung. Substituirt man im Gegentheil für U irgend ein particuläres Integral derselben Differentialgleichung, und bestimmt darauf die willkührlichen Constanten c und c^1 auf angemessene Art, so bekommt man eine Gleichung zwischen drei particulären Integralen. In diesen Betrachtungen liegt in der That der Grund zu der nach *Kummer* unter (15) angeführten letzten Verwandelungsformel. Ich habe dieses indessen nur beiläufig angeführt, und werde davon hier keine Anwendung machen, da es besondere Fälle giebt, in welchen die Gleichung (21) Gültigkeit hat, und es eben diese Fälle sind, die hier vorzugsweise in Betracht gezogen werden sollen.

Die Gleichung (21) gilt allemal, wenn die beiden F Functionen, die darin vorkommen, endliche Ausdrücke sind, die nicht unendlich gross werden können, denn es ist leicht einzusehen, dass alsdann die beiden Theile links und rechts vom Gleichheitszeichen sich durch angemessene Bestimmung der Constante c identisch machen lassen müssen. Sei zuerst in den F Functionen

$$\alpha = i+1-n,\quad \beta = 1-n,\quad \gamma = i+1,\quad z = \beta$$

dann wird vermöge (21)

$$(22^*)\quad F(i+1-n, 1-n, i+1, \sin^2 k) = c F(i+1-n, 1-n, 2-2n, \cos^2 k)$$

oder wenn man die Reihen ausschreibt

$$(22)\begin{cases} 1 + \dfrac{n-i-1.n-1}{1.i+1}\sin^2 k + \dfrac{n-i-1.n-i-2.n-1.n-2}{1.2.i+1.i+2}\sin^4 k + \text{etc.} \\ = c\left\{1 - \dfrac{n-i-1.n-1}{1.2n-2}\cos^2 k + \dfrac{n-i-1.n-i-2.n-1.n-2}{1.2.2n-2.2n-3}\cos^4 k \mp \text{etc.}\right\} \end{cases}$$

wo zu bemerken ist, dass die Factoren, die die Nenner gleich Null machen könnten, wenn n eine ganze und positive Zahl ist, sich immer zugleich in den Zählern vorfinden, und also dagegen verschwinden.

Wenn nun n eine beliebige Zahl ist, so ist c unbestimmbar. Auf der linken Seite ist

$$\alpha+\beta-\gamma = 1-2n$$

und auf der rechten

$$\alpha+\beta-\gamma = i$$

Wenn nun n negativ, oder positiv und $\overline{\gtrless} \frac{1}{2}$ ist, dann wird, wenn man zugleich $k = 90^0$ setzt, die linke Seite von (22) unendlich gross,*) und die rechte Seite $= c$. Es würde also auch c unendlich gross sein müssen. Macht man, während n beliebig ist, $k = 0$, so wird die linke Seite von (22) $= 1$, während der Factor von c auf der rechten Seite unendlich gross wird, und dem zufolge c unendlich klein sein müsste. Nimmt man für n einen positiven Bruch an, dessen Nenner $= 2$ ist, so wird für jeden beliebigen Werth von k die rechte Seite unendlich gross, während dieses mit der linken Seite nicht der Fall ist; man wird also bei der Bestimmung von c auf Widersprüche hingeführt.

Ist hingegen n eine ganze und positive Zahl und $> i$, dann gehen beide Reihen in (22) in endliche Ausdrücke über, und c lässt sich auf folgende Art bestimmen. Das allgemeine Glied der linken Seite ist

$$= \frac{n-i-1\,.\,n-i-2\ldots n-i-m\,.\,n-1\,.\,n-2\ldots n-m}{1\,.\,2\quad\ldots\quad m\,.\,i+1\,.\,i+2\,..\,i+m} \sin^{2m} k$$

und das der rechten

$$= c(-1)^m \frac{n-i-1\,.\,n-i-2\ldots n-i-m\,.\,n-1\,.\,n-2\ldots n-m}{1\,.\,2\quad\ldots\quad m\,.\,2n-2\,.\,2n-3\ldots 2n-m-1} \cos^{2m} k$$

im letzten mit der höchsten Potenz von $\sin k$ und bez. von $\cos k$ multiplicirten Glieder eines jeden dieser beiden Ausdrücke ist also

$$m = n-i-1$$

Da nun in der Entwickelung von $\cos^{2m} k$ nach den Potenzen von $\sin k$ das Glied, welches mit der höchsten Potenz multiplicirt ist

$$= (-1)^m \sin^{2m} k$$

wird, so bekommen wir sogleich die Gleichung

$$\frac{1}{i+1\,.\,i+2\ldots n-1} = \frac{c}{2n-2\,.\,2n-3\ldots n+i}$$

woraus

$$c = \frac{n+i\,.\,n+i+1\ldots 2n-2}{i+1\,.\,i+2\;\ldots\; n-1}$$

folgt. Substituirt man daher (22*) in (17), so ergiebt sich

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i\, 2^{n-1} \frac{1\,.\,3\ldots 2n-3}{1\,.\,2\ldots n-1} \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{2(n-1)} k} \sin^i k\, F(i+1-n,\, 1-n,\, 2-2n,\, \cos^2 k)$$

welche aber nur für ganze und positive n, welche überdies der Ungleich-

---

*) S. *Gauss, Disquisitiones generales* etc.

heit $n > i$ genügen, gilt. Auf ähnliche Art findet man die folgenden beiden, nach den Potenzen von $\cos\varphi$ und $\cos p$ fortschreitenden Ausdrücke,

$$V_{\pm i}^{(n)} = (-1)^i \frac{1.3..2n-3}{1.2..n-1} \cos\varphi \sin^i\varphi\, F\left(\frac{1+i-n}{2}, \frac{2+i-n}{2}, \frac{3-2n}{2}, \cos^2\varphi\right)$$

$$V_{\pm i}^{(n)} = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}} \frac{1.3..2n-3}{1.2..n-1} \frac{\cos^n\varphi}{\cos^{n-1}p} \sin^{2i}p\, F\left(1+i-n, \frac{2i+1}{2}, \frac{3-2n}{2}, \cos^2 p\right)$$

für welche die nemlichen Beschränkungen wie oben gelten. Für $n = i+1$ werden in diesen Ausdrücken die F Functionen $= 1$, und die Ausdrücke für $V_{\pm(n-1)}^{(n)}$ reduciren sich also auf die vor den F Functionen befindlichen Factoren. Für $i = 0$ ergeben sich die folgenden Ausdrücke

$$V_0^{(n)} = 2^{n-1} \frac{1.3..2n-3}{1.2..n-1} \frac{\cos^n\varphi}{\cos^{2(n-1)}k} \left\{1 - \frac{n-1}{2}\cos^2 k + \frac{(n-1)(n-2)^2}{2.2.2n-3}\cos^4 k - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)^2}{2.3.2^2.\,2n-3}\cos^6 k \pm \text{etc.}\right\}$$

$$V_0^{(n)} = \frac{1.3\ldots 2n-3}{1.2\ldots n-1}\cos\varphi \left\{1 - \frac{n-1.\,n-2}{2.2n-3}\cos^2\varphi + \frac{n-1.\,n-2.n-3.n-4}{2.4.2n-3.\,2n-5}\cos^4\varphi \mp \text{etc.}\right\}$$

$$V_0^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1.3..2n-3}{1.2..n-1} \frac{\cos^n\varphi}{\cos^{n-1}p} \left\{1 + \frac{n-1}{2n-3}\cos^2 p + \frac{3}{2}\frac{n-1.\,n-2}{2n-3.2n-5}\cos^4 p + \frac{3.5}{2.3}\frac{n-1.\,n-2.n-3}{2n-3.2n-5.2n-7}\cos^6 p \mp \text{etc.}\right\}$$

Auf die nemliche Art kann man Ausdrücke ableiten, die blos Geltung haben wenn n eine ganze und negative Zahl ist, man gelangt aber durch Anwendung der ersten Gleichung (15) leichter dazu. Substituirt man darin die obigen drei Ausdrücke für $V_{\pm i}^{(n)}$, so bekommt man sogleich,

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{n+i+1.\,n+i+2\ldots 2n}{1.\,2\ldots n-i} \cdot \frac{\sin^i k}{\cos^n\varphi\cos^{2n}k} F(i-n, -n, -2n, \cos^2 k)$$

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{n+i+1.\,n+i+2..2n}{1.\,2\ldots n-i} \cdot \frac{\sin^i\varphi}{\cos^{2n}\varphi} F\left(\frac{i-n}{2}, \frac{1+i-n}{2}, \frac{1-2n}{2}, \cos^2\varphi\right)$$

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{n+i+1.\,n+i+2..2n}{1.\,2\ldots n-i} \cdot \frac{\sin^{2i}p}{\cos^n\varphi\cos^n p} F\left(i-n, \frac{2i+1}{2}, \frac{1-2n}{2}, \cos^2 p\right)$$

wo $n \overline{\overline{>}} i$ die Grenzbedingung von n ist. Für $n = i$ werden wieder die F Functionen $= 1$, also reduciren sich die Ausdrücke für $V_{\pm n}^{(-n)}$ auf die vor den F Functionen befindlichen Factoren; für $i = 0$ bekommt man

$$V_0^{(-n)} = \frac{n+1.n+2\ldots 2n}{1.2\ldots n} \frac{1}{\cos^n\varphi\cos^{2n}k}\left\{1 - \frac{n^2}{1.2n}\cos^2 k + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2.2n.2n-1}\cos^4 k \mp \text{etc.}\right\}$$

$$V_0^{(-n)} = \frac{1}{2^n}\frac{n+1.n+2\ldots 2n}{1.2\ldots n} \frac{1}{\cos^{2n}\varphi}\left\{1 - \frac{n.n-1}{2.2n-1}\cos^2\varphi + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{2.4.2n-1.2n-3}\cos^4\varphi \mp \text{etc.}\right\}$$

$$V_0^{(-n)} = \frac{1}{2^{2n}}\frac{n+1.n+2\ldots 2n}{1.2\ldots n} \frac{1}{\cos^n\varphi\cos^n p}\left\{1 + \frac{n}{2n-1}\cos^2 p + \frac{3.n.n-1}{2.2n-1.2n-3}\cos^4 p + \frac{3.5.n.\,n-1.\,n-2}{2.3.2n-1.2n-3.2n-5}\cos^6 p + \text{etc.}\right\}$$

12.

Durch Anwendung der zweiten und dritten der Verwandelungsformeln (15) kann man die im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf solche hinführen, die nach den Potenzen der Tangente oder Cotangente irgend eines der Bögen k, φ oder p fortschreiten; ich werde jedoch davon hier nur die beiden von $\operatorname{cotg} p$ abhängigen Ausdrücke ab-

leiten. Setzt man die dritte Gleichung (15) in die beiden von $\cos p$ abhängigen Ausdrücke des vor. Art., so kommt sogleich

$$V_{\pm i}^{(n)} = \frac{(-1)^i}{2^{n-1}} \frac{1.3..2n-3}{1.2..n-1} \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{n-1} p \sin p} F\left(\frac{1-2i}{2}, \frac{2i+1}{2}, \frac{3-2n}{2}, -\operatorname{cotg}^2 p\right)$$

$$V_{\pm i}^{(-n)} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{n+i+1 . n+i+2 .. 2n}{1.2...n-i} \cdot \frac{1}{\cos^n \varphi \cos^n p \sin p} F\left(\frac{1-2i}{2}, \frac{2i+1}{2}, \frac{1-2n}{2}, -\operatorname{cotg}^2 p\right)$$

Diese sind zwar unendliche Reihen, aber sie gelten demungeachtet unter den für n im vor. Art. aufgestellten Bedingungen, weil die Relation (15) die angewandt worden ist, um sie zu erhalten, in allen Fällen gilt. Die vorstehenden Ausdrücke besitzen die Eigenschaft, dass in den unendlichen Reihen derselben n nur in den Nennern der Coefficienten vorkommt, je grösser daher n ist, desto mehr werden die Coefficienten abnehmen, weshalb sie sich besonders in den Fällen, wo n sehr gross ist, zur Anwendung eignen. Wenn $\operatorname{cotg} p < 1$ ist convergiren diese Reihen, aber wenn diese Ungleichheit nicht erfüllt ist, so findet die Convergenz nicht mehr statt. Der Umstand aber, dass n nur in den Nennern vorkommt, bewirkt dass in den Fällen, wo $\operatorname{cotg} p > 1$, und dabei n hinreichend gross ist, die ersten Glieder abnehmen können, so dass diese Reihen den Character der sogenannten halbconvergirenden annehmen. Es ist jedoch hiebei zu bemerken, dass der Umstand, dass die Nenner nach und nach die Factoren $1-2n$, $3-2n$, $5-2n$, etc. bekommen hemmend auf die Abnahme der Werthe der Coefficienten wirkt, und die Reihen daher, als halbconvergirende betrachtet, keine sonderliche Genauigkeit geben können. Ich füge hier noch den ersten Ausdruck für $i = 0$ ausgeschrieben hinzu.

$$V_0^{(n)} = \frac{1}{2^{n-1}} \frac{1.3..2n-3}{1.2..n-1} \frac{\cos^n \varphi}{\cos^{n-1} p \sin p} \left\{1 + \frac{1^2}{2.2n-3} \operatorname{cotg}^2 p + \frac{1^2 . 3^2}{2.4.2n-3.2n-5} \operatorname{cotg}^4 p + \text{etc.}\right\}$$

13.

Es lässt sich für grosse n eine andere halbconvergirende Reihe geben, die grössere Convergenz besitzt wie die vorstehende. Diese will ich jetzt entwickeln, werde mich aber nur auf den Fall $i = 0$ beschränken, da dieser es ist, welcher vorzugsweise zur Anwendung kommt. Nehmen wir die Gleichung (19) vor, welche für $i = 0$ in folgende übergeht:

$$\beta(1-\beta^2)\frac{d^2F}{d\beta^2} + \{1-(4n+1)\beta^2\}\frac{dF}{d\beta} - 4n^2\beta F = 0 \qquad (23^*)$$

Zufolge des Vorhergehenden erhalten wir, wenn hiedurch F bestimmt worden ist,

$$z = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta}}$$

woraus vermöge der Relation $u = \log \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$

$$\frac{1+\beta^2}{2\beta} = \sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$

$$\frac{dz}{du} = -z\sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$

$$\frac{d^2z}{du^2} = z + \tfrac{3}{4}z^5$$

folgt, so geht sie über in

$$16\lambda\left\{\frac{dw}{dz}z - w\right\}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4} = \frac{d^2w}{dz^2}(z^6+4z^2) + \frac{dw}{dz}(z^5-4z) + 4w$$

Wenn man hierin den obigen Ausdruck

$$w = C_0 + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.}$$

substituirt, so bekommt man, da die C Coefficienten kein λ enthalten sollen, allgemein

$$16\left\{\frac{dC_i}{dz}z - C_i\right\}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4} = \frac{d^2C_{i-1}}{dz^2}(z^6+4z^2) + \frac{dC_{i-1}}{dz}(z^5-4z) + 4C_{i-1}$$

mit Ausnahme von

$$\frac{dC_0}{dz}z - C_0 = 0$$

Hieraus kann man nach und nach alle C Coefficienten bestimmen. Der Gleichung für C_0 ist durch

$$C_0 = z$$

Genüge geleistet; hiemit giebt die allgemeine Gleichung

$$\frac{dC_1}{dz}z - C_1 = \frac{z^5}{16\sqrt{1+\frac{1}{4}z^4}}$$

welcher durch

$$C_1 = \tfrac{1}{8}z\sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$

Genüge geleistet wird. Die Substitution dieses Werthes in die allgemeine Gleichung giebt

$$\frac{dC_2}{dz}z - C_2 = \frac{9}{128}z^5$$

welcher durch

$$C_2 = \frac{9}{512}z^5$$

Genüge geleistet wird u. s. w. Diese Werthe geben schon die allgemeine Form dieser Coefficienten zu erkennen. Wenn

i eine grade Zahl

ist, dann wird

$$C_i = A^{(i)}_{2i+1}z^{2i+1} + A^{(i)}_{2i-3}z^{2i-3} + \ldots + A^{(i)}_9 z^9 + A^{(i)}_5 z^5$$

$$C_{i+1} = \left\{A^{(i+1)}_{2i+1}z^{2i+1} + A^{(i)}_{2i-3}z^{2i-3} + \ldots + A^{(i+1)}_5 z^5 + A^{(i+1)}_1 z\right\}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$

wobei der particuläre Werth $C_0 = z$ ausgeschlossen ist. Wenn

i eine ungrade Zahl

ist, dann wird

$$C_i = \left\{A^{(i)}_{2i-1} z^{2i-1} + A^{(i)}_{2i-5} z^{2i-5} + \ldots + A^{(i)}_5 z^5 + A^{(i)}_1 z\right\} \sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$

$$C_{i+1} = A^{(i+1)}_{2i+3} z^{2i+3} + A^{(i+1)}_{2i-1} z^{2i-1} + \ldots + A^{(i+1)}_9 z^9 + A^{(i+1)}_5 z^5$$

Substituirt man diese Ausdrücke in die obige allgemeine Gleichung, und vergleicht die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von z mit einander, so ergiebt sich

1) für i grade

$$8(i+1) A^{(i+1)}_{2i+1} = (2i+1)^2 A^{(i)}_{2i+1}$$

$$8(i-1) A^{(i+1)}_{2i-3} = 16 i^2 A^{(i)}_{2i+1} + (2i-3)^2 A^{(i)}_{2i-3} - 32 i A^{(i+1)}_{2i+1}$$

$$8(i-3) A^{(i+1)}_{2i-7} = 16 (i-2)^2 A^{(i)}_{2i-3} + (2i-7)^2 A^{(i)}_{2i-7} - 32 (i-2) A^{(i+1)}_{2i-3}$$

etc. bis

$$24 A^{(i+1)}_5 = 256 A^{(i)}_9 + 25 A^{(i)}_5 - 128 A^{(i+1)}_9.$$

$$8 A^{(i+1)}_1 = 64 A^{(i)}_5 - 64 A^{(i+1)}_5$$

2) für i ungrade

$$32(i+1) A^{(i+1)}_{2i+3} = (2i+1)^2 A^{(i)}_{2i-1}$$

$$32(i-1) A^{(i+1)}_{2i-1} = 16 (i-1)^2 A^{(i)}_{2i-1} + (2i-3)^2 A^{(i)}_{2i-5}$$

$$32(i-3) A^{(i+1)}_{2i-5} = 16 (i-3)^2 A^{(i)}_{2i-5} + (2i-7)^2 A^{(i)}_{2i-9}$$

etc. bis

$$128 A^{(i+1)}_9 = 256 A^{(i)}_9 + 49 A^{(i)}_5$$

$$64 A^{(i+1)}_5 = 64 A^{(i)}_5 + 9 A^{(i)}_1$$

Durch Hülfe dieser Gleichungen und mit Zuziehung des Werthes

$$A^{(0)}_1 = 1$$

kann man nach und nach so viele Coefficienten berechnen wie man will. Die ersten, mit welchen man wohl stets ausreicht, habe ich wie folgt gefunden:

$$A^{(1)}_1 = \tfrac{1}{8};\quad A^{(2)}_5 = \tfrac{9}{512};\quad A^{(3)}_5 = \tfrac{75}{4\,096};\quad A^{(3)}_1 = -\tfrac{3}{512};\quad A^{(4)}_9 = \tfrac{3\,675}{524\,288};$$

$$A^{(4)}_5 = \tfrac{573}{32\,768};\quad A^{(5)}_9 = \tfrac{59\,535}{4\,194\,304};\quad A^{(5)}_5 = \tfrac{2\,265}{131\,072};\quad A^{(5)}_1 = \tfrac{27}{16\,384};$$

$$A^{(6)}_{13} = \tfrac{2\,401\,245}{268\,435\,456};\quad A^{(6)}_9 = \tfrac{587\,265}{16\,777\,216};\quad A^{(6)}_5 = \tfrac{18\,363}{1\,048\,576};\quad A^{(7)}_{13} = \tfrac{57\,972\,915}{2\,147\,483\,648};$$

$$A^{(7)}_9 = \tfrac{18\,821\,565}{268\,435\,456};\quad A^{(7)}_5 = \tfrac{296355}{16\,777\,216};\quad A^{(7)}_1 = -\tfrac{2\,547}{2\,097\,152}$$

Die oben angewandten Substitutionen waren, wenn man $\cos\varphi$ durch β ausdrückt

$$V^{(n)}_0 = \frac{(1-\beta^2)^{2n}}{(1+\beta^2)^n} F;\quad F = \frac{L}{(1-\beta^2)^n};\quad u = \log\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

$$z = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\beta}};\quad \lambda = n - \tfrac{1}{2}$$

da nun hieraus

$$V_0^{(n)} = \frac{(1-\beta^2)^n}{(1+\beta^2)^n} L\,;\;\; c^{2\lambda u} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{n-\frac{1}{2}}$$

hervorgeht, so ergiebt sich

$$V_0^{(n)} = c\,\frac{(1+\beta)^{2n}}{(1+\beta^2)^n}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left\{z + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ c^1\,\frac{(1-\beta)^{2n}}{(1+\beta^2)^n}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\left\{z - \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} - \frac{C_3}{\lambda^3} \pm \text{etc.}\right\}$$

wo c und c^1 die beiden willkührlichen Constanten, und

$$C_1 = \frac{1}{8} z \sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$
$$C_2 = \frac{9}{512} z^5$$
$$C_3 = \left\{\frac{75}{4\,096} z^5 - \frac{3}{512} z\right\} \sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$
$$C_4 = \frac{3\,675}{524\,288} z^9 + \frac{573}{32\,768} z^5$$
$$C_5 = \left\{\frac{59\,535}{4\,194\,304} z^9 + \frac{2\,265}{131\,072} z^5 + \frac{27}{16\,384} z\right\} \sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$
$$C_6 = \frac{2\,401\,245}{268\,435\,456} z^{13} + \frac{587\,265}{16\,777\,216} z^9 + \frac{48\,363}{1\,048\,576} z^5$$
$$C_7 = \left\{\frac{57\,972\,915}{2\,147\,483\,648} z^{13} + \frac{18\,821\,565}{268\,435\,456} z^9 + \frac{296\,355}{16\,777\,216} z^5 - \frac{2\,547}{2\,097\,152} z\right\} \sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4}$$

etc.

Man kann diese Ausdrücke für die Rechnung geeigneter machen, wenn man φ einführt, man findet leicht

$$z = \sqrt{\frac{2}{\operatorname{tg}\varphi}};\;\; \sqrt{1+\tfrac{1}{4}z^4} = \frac{1}{\sin\varphi}$$

und

$$V_0^{(n)} = c \cos^n\varphi \operatorname{cotg}^\lambda(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)\left\{z + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.}\right\}$$
$$+ c^1 \cos^n\varphi \operatorname{tg}^\lambda(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)\left\{z - \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} - \frac{C_3}{\lambda^3} \pm \text{etc.}\right\}$$

An der Grenze $\varphi = 0$ wird dieser Ausdruck unbrauchbar, weil dann $z = \infty$ wird, an der Grenze $\varphi = 90^0$ scheint er unbestimmt zu werden, weil dann $\operatorname{cotg}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \infty$ und $\cos\varphi = 0$ wird, aber der obige Ausdruck durch β zeigt, dass alsdann $V_0^{(n)} = 0$ wird, man kann also den vorstehenden Ausdruck bis an diese Grenze anwenden, und zwar für desto kleinere Werthe von λ, je näher φ dieser Grenze liegt, weil dann z klein wird. Wenn φ sich wenig von der unteren Grenze Null entfernt, dann giebt dieser Ausdruck für kleine Werthe von λ nur geringe Genauigkeit, aber diese wächst, so wie λ grösser wird, und kann auch in diesen Fällen, wenn nur λ hinreichend gross angenommen wird, zu jeder beliebigen Grenze gesteigert werden. Der Umstand, dass für dieselben Werthe von λ oder n die vorstehende Formel für kleine Werthe von φ geringere Genauigkeit giebt, wie für grössere, gleicht sich dadurch in der Anwendung aus, dass man in diesen Fällen die obigen

endlichen Ausdrücke oder die convergirenden Reihen ohne Unbequemlichkeit für grössere Werthe von n anwenden kann. Die Grösse z nimmt schon für kleine Werthe von φ rasch ab, wie die folgenden speciellen Werthe zeigen

$$\begin{aligned}
\varphi &= 0 \text{ giebt } z = \infty \\
\varphi &= 1^0 \quad ,, \quad z = 10{,}70 \\
\varphi &= 2^0 \quad ,, \quad z = 7{,}57 \\
\varphi &= 3^0 \quad ,, \quad z = 6{,}18 \\
\varphi &= 4^0 \quad ,, \quad z = 5{,}35 \\
\varphi &= 5^0 \quad ,, \quad z = 4{,}78
\end{aligned}$$

etc.

Ich bemerke noch hiezu, dass das Verfahren, welches ich eben auf $V_0^{(n)}$ angewandt habe, mit geringen Abänderungen auf jede Function y von x angewandt werden kann, die sich durch folgende Differentialgleichung darstellen lässt,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (nP+Q)\frac{dy}{dx} \pm (n^2R+nS+T)y = 0$$

wo P, Q, R, S, T Functionen von x sind. Denn die Transformationen, die ich eben auf die Gleichung (23*) angewandt habe, lassen sich allgemein mittelst bekannter Sätze auf die vorstehende Gleichung anwenden. Nur ist hiebei zu bemerken, dass wenn ausser n in den Coefficienten dieser Gleichung grosse Zahlen vorkommen, die Convergenz der halbconvergirenden Reihe sehr gering, und sogar illusorisch werden kann.

16.

Um die beiden willkührlichen Constanten c und c^1 zu bestimmen, werde ich die ersten Glieder des Ausdrucks von $V_0^{(n)}$ auf eine andere Art, die keine willkührliche Constanten zulässt, bestimmen. Der Ausdruck des vor. Art. von $V_0^{(n)}$ durch β giebt mit bloser Rücksicht auf diese Glieder

$$V_0^{(n)} = \frac{c}{\sqrt{\beta}}\frac{(1+\beta)^{2n}(1-\beta)}{(1+\beta^2)^n} + \frac{c^1}{\sqrt{\beta}}\frac{(1-\beta)^{2n}(1+\beta)}{(1+\beta^2)^n} \qquad (25)$$

und es ist leicht zu erkennen, dass diese Functionen von β sich in keinem der übrigen Glieder wiederholen. Denselben Ausdruck werde ich jetzt durch das bestimmte Integral

$$V_0^{(n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varrho^n\, df$$

suchen. Da

$$\varrho = 1 - e\cos\varepsilon = \frac{1}{1+\beta^2}(1-2\beta\cos\varepsilon+\beta^2),\quad df = \frac{\cos\varphi}{\varrho}\,d\varepsilon$$

ist, wenn ε die excentrische Anomalie bezeichnet, so wird

$$V_0^{(n)} = \frac{1-\beta^2}{\pi(1+\beta^2)^n}\int_0^\pi (1-2\beta\cos\varepsilon+\beta^2)^{n-1}\,d\varepsilon$$

Sei

$$1-2\beta\cos\varepsilon+\beta^2 = (1+\beta)^2 c^{-\frac{u^2}{\lambda}}$$

wo c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen, und u eine neue veränderliche Grösse ist. Setzt man nun

$$q = \sqrt{2\lambda\log\frac{1+\beta}{1-\beta}}\,.$$

so durchläuft u das Intervall von $u = q$ bis $u = 0$, während ε das Intervall von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = \pi$ durchläuft. Macht man daher im vorstehenden Integral u zur veränderlichen Grösse, und kehrt das Zeichen desselben um, so muss es von 0 bis q genommen werden. Die Gleichung zwischen ε und u giebt

$$\cos\varepsilon = \frac{1+\beta^2}{2\beta} - \frac{(1+\beta)^2}{2\beta}c^{-\frac{u^2}{\lambda}}$$

$$\sin\varepsilon\,d\varepsilon = -\frac{(1+\beta)^2}{\beta}\frac{u}{\lambda}c^{-\frac{u^2}{\lambda}}du$$

$$\sin^2\varepsilon = \frac{(1+\beta)^2}{2\beta^2}c^{-\frac{u^2}{\lambda}}\left\{1+\beta^2-\frac{(1-\beta)^2}{2}c^{\frac{u^2}{\lambda}}-\frac{(1+\beta)^2}{2}c^{-\frac{u^2}{\lambda}}\right\}$$

oder wenn man die Exponentialfunctionen innerhalb der Klammern in unendliche Reihen auflöst,

$$\sin^2\varepsilon = \frac{(1+\beta)^2}{\beta}\frac{u^2}{\lambda}c^{-\frac{u^2}{\lambda}}\left\{1-\frac{1+\beta^2}{4\beta}\frac{u^2}{\lambda}+\frac{1}{6}\frac{u^4}{\lambda^2}-\frac{1+\beta^2}{48\beta}\frac{u^6}{\lambda^3}+\frac{1}{120}\frac{u^8}{\lambda^4}\mp\text{etc.}\right\}$$

Substituirt man diese Ausdrücke, so wird

$$V_0^{(n)} = \frac{(1+\beta)^{2n}(1-\beta)}{\pi(1+\beta^2)^n\sqrt{\lambda\beta}}\int_0^q du\,c^{-u^2}\left\{1-\frac{1+\beta^2}{4\beta}\frac{u^2}{\lambda}+\frac{1}{6}\frac{u^4}{\lambda^2}-\frac{1+\beta^2}{48\beta}\frac{u^6}{\lambda^3}+\frac{1}{120}\frac{u^8}{\lambda^4}\mp\text{etc.}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Man kann diesen Ausdruck vermittelst bekannter Sätze durch unendliche Reihen vollständig integriren, und die Reihen, die man auf diese Art erhält, sind vollständig convergirende, aber sie enthalten λ auch zu positiven Potenzen erhoben, und sind daher für den Zweck, der hier verfolgt wird, nicht dienlich. Ich bemerke aber, dass je grösser λ wird, desto mehr sich die obere Grenze des Integrals dem Unendlichen nähert. Integrirt man daher von 0 bis ∞, so wird man zwar keine vollständig convergirende Reihe bekommen, aber eine solche die sich einer convergirenden desto mehr nähert, je grösser λ oder n wird, das ist eine halb convergirende Reihe. Denn der wesentliche Charakter einer halb convergirenden Reihe besteht darin, dass sie sich um desto mehr einer vollständig convergirenden nähert, je mehr ein darin vorkommender Parameter sich einer gewissen Grenze, gewöhnlich dem Unendlichen, nähert.

Vergleicht man nun den eben erhaltenen Ausdruck für $V_0^{(n)}$ mit (25), so ergiebt sich sogleich, dass man um das erste Glied desselben zu erhalten, unter dem Integralzeichen nur die Glieder aufnehmen darf, die nach der Reihenentwickelung unabhängig von β sind, so wie dass Glieder von der Form des zweiten Gliedes in (25) gar nicht vorhanden sind. Die Reihenentwickelung des vorstehenden Ausdrucks giebt mit bloser Rücksicht auf die genannten Glieder,

$$\int_0^\infty du\, c^{-u^2}\left\{1 - \frac{7}{192}\frac{u^4}{\lambda^2} + \frac{77}{81920}\frac{u^8}{\lambda^4} + \text{etc.}\right\}$$

und also da

$$\int_0^\infty du\, c^{-u^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,;\quad \int_0^\infty u^4 du\, c^{-u^2} = \tfrac{3}{8}\sqrt{\pi}\,;\quad \int_0^\infty u^8 du\, c^{-u^2} = \tfrac{105}{32}\sqrt{\pi}$$

ist,

$$V_0^{(n)} = \frac{(1+\beta)^{2n}(1-\beta)}{2(1+\beta^2)^n\sqrt{\beta}\,.\sqrt{\lambda\pi}}\left\{1 - \frac{7}{256\lambda^2} + \frac{1617}{262144\lambda^4} + \text{etc.}\right\}$$

Die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (25) giebt

$$c = \frac{1}{2\sqrt{\lambda\pi}}\left\{1 - \frac{7}{256\lambda^2} + \frac{1617}{262144\lambda^4} + \text{etc.}\right\}$$

$$c^1 = 0$$

und es wird daher schliesslich

$$V_0^{(n)} = \frac{k}{2\sqrt{\lambda\pi}}\cos^n\varphi\ \text{tg}^\lambda(45^0 + \tfrac{1}{2}\varphi)\left\{z + \frac{C_1}{\lambda} + \frac{C_2}{\lambda^2} + \frac{C_3}{\lambda^3} + \text{etc.}\right\}$$

wo

$$k = 1 - \frac{7}{256\lambda^2} + \frac{1617}{262144\lambda^4} + \text{etc.}$$

und z, C_1, C_2, etc. die oben gegebenen Werthe haben.

17.

Der eben für $V_0^{(n)}$ gefundene Ausdruck gilt für jeden positiven Werth von n, vorausgesetzt dass dieser hinreichend gross ist, um die gewünschte Convergenz oder den gewünschten Grad von Genauigkeit zu erhalten, für negative Werthe von n hingegen wird er wegen $\sqrt{\lambda}$ imaginär; es ist also noch für diese Fälle der analoge Ausdruck zu entwickeln.

In allen durch die unbestimmten Integrationen erlangten Ausdrücken darf man ohne Weiteres $-n$ statt n setzen. Wir bekommen daher aus dem Art. 15

$$V_0^{(-n)} = c\,\frac{(1+\beta^2)^n}{(1+\beta)^{2n}}\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}\left\{z - \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} \mp \text{etc.}\right\}$$
$$+ c^1\,\frac{(1+\beta^2)^n}{(1-\beta)^{2n}}\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}\left\{z + \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.}\right\}$$

oder

$$V_0^{(-n)} = \frac{c}{\cos^n\varphi}\ \text{tg}^\mu(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)\left\{z - \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} \mp \text{etc.}\right\}$$
$$+ \frac{c^1}{\cos^n\varphi}\,\text{cotg}^\mu(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi)\left\{z + \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.}\right\}$$

wo z und C_1, C_2, etc. dieselben Ausdrücke haben wie vorher, aber

$$\mu = n + \tfrac{1}{2}$$

ist. Die ersten Glieder dieser Ausdrücke werden der Gleichung (25) analog,

$$(25^*) \qquad V_0^{(-n)} = \frac{c}{\sqrt{\beta}} \frac{(1+\beta^2)^n (1-\beta)}{(1+\beta)^{2n}} + \frac{c^1}{\sqrt{\beta}} \frac{(1+\beta^2)^n (1+\beta)}{(1-\beta)^{2n}}$$

Es ist nun auch

$$V_0^{(-n)} = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \varrho^{-n}\, df$$

und

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1+\beta^2}{(1-\beta^2)^2}(1+2\beta\cos f+\beta^2)$$

also

$$V_0^{(-n)} = \frac{(1+\beta^2)^n}{\pi(1-\beta^2)^{2n}}\int_0^\pi (1+2\beta\cos f+\beta^2)^n\, df$$

Setzt man hier

$$1+2\beta\cos f+\beta^2 = (1+\beta)^2 c^{-\frac{\nu^2}{\mu}}$$

so durchläuft ν das Intervall von

$$\nu = 0, \text{ bis } \nu = p = \sqrt{2\mu \log\frac{1+\beta}{1-\beta}}$$

während f das Intervall von $f = 0$ bis $f = \pi$ durchläuft. Man bekommt daher auf dieselbe Art wie oben

$$V_0^{(-n)} = \frac{(1+\beta^2)^n (1+\beta)}{\pi(1-\beta)^{2n}\sqrt{\mu\beta}}\int_0^p d\nu\, c^{-\nu^2}\left\{1 - \frac{1+\beta^2}{4\beta}\frac{\nu^2}{\mu} + \frac{1}{6}\frac{\nu^4}{\mu^2} \mp \text{etc.}\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Wendet man bei der Integration dieses Ausdrucks dieselben Schlüsse an wie oben, so werden die ersten Glieder

$$V_0^{(-n)} = \frac{(1+\beta^2)^n (1+\beta)}{2(1-\beta)^{2n}\sqrt{\beta}\,.\sqrt{\mu\pi}}\left\{1 - \frac{7}{256\mu^2} + \frac{1617}{262144\mu^4} + \text{etc.}\right\}$$

und die Vergleichung dieses Ausdrucks mit (25*) giebt

$$c = 0$$

$$c^1 = \frac{1}{2\sqrt{\mu\pi}}\left\{1 - \frac{7}{256\mu^2} + \frac{1617}{262144\mu^4} + \text{etc.}\right\}$$

und man bekommt schliesslich

$$V_0^{(-n)} = \frac{k^1}{2\sqrt{\mu\pi}\,.\cos^n\varphi}\operatorname{tg}^\mu(45^0+\tfrac{1}{2}\varphi)\left\{z + \frac{C_1}{\mu} + \frac{C_2}{\mu^2} + \text{etc.}\right\}$$

wo

$$k^1 = 1 - \frac{7}{256\mu^2} + \frac{1617}{262144\mu^4} + \text{etc.}$$

ist. Es ist zu bemerken, dass dieser Ausdruck aus dem obigen für positive Werthe hervorgeht, wenn man darin λ in μ und $\cos\varphi$ in $\sec\varphi$ verwandelt.

---

§ II.

Entwickelung der Sinusse und Cosinusse der Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie fortschreiten, und umgekehrt.

18.

Ehe ich zu diesen Entwickelungen ins Besondere übergehe, werde ich einige Sätze ableiten, die für solche im Allgemeinen gelten.

Seien f und ε irgend zwei Bögen oder Winkel, zwischen welchen eine solche Relation statt findet, dass die Differenz $f-\varepsilon$ eine periodische Function von f oder ε ist, die in eine convergirende, unendliche, nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen von f oder ε fortschreitende Reihe entwickelt werden kann. Ich nehme überdies an, dass diese Relation reel, d. h. frei von imaginären Grössen sei. Nennt man die zu f und ε gehörigen imaginären Exponentialfunctionen bez. x und y, nemlich

$$x = c^{f\sqrt{-1}}, \; y = c^{\varepsilon\sqrt{-1}}$$

wo c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen ist, so kann man vermöge der angenommenen Relation zwischen f und ε setzen

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{\mu} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{(\mu)} y^{h} \tag{26}$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{i} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} S_{i+k}^{(i)} x^{k} \tag{26*}$$

wo h und k ganze Zahlen, μ und i aber beliebige sind. Die erste dieser Gleichungen giebt durch Multiplication mit y^{μ}, und wenn man $\mu+h=i$ macht,

$$x^{\mu} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} R_{i}^{(\mu)} y^{i} \tag{27}$$

und eben so giebt die zweite, wenn man $i+k=\mu$ macht

$$y^{i} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} S_{\mu}^{(i)} x^{\mu} \tag{28}$$

In diesen beiden Gleichungen sind i und μ beliebige Zahlen, die aber dergestalt von einer abhängig sind, dass die Differenz $i-\mu$ stets eine ganze Zahl ist.

Sei $R_{\mu+h}^{1(\mu)}$ der Werth den $R_{\mu+h}^{(\mu)}$ annimmt, wenn man darin $-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$ schreibt, dann geht durch diese Substitution die Gleichung (26) in folgende über

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-\mu} = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{1(\mu)} y^{-h}$$

Substituirt man nun die Werthe

$$x^{\mu} = \cos\mu f + \sqrt{-1}\,.\,\sin\mu f$$
$$y^{i} = \cos i\varepsilon\; + \sqrt{-1}\,.\,\sin i\varepsilon$$

in (26) und in die vorstehende Gleichung, und addirt und subtrahirt hierauf diese Gleichungen, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\cos\mu(f-\varepsilon) = {} & \tfrac{1}{2}\left(R_\mu^{(\mu)} + R_\mu^{1(\mu)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{1(\mu)}\right)\cos\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+2}^{(\mu)} + R_{\mu+2}^{1(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)} + R_{\mu-2}^{1(\mu)}\right)\cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\
& + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu+1}^{1(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{1(\mu)}\right)\sqrt{-1}\,.\,\sin\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+2}^{(\mu)} - R_{\mu+2}^{1(\mu)} - R_{\mu-2}^{(\mu)} + R_{\mu-2}^{1(\mu)}\right)\sqrt{-1}\,.\,\sin 2\varepsilon + \text{etc.} \\
\sqrt{-1}\,.\,\sin\mu(f-\varepsilon) = {} & \tfrac{1}{2}\left(R_\mu^{(\mu)} - R_\mu^{1(\mu)}\right) + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{1(\mu)}\right)\cos\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{1(\mu)}\right)\cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\
& + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu+1}^{1(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{1(\mu)}\right)\sqrt{-1}\,.\,\sin\varepsilon \\
& + \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+2}^{(\mu)} + R_{\mu+2}^{1(\mu)} - R_{\mu-2}^{(\mu)} - R_{\mu-2}^{1(\mu)}\right)\sqrt{-1}\,.\,\sin 2\varepsilon + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Da angenommen wurde, dass die Relation zwischen f und ε reel ist, so folgt aus den vorstehenden Ausdrücken, dass nothwendig

$$(29) \qquad \begin{cases} R_{\mu+k}^{(\mu)} = A_{\mu+k}^{(\mu)} + B_{\mu+k}^{(\mu)}\sqrt{-1} \\ R_{\mu+k}^{1(\mu)} = A_{\mu+k}^{(\mu)} - B_{\mu+k}^{(\mu)}\sqrt{-1} \end{cases}$$

sein muss, wo $A_{\mu+k}^{(\mu)}$ und $B_{\mu+k}^{(\mu)}$ reelle Grössen sind. Es ist an sich klar, dass die Form der S Coefficienten die nemliche sein muss.

Substituirt man die Ausdrücke (29) in die für $\cos\mu(f-\varepsilon)$ und $\sqrt{-1}\sin\mu(f-\varepsilon)$, so bekommt man

$$\begin{aligned}
\cos\mu(f-\varepsilon) = {} & A_\mu^{(\mu)} + \left\{A_{\mu+1}^{(\mu)} + A_{\mu-1}^{(\mu)}\right\}\cos\varepsilon + \left\{A_{\mu+2}^{(\mu)} + A_{\mu-2}^{(\mu)}\right\}\cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\
& - \left\{B_{\mu+1}^{(\mu)} - B_{\mu-1}^{(\mu)}\right\}\sin\varepsilon - \left\{B_{\mu+2}^{(\mu)} - B_{\mu-2}^{(\mu)}\right\}\sin 2\varepsilon - \text{etc.} \\
\sin\mu(f-\varepsilon) = {} & B_\mu^{(\mu)} + \left\{B_{\mu+1}^{(\mu)} + B_{\mu-1}^{(\mu)}\right\}\cos\varepsilon + \left\{B_{\mu+2}^{(\mu)} + B_{\mu-2}^{(\mu)}\right\}\cos 2\varepsilon + \text{etc.} \\
& + \left\{A_{\mu+1}^{(\mu)} - A_{\mu-1}^{(\mu)}\right\}\sin\varepsilon + \left\{A_{\mu+2}^{(\mu)} - A_{\mu-2}^{(\mu)}\right\}\sin 2\varepsilon + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Durch Multiplication mit $\cos\mu\varepsilon$ und $\sin\mu\varepsilon$, und durch Addition und Subtraction ergeben sich hieraus die Ausdrücke von $\cos\mu f$ und $\sin\mu f$, und ähnliche Ausdrücke bekommt man für $\cos i\varepsilon$ und $\sin i\varepsilon$ durch die Cosinusse und Sinusse von μf.

Wenn die zwischen f und ε statt findende Relation so beschaffen ist, dass in der Reihe für $f-\varepsilon$ nur die Sinusse der Vielfachen von f oder ε vorkommen, dann muss nothwendig

$$B_{\mu+k}^{(\mu)} = 0$$

sein, und es wird daher

$$R_{\mu+k}^{(\mu)} = A_{\mu+k}^{(\mu)}$$

Die obigen Ausdrücke gehen in diesem Falle über in

$$\cos\mu(f-\varepsilon) = R_\mu^{(\mu)} + \left\{R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)}\right\}\cos\varepsilon + \left\{R_{\mu+2}^{(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)}\right\}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\sin\mu(f-\varepsilon) = \left\{R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)}\right\}\sin\varepsilon + \left\{R_{\mu+2}^{(\mu)} - R_{\mu-2}^{(\mu)}\right\}\sin 2\varepsilon + \text{etc.}$$

und ebenso bekommt man

$$\cos i(\varepsilon-f) = S_\mu^{(i)} + \left\{S_{\mu+1}^{(i)} + S_{\mu-1}^{(i)}\right\}\cos f + \left\{S_{\mu+2}^{(i)} + S_{\mu-2}^{(i)}\right\}\cos 2f + \text{etc.}$$

$$\sin i(\varepsilon-f) = \left\{S_{\mu+1}^{(i)} - S_{\mu-1}^{(i)}\right\}\sin f + \left\{S_{\mu+2}^{(i)} - S_{\mu-2}^{(i)}\right\}\sin 2f + \text{etc.}$$

Wenn μ und i ganze Zahlen sind, so bekommt man hieraus

$$\cos\mu f = R_0^{(\mu)} + \left\{R_1^{(\mu)} + R_{-1}^{(\mu)}\right\}\cos\varepsilon + \left\{R_2^{(\mu)} + R_{-2}^{(\mu)}\right\}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\sin\mu f = \left\{R_1^{(\mu)} - R_{-1}^{(\mu)}\right\}\sin\varepsilon + \left\{R_2^{(\mu)} - R_{-2}^{(\mu)}\right\}\sin 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\cos i\varepsilon = S_0^{(i)} + \left\{S_1^{(i)} + S_{-1}^{(i)}\right\}\cos f + \left\{S_2^{(i)} + S_{-2}^{(i)}\right\}\cos 2f + \text{etc.}$$

$$\sin i\varepsilon = \left\{S_1^{(i)} - S_{-1}^{(i)}\right\}\sin f + \left\{S_2^{(i)} - S_{-2}^{(i)}\right\}\sin 2f + \text{etc.}$$

19.

Multiplicirt man die beiden Gleichungen

$$\left(\frac{x}{y}\right)^\mu = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{(\mu)}\, y^h$$

$$\left(\frac{y}{x}\right)^\mu = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} R_{\mu+h}^{1(\mu)}\, y^{-h}$$

Seite für Seite mit einander, so wird im Product die linke Seite gleich Eins, und die rechte Seite giebt folgende Bedingungsgleichungen

$$\begin{aligned} 1 &= R_\mu^{(\mu)} R_\mu^{1(\mu)} + R_{\mu+1}^{(\mu)} R_{\mu+1}^{1(\mu)} + R_{\mu+2}^{(\mu)} R_{\mu+2}^{1(\mu)} + \text{etc.} \\ &\quad + R_{\mu-1}^{(\mu)} R_{\mu-1}^{1(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)} R_{\mu-2}^{1(\mu)} + \text{etc.} \\ 0 &= R_\mu^{(\mu)} R_{\mu-1}^{1(\mu)} + R_{\mu+1}^{(\mu)} R_\mu^{1(\mu)} + R_{\mu+2}^{(\mu)} R_{\mu+1}^{1(\mu)} + \text{etc.} \\ &\quad + R_{\mu-1}^{(\mu)} R_{\mu-2}^{1(\mu)} + R_{\mu-2}^{(\mu)} R_{\mu-3}^{1(\mu)} + \text{etc.} \\ 0 &= \text{etc.} \end{aligned}$$

Substituirt man die Ausdrücke (29) in die erste dieser, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} 1 &= \left(A_\mu^{(\mu)}\right)^2 + \left(A_{\mu+1}^{(\mu)}\right)^2 + \left(A_{\mu+2}^{(\mu)}\right)^2 + \text{etc.} \\ &\quad + \left(A_{\mu-1}^{(\mu)}\right)^2 + \left(A_{\mu-2}^{(\mu)}\right)^2 + \text{etc.} \\ &\quad + \left(B_\mu^{(\mu)}\right)^2 + \left(B_{\mu+1}^{(\mu)}\right)^2 + \left(B_{\mu+2}^{(\mu)}\right)^2 + \text{etc.} \\ &\quad + \left(B_{\mu-1}^{(\mu)}\right)^2 + \left(B_{\mu-2}^{(\mu)}\right)^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

welche zu erkennen giebt, dass jeder der A und B Coefficienten kleiner als Eins ist, wenn nicht alle bis auf Einen gleich Null sind, in welchem Falle dieser gleich Eins wird. Es zeigt sich ferner, dass in dem Falle, wo alle B Coefficienten gleich Null sind, die genannte Eigenschaft sich

jeder R Coefficient kleiner wie Eins, ausgenommen für $\mu = 0$, wo sie alle ausser $R_0^{(0)}$ gleich Null werden, und $R_0^{(0)} = 1$ ist. Dem zweiten Satze des Art. 19 gemäss sind hier negative und positive R Coefficienten vorhanden.

22.

Wenn μ keine ganze Zahl ist, so besteht jeder R Coefficient aus einer unendlichen Zahl von Gliedern und die Anzahl dieser Coefficienten ist zu beiden Seiten von $R_\mu^{(\mu)}$ ausgehend unendlich gross. Wenn hingegen μ eine ganze Zahl ist, so zeigen die Ausdrücke des vor. Art., dass alle R Coefficienten aus einer endlichen Anzahl von Gliedern bestehen, und dass die Anzahl dieser Coefficienten zur einen Seite von $R_\mu^{(\mu)}$ ausgehend endlich ist.

Sei μ eine ganze und positive Zahl, da die Fälle, wo μ ganz und negativ ist, hieraus von selbst folgen, dann zeigen die Ausdrücke der R Coefficienten des vor. Art., dass die $R_{\mu-k}^{(\mu)}$ bei $R_0^{(\mu)}$ abbrechen so, dass in keinem derselben der untere Index negativ werden kann. Die zu Ende des Art. 18 aufgestellten allgemeinen Reihen werden daher in unserm Falle

$$\cos \mu f = R_0^{(\mu)} + R_1^{(\mu)} \cos \varepsilon + R_2^{(\mu)} \cos 2\varepsilon + R_3^{(\mu)} \cos 3\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\sin \mu f = \qquad R_1^{(\mu)} \sin \varepsilon + R_2^{(\mu)} \sin 2\varepsilon + R_3^{(\mu)} \sin 3\varepsilon + \text{etc.}$$

woraus hervorgeht, dass die Entwickelung von $\sin \mu f$ dieselben Coefficienten hat wie die von $\cos \mu f$.

23.

Löst man die Gleichung (30) in Bezug auf y auf, so kommt

$$y = x\,\frac{1+\frac{\beta}{x}}{1+\beta x}$$

Dieselbe Gleichung geht aus (30) hervor, wenn man darin x und y mit einander vertauscht, und $-\beta$ statt β schreibt. Setzt man daher

$$y^\mu = \Sigma S_{\mu+k}^{(\mu)} x^{\mu+k}$$

so wird

$$S_{\mu+k}^{(\mu)} = (-1)^k R_{\mu+k}^{(\mu)} \tag{32}$$

es mag k positiv oder negativ sein. Die Gleichungen des Art. 18 geben demzufolge

$$\cos \mu\varepsilon = \pm R_0^{(\mu)} \mp R_1^{(\mu)} \cos f \pm R_2^{(\mu)} \cos 2f \mp R_3^{(\mu)} \cos 3f \pm \text{etc.}$$

$$\sin \mu\varepsilon = \qquad \mp R_1^{(\mu)} \sin f \pm R_2^{(\mu)} \cos 2f \mp R_3^{(\mu)} \sin 3f \pm \text{etc.}$$

wo die oberen Zeichen für ein grades, und die unteren für ein ungrades μ gelten.

Also auch in den Entwickelungen von $\cos \mu \varepsilon$ und $\sin \mu \varepsilon$ sind die Coefficienten dieselben wie in den Entwickelungen von $\cos \mu f$ und $\sin \mu f$, nur haben sie abwechselnd das entgegengesetzte Zeichen.

24.

Aus der Gleichung (32) folgt

$$S_\mu^{(i)} = (-1)^{\mu-i} R_\mu^{(i)}$$

da aber hier augenscheinlich

$$R_{-i}^{(-\mu)} = R_i^{(\mu)}$$

ist, so giebt der Satz des Art. 20,

$$i\, R_i^{(\mu)} = \mu\, S_\mu^{(i)}$$

in unserm Falle wird also

$$R_\mu^{(i)} = (-1)^{\mu-i} \frac{i}{\mu} R_i^{(\mu)} \tag{33}$$

Diese Gleichung ist eine specielle Relation zwischen den R Coefficienten, und ist von grossem Nutzen, wenn man für $\mu = 1$, $\mu = 2$, $\mu = 3$, etc. diese Coefficienten zu berechnen hat. Denn nachdem man durch irgend eins der weiter unten anzugebenden Verfahren diese für die Fälle berechnet hat, wo der untere Index dem oberen gleich, oder grösser ist, so giebt die obige, einfache Gleichung alle Coefficienten, in welchen der untere Index kleiner ist, wie der obere. Hievon ist jedoch, wie schon oben angemerkt wurde, der Werth $\mu = 0$ ausgeschlossen, weil die Gleichung für diesen Fall nicht gilt.

25.

Um andere Gleichungen zwischen den R Coefficienten zu erhalten, bemerke ich zuerst, dass man durch Hülfe der Gleichung

$$x^\mu = \left(\frac{y-\beta}{1-\beta y}\right)^\mu$$

unmittelbar eine Gleichung zwischen vier R Coefficienten ableiten könnte, die ich jedoch weglasse, weil sich zweckmässigere finden lassen. Das Differential der vorstehenden Gleichung giebt

$$(y-\beta)\frac{d.x^\mu}{dy} = \mu\, x^\mu \frac{1-\beta^2}{1-\beta y}$$

und die Gleichung selbst

$$1 + \beta x = \frac{x+\beta}{y} = \frac{1-\beta^2}{1-\beta y}$$

hieraus folgen die beiden Gleichungen

$$(y-\beta)\frac{d.x^\mu}{dy}=\mu x^\mu(1+\beta x)$$
$$(y-\beta)\frac{d.x^\mu}{dy}=\mu\frac{x^\mu}{y}(x+\beta)$$

Substituirt man hierin die Gleichungen

$$x^\mu=\Sigma R_i^{(\mu)}y^i;\quad \frac{d.x^\mu}{dy}=\Sigma i R_i^{(\mu)}y^{i-1}$$

so bekommt man

$$(34)\qquad \begin{cases}\mu\beta R_i^{(\mu+1)}=(i-\mu)R_i^{(\mu)}-\beta(i+1)R_{i+1}^{(\mu)}\\ R_{i+1}^{(\mu+1)}=\frac{i}{\mu}R_i^{(\mu)}-\frac{\mu+i+1}{\mu}\beta R_{i+1}^{(\mu)}\end{cases}$$

die den Uebergang von den R Coefficienten der Potenz μ zu denen der Potenz $\mu+1$ zeigen, von welchen jedoch nur die zweite stets diese aus jenen mit der erforderlichen Sicherheit giebt.

Wenn man die R Coefficienten für die Werthe $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, etc. zu berechnen hat, so kann man auf folgende Art mit Leichtigkeit und Sicherheit verfahren. Die Gleichung (30) giebt, wenn man den Nenner derselben in eine unendliche Reihe auflöst,

$$x=(y-\beta)(1+\beta y+\beta^2y^2+\beta^3y^3+\text{etc.})$$

Hieraus, so wie aus den allgemeinen Ausdrücken des Art. 21 für die R Coefficienten folgen,

$$R_0^{(1)}=-\beta;\ R_1^{(1)}=1-\beta^2;\ R_2^{(1)}=\beta(1-\beta^2);\ R_3^{(1)}=\beta^2(1-\beta^2);\ \text{etc.}$$

die zur Berechnung der Coefficienten für $\mu=1$ dienen. Nachdem man diese berechnet hat, bediene man sich der zweiten Gleichung (34) zur Berechnung derjenigen Coefficienten für $\mu=2$, $\mu=3$, etc., in welchen der untere Index nicht kleiner ist wie der obere, und der Gleichung (33) für die übrigen, mit Ausnahme von $i=0$, für welche diese nicht gilt. Setzt man aber $i=-1$ in die zweite (34), so wird wegen $R_{-1}^{(\mu)}=0$,

$$(35)\qquad R_0^{(\mu)}=-\beta R_0^{(\mu-1)}$$

und diese dient endlich zur Berechnung der $R_0^{(\mu)}$.

Da

$$R_{-i}^{(-\mu)}=R_i^{(\mu)}$$

ist, so führt die Entwickelung von $x^{-\mu}$ auf dieselben Coefficienten wie die von $x^{+\mu}$, nur enthält jene blos die negativen Potenzen von y. Mit andern Worten aus

$$x^\mu=R_0^{(\mu)}+R_1^{(\mu)}y+R_2^{(\mu)}y^2+\text{etc.}$$

erhält man sogleich

$$x^{-\mu} = R_0^{(\mu)} + R_1^{(\mu)}\frac{1}{y} + R_2^{(\mu)}\frac{1}{y^2} + \text{etc.}$$

und ebenso verhält es sich mit der entgegengesetzten Entwickelung.

26.

Wenn man nur für einzelne Werthe von μ oder für andere wie ganze Werthe die R Coefficienten zu berechnen hat, oder wenn man die nach den Regeln des vor. Art. ausgeführte Rechnung einer Controlle unterwerfen will, so kann man sich des folgenden Verfahrens bedienen, welches auf ähnliche Art wie im vor. § die Verhältnisse dieser Coefficienten durch Kettenbrüche giebt.

Setzt man $i+1$ statt i in die erste Gleichung (34), und eliminirt dann zwischen dieser und der zweiten (34) den Coefficienten $R_{i+1}^{(\mu+1)}$, so kommt

$$\beta i R_i^{(\mu)} - [i+1-\mu+(i+1+\mu)\beta^2]\, R_{i+1}^{(\mu)} + \beta(i+2)\, R_{i+2}^{(\mu)} = 0 \qquad (36)$$

welches eine Gleichung zwischen je drei auf einander folgenden, einem und demselben Werthe von μ zugehörigen R Coefficienten ist.

Sei nun für positive Werthe von i

$$\frac{R_{\mu+i}^{(\mu)}}{R_{\mu+i-1}^{(\mu)}} = p_i$$

$$p_i = F_i \gamma_i$$

$$F_i = \frac{(i+\mu-1)\beta}{i+(i+2\mu)\beta^2} = \frac{i+\mu-1}{2(i+2\mu\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi)}\sin\varphi$$

dann geht die Gleichung (36), nachdem darin $\mu+i$ statt i gesetzt worden ist, über in

$$0 = 1 - \gamma_i + \gamma_i\gamma_{i+1}\lambda_{i+1} \qquad (37)$$

wo

$$\lambda_i = \frac{(i+\mu)(i+\mu-1)\beta^2}{[i+(i+2\mu)\beta^2][i-1+(i+1+2\mu)\beta^2]} = F_i\frac{i+\mu}{i-1+2\mu\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{2} \qquad (38)$$

und es entstehen, gleichwie im vor. §, die Kettenbrüche

$$\gamma_{i-1} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\lambda_i}{1-\cfrac{\lambda_{i+1}}{1-\text{etc.}}}} \qquad \gamma_{i-2} = \cfrac{1}{1-\cfrac{\lambda_{i-1}}{1-\cfrac{\lambda_i}{1-\cfrac{\lambda_{i+1}}{1-\text{etc.}}}}} \qquad \text{etc.}$$

wovon stets der folgende aus dem vorhergehenden durch Hinzufügung Eines Gliedes entsteht.

Hat man hieraus die γ_i und daraus wieder durch die Gleichung

$$p_i = F_i\gamma_i$$

die p_i berechnet, so wird schliesslich

$$R_{\mu+i}^{(\mu)} = R_\mu^{(\mu)}\, p_1 p_2 p_3 \ldots p_i$$

Um die Grenze zu finden, nach welcher die γ_i hinstreben, verfahre ich wieder wie oben. Es wird

$$\lambda_\infty = \tfrac{1}{4}\sin^2\varphi$$
$$0 = 4 - 4\gamma_\infty + \sin^2\varphi \, . \, \gamma_\infty^2 \quad .$$

woraus

$$\gamma_\infty = \sec^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

hervorgeht. Es hat also γ hier denselben Grenzwerth wie oben bei der Entwickelung der positiven Potenzen des Radius Vectors.

27.

Um die Verhältnisse der R Coefficienten, in welchen der untere Index kleiner ist wie der obere, durch Kettenbrüche auszudrücken, bemerke ich, dass aus den Ausdrücken dieser Coefficienten im Art. 21 hervorgeht, dass man diese aus jenen erhält, wenn man in den Ausdrücken der letzteren $-\mu$ statt μ schreibt. Man braucht daher nur dieselbe Veränderung mit den Ausdrücken des vor. Art. vorzunehmen, um die verlangten Kettenbrüche zu erhalten. Sei zur Unterscheidung

$$\frac{R^{(\mu)}_{\mu-i}}{R^{(\mu)}_{\mu-i+1}} = q_i$$
$$G_i = \frac{\mu+1-i}{2(i-2\mu\sin^2\frac{1}{2}\varphi)}\sin\varphi$$
$$k_i = G_i\frac{\mu-i}{i-1-2\mu\sin^2\frac{1}{2}\varphi} \, . \, \frac{\sin\varphi}{2}$$

dann wird die Relation (36)

$$0 = 1 - \zeta_i + k_{i+1}\zeta_i\zeta_{i+1}$$

und man zieht daraus

$$\zeta_{i-1} = \cfrac{1}{1-\cfrac{k_i}{1-\cfrac{k_{i+1}}{1-\text{etc.}}}} \qquad \text{etc.}$$
$$q_i = -G_i\zeta_i$$
$$R^{(\mu)}_{\mu-i} = R^{(\mu)}_\mu q_1 q_2 \cdots q_i$$

Der vorstehende Ausdruck für k_i zeigt, dass wenn μ eine ganze Zahl ist,

$$k_\mu = 0 \text{ und } k_{\mu+1} = 0$$

ist, und daher

$$\zeta_{\mu-1} = 1 \text{ und } \zeta_\mu = 1$$

werden. Der Kettenbruch bricht also in diesem Falle bei $k_{\mu-1}$ ab, und es wird

$$\zeta_{\mu-2} = \frac{1}{1-k_{\mu-1}}; \; \zeta_{\mu-3} = \frac{1}{1-k_{\mu-2}\cdot\zeta_{\mu-2}}; \text{ etc.}$$

Der Ausdruck für G_i zeigt, dass

$$G_{\mu+1} = 0$$

ist, und es wird daher

$$R^{(\mu)}_{-1} = R^{(\mu)}_{-2} = \text{etc.} = 0$$

wie oben auf andere Art bewiesen wurde.

28.

Die Anwendung der allgemeinen Formeln des Art. 6 auf den vorliegenden Fall verlangt, um einfache Ausdrücke zu erhalten, eine besondere Zerlegung. Im vorvor. Art. wurde gezeigt, dass die Grenze der γ_i für wachsende i, $\sec^2 \frac{1}{2}\varphi$ ist. Ich setze nun

$$\gamma_i = h_i\, q_i\, (1+\beta^2)$$

wo also für wachsende i das Product $h_i\, q_i$ nach der Grenze Eins hinstrebt. Substituirt man diesen Werth von γ_i, so wie den Ausdruck (38) für λ_i in (37), so entsteht

$$1 = q_i \left\{ h_i(1+\beta^2) - \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)\beta^2(1+\beta^2)^2\, h_i\, h_{i+1}}{[i+(i+2\mu)\beta^2][i+1+(i+1+2\mu)\beta^2]}\, q_{i+1} \right\}$$

Den eingeführten Factor h_i werde ich nun benutzen, um den zusammengesetzten Nenner des letzten Gliedes dieser Gleichung fortzuschaffen. Zu diesem Ende brauchte ich nur h_i der Grösse $i+(i+2\mu)\beta^2$ gleich zu setzen, allein wenn ich diesem Ausdruck noch im Nenner die Grösse $i(1+\beta^2)$ hinzufüge, so wird bewirkt, dass für wachsende i der Factor h_i nach der Grenze Eins hinstrebt, und dass nun folglich auch q_i dieselbe Eigenschaft besitzen muss, weil sonst das Product $h_i q_i$ sie nicht besitzen kann. Sei also

$$h_i = \frac{i+(i+2\mu)\beta^2}{i(1+\beta^2)}$$

dann geht die obige Gleichung in folgende über

$$1 = q_i \left\{ 1 + \frac{i+2\mu}{i}\beta^2 - \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)}{i(i+1)}\beta^2\, q_{i+1} \right\}$$

Vergleicht man diese mit der Gleichung (A) des Art. 6, so findet man

$$a_i = \frac{i+2\mu}{i}\beta^2; \quad b_i = \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)}{i(i+1)}\beta^2$$

und hiemit geben die Endformeln des genannten Artikels

$$\alpha_i = \frac{\mu(\mu-1)}{i(i+1)}\beta^2; \qquad \beta_i = \frac{(i+\mu)(i+1+\mu)}{(i+1)(i+2)}\beta^2$$

$$\gamma_i^1 = \frac{(\mu-1)(\mu-2)}{(i+2)(i+3)}\beta^2; \qquad \delta_i = \frac{(i+1+\mu)(i+2+\mu)}{(i+3)(i+4)}\beta^2$$

etc. etc.

$$\gamma_i = \frac{i + 2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{i} \cdot \cfrac{\sec^2 \frac{1}{2}\varphi}{1 - \cfrac{\alpha_i}{1 - \cfrac{\beta_i}{1 - \cfrac{\gamma_i^1}{1 - \text{etc.}}}}}$$

Wenn μ ganz und positiv ist, können die β_i, δ_i, etc. nie Null werden, aber von den Grössen α_i, γ_i^1, etc. wird stets die μ^{te} gleich Null, und der Kettenbruch besteht daher aus $2(\mu - 1)$ Gliedern.

29.

Den analogen Kettenbruch für die $R_{\mu-i}^{(\mu)}$ bekommen wir wieder durch die Substitution von $-\mu$ statt μ in die Formel des vor. Art. Es wird also hier

$$\alpha_i = \frac{\mu(\mu+1)}{i(i+1)}\beta^2; \qquad \beta_i = \frac{(\mu - i)(\mu - 1 - i)}{(i+1)(i+2)}\beta^2$$

$$\gamma_i = \frac{(\mu+1)(\mu+2)}{(i+2)(i+3)}\beta^2; \qquad \delta_i = \frac{(\mu - 1 - i)(\mu - 2 - i)}{(i+3)(i+4)}\beta^2$$

$$\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}$$

$$\zeta_i = \frac{i - 2\mu \sin^2 \frac{1}{2}\varphi}{i} \cdot \cfrac{\sec^2 \frac{1}{2}\varphi}{1 - \cfrac{\alpha_i}{1 - \cfrac{\beta_i}{1 - \text{etc.}}}}$$

Unter der oben angeführten Bedingung werden hier die Grössen α_i, γ_i, etc. nie Null werden, hingegen von den β_i, δ_i, etc. stets die $(\mu - i)^{te}$ und die $(\mu - i + 1)^{te}$. Der Kettenbruch ist daher endlich und besteht aus $2(\mu - i) \mp 1$ Gliedern.

30.

Für die Anwendung der eben entwickelten Formeln ist noch übrig zu zeigen, wie $R_\mu^{(\mu)}$ bequem berechnet werden kann. Man wird zwar immer den im Art. 21 gegebenen endlichen Ausdruck, nemlich

$$R_\mu^{(\mu)} = 1 - \frac{\mu^2}{1^2}\beta^2 + \frac{\mu^2 . \mu^2 - 1}{1^2 . 2^2}\beta^4 - \frac{\mu^2 . \mu^2 - 1 . \mu^2 - 4}{1^2 . 2^2 . 3^2}\beta^6 \pm \text{etc.}$$

anwenden können, aber wenn μ eine grosse Zahl, und dabei β nicht klein ist, so wird die Anwendung desselben beschwerlich, weil die einzelnen Glieder sehr gross werden, und sich bei der Summirung fast aufheben, indem stets $R_\mu^{(\mu)} < 1$ werden muss, wie oben gezeigt wurde. Die R Coefficienten sind hypergeometrische Reihen derselben Gattung wie die, die uns im vor. § begegneten, nur hängen sie von andern Elementen ab wie jene. Aus den Ausdrücken des Art. 21 findet man leicht, dass

$$R^{(\mu)}_{\mu+i} = B_{\mu,i}\,\beta^i F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2)$$

$$R^{(\mu)}_{\mu-i} = (-1)^i B_{-\mu,i}\,\beta^i F(\mu, -\mu+i, i+1, \beta^2)$$

wo $B_{\mu,i} = \frac{\mu.\mu+1\ldots\mu+i-1}{1.2\ldots i}$, $B_{-\mu,i} = \frac{\mu.\mu-1\ldots.\mu-i+1}{1.2\ldots i}$

und auch diese beiden Ausdrücke lassen sich in Einen zusammen ziehen, wenn man $-\mu$ statt μ schreibt. Man kann nun die obigen Verwandelungsformeln auf diese Functionen anwenden, und ihnen dadurch eine Menge anderer Formen geben, wenn gleich es scheint, dass diese FFunctionen wegen der Beschaffenheit ihrer Elemente einer geringeren Anzahl von bequemen Verwandelungen fähig sind, wie jene.

Ich werde hier nur eine Verwandelung anführen, und zwar die, wodurch das vierte Element β^2 d. i. $\sin^2 k$ in $\cos^2 k$ übergeht. Zufolge der dazu dienenden Formel (21) wird nun zwar

$$F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2) = cF(-\mu, \mu+1, 0, \cos^2 k)$$

und diese Form ist nicht anwendbar, weil die FFunction rechter Hand unendlich wird, aber vermöge der ersten Formel (15) bekommt man zuerst

$$F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2) = \cos^2 k\, F(i+1+\mu, 1-\mu, i+1, \beta^2)$$

und wenn man die Formel (21) auf die rechte Seite dieser Gleichung anwendet, so ergiebt sich

$$F(-\mu, \mu+i, i+1, \beta^2) = c\cos^2 k\, F(i+1+\mu, 1-\mu, 2, \cos^2 k)$$

wo man nur noch die Constante c zu bestimmen hat, welches hier möglich ist, weil beide FFunctionen endliche Ausdrücke sind. Das mit der höchsten Potenz von β oder $\sin k$ in der Function linker Hand multiplicirte Glied ist

$$= (-1)^\mu \frac{\mu+i.\mu+i+1\ldots2\mu+i-1}{i+1.i+2\ldots.i+\mu} \sin^{2\mu} k$$

und das mit der höchsten Potenz von $\cos k$ rechter Hand multiplicirte Glied

$$= c(-1)^{\mu-1} \frac{\mu+i+1.\mu+i+2\ldots.2\mu+i-1}{2.3\ldots\ldots\mu} \cos^{2\mu} k$$

Hieraus folgt

$$c = (-1)^{\mu+1} \frac{2.3\ldots.\mu}{i+1.i+2\ldots i+\mu-1}$$

und wenn man diesen Werth substituirt

$$R^{(\mu)}_{\mu+i} = (-1)^{\mu+1}\mu \sin^i k \cos^2 k\, F(i+1+\mu, 1-\mu, 2, \cos^2 k)$$

welche für alle ganzen und positiven Werthe von μ und i gilt.

Schreibt man $-\mu$ statt μ, so wird

$$F(\mu, -\mu+i, i+1, \beta^2) = c\cos^2 k\, F(i+1-\mu, 1+\mu, 2, \cos^2 k)$$

und wenn man diese Gleichung eben so behandelt, erhält man

$$R^{(\mu)}_{\mu-i} = (-1)^{\mu+1}\,\mu \sin^i k \cos^2 k\, F(i+1-\mu,\ 1+\mu,\ 2,\ \cos^2 k)$$

die auch für alle ganzen und positiven Werthe von μ und i gilt, aber dabei die Erfüllung der Ungleichheit

$$\mu - i > 0$$

verlangt, weshalb der Werth von $R^{(\mu)}_0$ davon ausgeschlossen ist.*) Für $i = 0$ geben diese beiden Ausdrücke

$$R^{(\mu)}_{\mu} = (-1)^{\mu+1}\,\mu \cos^2 k \left\{1 - \frac{\mu^2-1}{1.2}\cos^2 k + \frac{\mu^2-1.\mu^2-4}{1.2.2.3}\cos^4 k - \frac{\mu^2-1.\mu^2-4.\mu^2-9}{1.2.3.2.3.4}\cos^6 k \pm \text{etc.}\right\}$$

31.

Für die Fälle, in welchen die vorstehenden Formeln sich nicht bequem anwenden lassen, dient wieder die halbconvergirende Reihe, die ich jetzt auf ähnliche Weise wie die im vor. § ableiten, und bei welcher ich mich auf $R^{(\mu)}_{\mu}$ beschränken werde. Wenn man die Differentialgleichung (14) auf die FFunction anwendet, wodurch $R^{(\mu)}_{\mu}$ dargestellt wird, so findet man, wenn man zur Abkürzung sich erlaubt blos R zu schreiben, weil hier daraus keine Verwechselung entstehen kann,

$$\frac{d^2R}{d\beta^2}\beta(1-\beta^2) + \frac{dR}{d\beta}(1-\beta^2) + 4\mu^2\beta R = 0$$

deren erstes und letztes Glied man von der unabhängigen Veränderlichen befreit, wenn man k durch die Gleichung $\beta = \sin k$ als solche einführt. Es wird somit

$$\frac{d^2R}{dk^2} + \frac{dR}{dk}\frac{1}{\sin k \cos k} + 4\mu^2 R = 0$$

deren Integral mit Uebergehung des zweiten Gliedes

*) Ich führe beiläufig an, dass die Vergleichung der eben gefundenen Ausdrücke von $R^{(\mu)}_{\mu+i}$ und $R^{(\mu)}_{\mu-i}$ mit den ursprünglichen auf merkwürdige Relationen führt, von welchen ich hier die folgenden anführen will. Die Binominalcoefficienten für jede ganze Potenz lassen sich wie folgt ausdrücken:

$$\frac{\mu.\mu+1\ldots\mu+i-1}{1.2\ldots i} = (-1^{\mu+1}\mu\left\{1 - \frac{\mu-1.\mu+i+1}{1.2} + \frac{\mu-1.\mu-2.\mu+i+1.\mu+i+2}{1.2.2.3} \mp \text{etc.}\right\}$$

$$(-1)^i\frac{\mu.\mu-1\ldots\mu-i+1}{1.2\ldots i} = (-1)^{\mu+1}\mu\left\{1 - \frac{\mu+1.\mu-i-1}{1.2} + \frac{\mu+1.\mu+2.\mu-i-1.\mu-i-2}{1.2.2.3} \mp \text{etc.}\right\}$$

Ferner ist für jeden ganzen und positiven Werth von μ, i und $\mu - i$,

$$0 = 1 - \frac{\mu.\mu+i}{1.i+1} + \frac{\mu.\mu-1.\mu+i.\mu+i+1}{1.2.i+1.i+2} \mp \text{etc.}$$

$$0 = 1 - \frac{\mu.\mu-i}{1.i+1} + \frac{\mu.\mu+1.\mu-i.\mu-i-1}{1.2.i+1.i+2} \mp \text{etc.}$$

u. s. w.

$$R = w c^{2i\mu k} + w^1 c^{-2i\mu k} \tag{39}$$

ist, wo w und w^1 die willkührlichen Constanten, und $i = \sqrt{-1}$ ist. Wendet man nun zur vollständigen Integration die im Art. 14 des vor. § erklärte Methode an, so bekommt man zur Bestimmung von w und w^1 die folgenden Gleichungen

$$4 i\mu \left(\frac{dw}{dk} + \frac{w}{2 \sin k \cos k}\right) = -\frac{d^2 w}{dk^2} - \frac{dw}{dk} \frac{1}{\sin k \cos k}$$

$$4 i\mu \left(\frac{dw^1}{dk} + \frac{w^1}{2 \sin k \cos k}\right) = \frac{d^2 w^1}{dk^2} + \frac{dw^1}{dk} \frac{1}{\sin k \cos k}$$

von welchen, wie a. a. Orte, nur der einen Genüge geleistet zu werden braucht.

32.

Setzt man, um diese Gleichungen zu vereinfachen,

$$x = \sqrt{\operatorname{cotg} k}$$

so geht die erste derselben in folgende über

$$8 i\mu \left\{\frac{dw}{dx} x^2 - w x\right\} = \frac{d^2 w}{dx^2}(x^5 + x) + \frac{dw}{dx}(x^4 - 3)$$

und um dieser Genüge zu leisten, sei

$$w = C_0 + \frac{C_1}{i\mu} + \frac{C_2}{i^2\mu^2} + \frac{C_3}{i^3\mu^3} + \text{etc.}$$

Die Substitution dieses Ausdrucks giebt die allgemeine Gleichung

$$8 \left\{\frac{dC_\nu}{dx} x^2 - C_\nu x\right\} = \frac{d^2 C_{\nu-1}}{dx^2}(x^5 + x) + \frac{dC_{\nu-1}}{dx}(x^4 - 3)$$

mit Ausnahme von

$$\frac{dC_0}{dx} x - C_0 = 0$$

Dieser ist durch $C_0 = x$ Genüge geleistet, und die Substitution dieses Werthes in die rechte Seite der allgemeinen Gleichung giebt

$$\frac{dC_1}{dx} x^2 - C_1 x = \frac{1}{8} x^4 - \frac{3}{8}$$

welcher durch

$$C_1 = \frac{1}{16} x^3 + \frac{3}{16 x}$$

genügt wird. Setzt man diesen Werth in die rechte Seite der allgemeinen Gleichung, so kommt

$$\frac{dC_2}{dx} x^2 - C_2 x = \frac{9}{128} x^6 + \frac{15}{128 x^2}$$

welcher

$$C_2 = \frac{9}{512} x^5 - \frac{15}{512 x^3}$$

genügt, u. s. w. Man erkennt schon hieraus die Form des allgemeinen Ausdrucks für C_i, nemlich

$$C_i = A^{(i)}_{2i+1} x^{2i+1} + A^{(i)}_{2i-3} x^{2i-3} + A^{(i)}_{2i-7} x^{2i-7} + \ldots + A^{(i)}_{-(2i-5)} x^{-2i+5} + A^{(i)}_{-(2i-1)} x^{-2i+1}$$

wo die ganze und positive Zahl i von 0 bis ∞ ausgedehnt werden muss,

$$A_1^{(1)} = 1,$$

und für alle übrigen Werthe von i

$$A_1^{(i)} = 0$$

ist. Setzt man diesen Werth von C_i in die obige allgemeine Gleichung, so bekommt man

$$16(i+1)A_{2i+3}^{(i+1)} = (2i+1)^2 A_{2i+1}^{(i)}$$
$$16(i-1)A_{2i-1}^{(i+1)} = (2i-3)^2 A_{2i-3}^{(i)} + (2i+1)(2i-3)A_{2i+1}^{(i)}$$
$$16(i-3)A_{2i-5}^{(i+1)} = (2i-7)^2 A_{2i-7}^{(i)} + (2i-3)(2i-7)A_{2i-3}^{(i)}$$

etc. bis

$$-16(i-1)A_{-(2i-3)}^{(i+1)} = (2i-1)^2 A_{-(2i-1)}^{(i)} + (2i-5)(2i-1)A_{-(2i-5)}^{(i)}$$
$$-16(i+1)A_{-(2i+1)}^{(i+1)} = (2i-1)(2i+3)A_{-(2i-1)}^{(i)}$$

woraus man nach und nach alle A Coefficienten berechnen kann. Man kann diese Gleichungen in eine allgemeine zusammen ziehen, wenn man die ganze und positive Zahl i^1 einführt, die von 0 bis $i+1$ ausgedehnt werden muss, es wird alsdann allgemein

$$16(i-2i^1+1)A_{2i-4i^1+3}^{(i+1)} = (2i-4i^1+1)^2 A_{2i-4i^1+1}^{(i)} + (2i-4i^1+5)(2i-4i^1+1)A_{2i-4i^1+5}^{(i)}$$

Setzt man hierin für jedes ungrade i

$$i^1 = \frac{i+1}{2}$$

so wird

$$A_{-1}^{(i)} = 3A_3^{(i)}$$

die als Controlle benutzt werden kann. Setzt man für jedes grade i nach einander

$$i^1 = \tfrac{1}{2}i \text{ und } i^1 = \frac{i+2}{2}$$

so kommt wegen $A_1^{(i)} = 0$,

$$A_3^{(i+1)} = \frac{5}{16}A_5^{(i)}; \quad A_{-1}^{(i+1)} = -\frac{9}{16}A_{-3}^{(i)}$$

deren man noch mehrere geben kann.

33.

Geben wir nun den beiden willkührlichen Constanten die imaginäre Form hc^{-il} und hc^{il}, wo $i = \sqrt{-1}$, und multipliciren die Ausdrücke von w und w^1 damit, so wird

$$w = hc^{-il}\left(C_0 + \frac{C_1}{i\mu} + \frac{C_2}{i^2\mu^2} + \frac{C_3}{i^3\mu^3} + \text{etc.}\right)$$
$$w^1 = hc^{il}\left(C_0 - \frac{C_1}{i\mu} + \frac{C_2}{i^2\mu^2} - \frac{C_3}{i^3\mu^3} \pm \text{etc.}\right)$$

Substituirt man diese in (39) und geht zum Reellen über, so kommt

$$R = 2h\cos(2\mu k - l)\left(C_0 - \frac{C_2}{\mu^2} + \frac{C_4}{\mu^4} \mp \text{etc.}\right) \tag{40}$$
$$+\ 2h\sin(2\mu k - l)\left(\frac{C_1}{\mu} - \frac{C_3}{\mu^3} + \frac{C_5}{\mu^5} \mp \text{etc.}\right)$$

wo noch die beiden willkührlichen Constanten h und l zu bestimmen sind.

Aus den Ausdrücken des vor. Art. habe ich die Werthe der ersten C Coefficienten wie folgt gefunden,

$$C_0 = x$$
$$C_1 = \frac{1}{16}x^3 + \frac{3}{16x}$$
$$C_2 = \frac{9}{512}x^5 - \frac{15}{512x^3}$$
$$C_3 = \frac{75}{8192}x^7 + \frac{45}{8192}x^3 + \frac{135}{8192x} + \frac{105}{8192x^5}$$
$$C_4 = \frac{3675}{524288}x^9 + \frac{495}{65536}x^5 - \frac{825}{65536x^3} - \frac{4725}{524288x^7}$$
$$C_5 = \frac{59535}{8388608}x^{11} + \frac{88125}{8388608}x^7 + \frac{2475}{1048576}x^3 + \frac{7425}{1048576x} + \frac{123375}{8388608x^5} + \frac{72765}{8888608x^9}$$
$$C_6 = \frac{2401245}{268435456}x^{13} + \frac{556395}{33554432}x^9 + \frac{2028825}{268435456}x^5 - \frac{3381375}{268435456x^3}$$
$$- \frac{715365}{33554432x^7} - \frac{2837835}{268435456x^{11}}$$
$$C_7 = \frac{57972915}{4294967296}x^{15} + \frac{128297925}{4294967296}x^{11} + \frac{133749825}{4294967296}x^7 + \frac{10144125}{4294967296}x^3$$
$$+ \frac{30432375}{4294967296x} + \frac{117148985}{4294967296x^5} + \frac{156808575}{4294967296x^9} + \frac{66891825}{4294967296x^{13}}$$

etc.

34.

Die Bestimmung der beiden willkührlichen Constanten werde ich vermittelst des Ausdrucks von R d. i. $R_\mu^{(\mu)}$ durch bestimmte Integrale, jedoch auf eine andere Art wie im vor. §, ausführen.

Setzt man $i = \mu - 1$, und $\beta = \sin k$ in die Gleichung (36), so wird

$$R_\mu^{(\mu)} = \frac{\mu+1}{2\mu\sin k}R_{\mu+1}^{(\mu)} + \frac{\mu-1}{2\mu\sin k}R_{\mu-1}^{(\mu)}$$

oder

$$R_\mu^{(\mu)} = \frac{W_\mu}{\mu\sin k} - \frac{V_\mu}{\sin k} \tag{41}$$

wenn man

$$\left.\begin{aligned} V_\mu &= -\tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+1}^{(\mu)} + R_{\mu-1}^{(\mu)}\right) \\ W_\mu &= \tfrac{1}{2}\left(R_{\mu+1}^{(\mu)} - R_{\mu-1}^{(\mu)}\right) \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

schreibt. Die Reihen des Art. 18 geben aber in Verbindung mit der Gleichung (32)

$$\cos\mu(f-\varepsilon) = R_\mu^{(\mu)} + 2V_\mu \cos f + \text{etc.}$$
$$\sin\mu(f-\varepsilon) = \quad 2W_\mu \sin f + \text{etc.}$$

und man bekommt daher

$$V_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos\mu(f-\varepsilon)\cos f df$$
$$W_\mu = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin\mu(f-\varepsilon)\sin f df$$

die, wenn sie in (41) substituirt werden, $R_\mu^{(\mu)}$ durch bestimmte Integrale ausdrücken. Die Substitution, die im vor. § für die Ermittelung des dort angewandten bestimmten Integrals benutzt wurde, ist hier nicht anwendbar, weil wenigstens für gewisse Werthe von μ und k die Coefficienten von df in den obigen Integralen mehr wie Ein Maximum und Minimum haben. Man kann aber dagegen für den speciellen Werth $k = \frac{\pi}{4}$ die obigen Integrale und ihre ersten Differentialquotienten nach k durch einfache Ausdrücke erhalten, und diese werde ich zur Bestimmung der beiden willkührlichen Constanten h und l anwenden.

35.

Seien wieder x und y bez. die zur wahren und excentrischen Anomalie gehörigen imaginären Exponentialfunctionen, dann wird, weil $\beta = \sin k$ gesetzt worden ist, die Gleichung zwischen x und y

$$x(1-y\sin k) = y - \sin k \tag{43}$$

Setzt man ferner

$$\theta = \frac{x}{y}$$

dann ist θ die zum Unterschiede der wahren und excentrischen Anomalie gehörige imaginäre Exponentialfunction, oder wenn man

$$f-\varepsilon = \omega$$

macht, so ist

$$\theta = c^{\omega\sqrt{-1}}$$

wenn c die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bezeichnet. Aus der Gleichung (43) ziehe ich durch die Elimination von y

$$x^2\sin k - x(\theta-1) - \theta\sin k = 0$$

woraus

$$2x\sin k = \theta - 1 \pm \sqrt{1 - 2\theta\cos 2k + \theta^2}$$

folgt, welcher Ausdruck auch wie folgt geschrieben werden kann,

$$2x\sin k = \theta - 1 \pm \sqrt{\theta}\sqrt{\theta + \frac{1}{\theta} - 2\cos 2k}$$

Die Verwandelung von $\sqrt{-1}$ in $-\sqrt{-1}$ giebt hieraus sogleich

$$\frac{2\sin k}{x} = \frac{1}{\theta} - 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\theta}}\sqrt{\theta + \frac{1}{\theta} - 2\cos 2k}$$

und hieraus erhält man durch Addition und Subtraction, und durch den Uebergang zum Reellen

$$2\sin k \cos f = \cos\omega - 1 \pm \cos\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{2\cos\omega - 2\cos 2k}$$
$$2\sin k \sin f = \sin\omega \qquad \pm \sin\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{2\cos\omega - 2\cos 2k}$$

Untersuchen wir den Gang, den diese Functionen annehmen, während f den ersten Halbkreis durchläuft. Wenn $f = 0$ ist, so ist auch $\omega = 0$, und die Substitution dieser Werthe in die vorstehenden Gleichungen zeigt, dass der ersten derselben nur durch das obere, vor der Wurzelgrösse befindliche, Zeichen Genüge geleistet werden kann. Da nun jedenfalls in beiden Gleichungen zugleich das obere oder untere Zeichen angewandt werden muss, weil sonst nicht der Bedingung $\sin^2 f + \cos^2 f = 1$ Genüge geleistet wird, und ω stets positiv ist, während f und ε im ersten Halbkreise liegen, so muss von $\omega = 0$, welchem $f = 0$ entspricht, ausgehend in beiden Gleichungen das obere Zeichen angewandt, und hiemit fortgefahren werden, bis ω sein Maximum $= 2k$ erreicht. Für dieses Maximum ist die Wurzelgrösse gleich Null, und würde imaginär werden, wenn man ω grössere Werthe beilegen wollte; $\cos f$ ist unterdess negativ geworden. Setzt man nun $f = 180^0$, so ist wieder $\omega = 0$, und der ersten Gleichung kann nur durch das untere Zeichen Genüge geleistet werden. Hieraus folgt eben so wie vorher, dass man von $\omega = 0$, welchem $f = 180^0 = \pi$ entspricht, ausgehend bis $\omega = 2k$, welchem Gange von ω rückwärts gehende Werthe von f entsprechen, in beiden Gleichungen das untere Zeichen anwenden muss. Um also f von 0 bis π wachsen zu lassen, muss man zuerst mit Anwendung der oberen Zeichen ω von 0 bis $2k$ zunehmen, und dann mit Anwendung der unteren Zeichen ω von $2k$ bis 0 abnehmen lassen. Man sieht hieraus leicht, wie der Zeichenwechsel beschaffen ist, wenn f den zweiten Halbkreis durchlaufen müsste.

Setzt man nun zur Abkürzung

$$M = \cos\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{2\cos\omega - 2\cos 2k}$$
$$N = \sin\tfrac{1}{2}\omega\sqrt{2\cos\omega - 2\cos 2k}$$

so wird

Nach der Substitution der vorstehenden Reihen in die Ausdrücke (44) haben die Integrationen keine Schwierigkeiten mehr, man findet leicht

$$V_\mu = \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \sin k}\left\{\frac{E_1}{\mu^2-1}\cos 2k + \frac{2E_2}{\mu^2-4}\cos 4k + \frac{3E_3}{\mu^2-9}\cos 6k + \text{etc.}\right\} - \frac{E_\mu}{4\pi \sin k}\sin 4\mu k$$
$$-\frac{\mu^2 \cos 2\mu k}{\pi \sin k}\left\{\frac{E_1}{\mu^2-1}\sin 2k + \frac{E_2}{\mu^2-4}\sin 4k + \frac{E_3}{\mu^2-9}\sin 6k + \text{etc.}\right\} + \frac{\mu k E_\mu}{\pi \sin k}$$
$$W_\mu = \frac{\mu^2 \sin 2\mu k}{\pi \sin k}\left\{\frac{1}{\mu^2} + \frac{E_1}{\mu^2-1}\cos 2k + \frac{E_2}{\mu^2-4}\cos 4k + \frac{E_3}{\mu^2-9}\cos 6k + \text{etc.}\right\} + \frac{E_\mu}{4\pi \sin k}\sin 4\mu k$$
$$-\frac{\mu \cos 2\mu k}{\pi \sin k}\left\{\frac{E_1}{\mu^2-1}\sin 2k + \frac{2E_2}{\mu^2-4}\sin 4k + \frac{3E_3}{\mu^2-9}\sin 6k + \text{etc.}\right\} + \frac{\mu k E_\mu}{\pi \sin k}$$

bei welchen zu bemerken ist, dass die Glieder innerhalb der Klammern, die mit $\mu^2 - \mu^2$ dividirt sind, und also unendlich gross werden, weggelassen werden müssen, und die ausserhalb der Klammern befindlichen Zusatzglieder an ihre Stelle treten.

Dieses gilt jedoch nur, wenn μ eine ganze Zahl ist; wenn dieses nicht der Fall ist, so fallen die von E_μ abhängigen, ausserhalb der Klammern stehenden Zusatzglieder weg, und innerhalb der Klammern findet keine Ausnahme statt. Durch Hülfe der Gleichung (41) geben nun die vorstehenden Ausdrücke

$$R_\mu^{(\mu)} = \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \sin^2 k}\left\{\frac{1}{\mu^2} - \frac{E_2}{\mu^2-4}\cos 4k - \frac{2E_3}{\mu^2-9}\cos 6k - \frac{3E_4}{\mu^2-16}\cos 8k - \text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{\cos 2\mu k}{\pi \sin^2 k}\left\{E_1 \sin 2k + \frac{\mu^2-2}{\mu^2-4}E_2 \sin 4k + \frac{\mu^2-3}{\mu^2-9}\sin 6k + \frac{\mu^2-4}{\mu^2-16}E_4 \sin 8k + \text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{\mu+1}{4\mu}E_\mu \frac{\sin 4\mu k}{\pi \sin^2 k} - (\mu - 1)\frac{k E_\mu}{\pi \sin^2 k}$$

wo dieselbe Bemerkung gilt wie oben.

Durch dieselbe Analyse kann man auch $R_{\mu-1}^{(\mu)}$ und $R_{\mu+1}^{(\mu)}$ ausdrücken; ich werde hier blos diesen Coefficienten geben, weil jener in dieser Abhandlung nicht gebraucht wird. Die Gleichungen (42) geben

$$R_{\mu+1}^{(\mu)} = W_\mu - V_\mu$$

substituirt man hierin die obigen Ausdrücke für W_μ und V_μ, so bekommt man sogleich

$$R_{\mu+1}^{(\mu)} = \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \sin k}\left\{\frac{1}{\mu} + \frac{E_1}{\mu+1}\cos 2k + \frac{E_2}{\mu+2}\cos 4k + \frac{E_3}{\mu+3}\cos 6k + \text{etc.}\right\}$$
$$+\frac{\mu \cos 2\mu k}{\pi \sin k}\left\{\frac{E_1}{\mu+1}\sin 2k + \frac{E_2}{\mu+2}\sin 4k + \frac{E_3}{\mu+3}\sin 6k + \text{etc.}\right\}$$

wo kein Glied eine Ausnahme bildet.

37.

Um aus den vorstehenden Ausdrücken die Summenausdrücke für $R_\mu^{(\mu)}$ und $\frac{dR_\mu^{(\mu)}}{dk}$ in dem speciellen Falle $k = \frac{\pi}{4}$ zu erhalten, müssen wir erst die Ausdrücke von E_n und $\frac{dE_n}{dk}$ für denselben speciellen Fall kennen lernen. Diese kann man wie folgt erhalten. Sei

$$\psi = \sqrt{1 - 2\alpha z + z^2}\,, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha z + z^2}}$$

dann ist

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = -z\chi$$

Wenn man nun $\alpha = \cos 2k$ macht, so ist zufolge des Vorhergehenden

$$\psi = 1 + E_1 z + E_2 z^2 + E_3 z^3 + \text{etc.}$$

Setzt man ferner

$$\chi = 1 + U_1 z + U_2 z^2 + U_3 z^3 + \text{etc.}$$

so giebt die obige Gleichung allgemein

$$\frac{dE_n}{d\alpha} = -U_{n-1}$$

Setzt man hierauf $k = \frac{\pi}{4}$, so wird $\alpha = 0$, und

$$\psi = \sqrt{1 + z^2}\,, \quad \chi = \frac{1}{\sqrt{1 + z^2}}$$

also durch die Entwickelung

$$\psi = 1 + \frac{1}{2} z^2 - \frac{1}{2.4} z^4 + \frac{1.3}{2.4.6} z^6 \mp \text{etc.}$$

$$\chi = 1 - \frac{1}{2} z^2 + \frac{1.3}{2.4} z^4 - \frac{1.3.5}{2.4.6} z^6 \pm \text{etc.}$$

Vergleicht man diese Reihen mit den obigen, so erkennt man sogleich, dass, wenn i irgend eine ganze und positive Zahl ist, und

1) $n = 2i$

$$E_{2i} = (-1)^{i+1} \frac{1.3.5..2i-3}{1.2.3\ldots i} \cdot \frac{1}{2^i}\,, \quad \frac{dE_{2i}}{d\alpha} = 0$$

2) $n = 2i + 1$

$$E_{2i+1} = 0\,; \quad \frac{dE_{2i+1}}{d\alpha} = (-1)^{i+1} \frac{1.3.5\ldots 2i-1}{1.2.3\ldots i} \cdot \frac{1}{2^i}$$

aber $\alpha = \cos 2k$ giebt $\frac{d\alpha}{dk} = -2$ für $k = \frac{\pi}{4}$, also

$$\frac{dE_{2i+1}}{dk} = (-1)^i \frac{1.3.5\ldots 2i-1}{1.2.3\ldots i} \cdot \frac{1}{2^{i-1}}$$

38.

Es ist nun leicht die Summenausdrücke von $R_\mu^{(\mu)}$ und $\frac{dR_\mu^{(\mu)}}{dk}$ für $k = \frac{\pi}{4}$ anzugeben. Setzt man $k = \frac{\pi}{4}$ in dem, im vorvor. Art. abgeleiteten Ausdruck für $R_\mu^{(\mu)}$, und

$$1)\ \mu = 2i$$

dann wird

$$\sin 2\mu k = \sin i\pi = 0$$
$$\cos 2\mu k = \cos i\pi = (-1)^i$$
$$E_1 = E_3 = \text{etc.} = 0$$

woraus

$$R_{2i}^{(2i)} = -\frac{2i-1}{2} E_{2i}$$

hervorgeht. Sei

$$2)\ \mu = 2i+1$$

dann wird

$$\sin 2\mu k = \sin\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^i$$
$$\cos 2\mu k = \cos\left(i\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

und der genannte Ausdruck für $R_\mu^{(\mu)}$ giebt

$$R_{2i+1}^{(2i+1)} = (-1)^i \frac{2\mu}{\pi} \left\{\frac{1}{\mu^2} + \frac{E_2}{\mu^2-4} - \frac{3E_4}{\mu^2-16} + \frac{5E_6}{\mu^2-36} \mp \text{etc.}\right\}$$

welches jedoch eine schwach convergirende Reihe ist. Man kann aber den Fall, wo μ ungrade ist, auf den wo μ grade ist hinführen, und dadurch zugleich die Summe der vorstehenden Reihe geben. Setzt man $2i$ statt i, und darauf $\mu = 2i$ in die zweite Gleichung (34), so kommt

$$(45)\qquad R_{2i+1}^{(2i+1)} = R_{2i}^{(2i)} - \frac{4i+1}{2i} R_{2i+1}^{(2i)} \sin k$$

Der Ausdruck für $R_{\mu+1}^{(\mu)}$ des Art. 36 giebt aber, wenn man darin $\mu = 2i$ und $k = \frac{\pi}{4}$ setzt,

$$R_{2i+1}^{(2i)} = 0$$

es wird also

$$R_{2i+1}^{(2i+1)} = R_{2i}^{(2i)}\,.$$

und wir bekommen zugleich für die obige Reihe folgenden Summenausdruck

$$(46)\quad \frac{2i-1}{2} E_{2i} = (-1)^{i+1} \frac{2\mu}{\pi} \left\{\frac{1}{\mu^2} + \frac{E_2}{\mu^2-4} - \frac{3E_4}{\mu^2-16} + \frac{5E_6}{\mu^2-36} \mp \text{etc.}\right\}$$

wo $2i+1$ für μ gesetzt werden muss.

Differentiirt man die Gleichung (45), und verschiebt den Index um eine Einheit, so wird

$$\frac{dR_{2i+2}^{(2i+2)}}{dk} = \frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} - \frac{4i+3}{2i+1}\,\frac{d\,.\,R_{2i+2}^{(2i+1)}\sin k}{dk}$$

Der Ausdruck von $R_{\mu+1}^{(\mu)}$ des Art. 36 giebt durch die Differentiation

$$\begin{aligned}\frac{d\,.\,R_{\mu+1}^{(\mu)}\sin k}{dk} = &\ 2\mu^2\,\frac{\cos 2\mu k}{\pi}\left\{\frac{1}{\mu} + \frac{E_1}{\mu+1}\cos 2k + \frac{E_2}{\mu+2}\cos 4k + \text{etc.}\right\}\\ &- 2\mu^2\,\frac{\sin 2\mu k}{\pi}\left\{\frac{E_1}{\mu+1}\sin 2k + \frac{E_2}{\mu+2}\sin 4k + \text{etc.}\right\}\\ &- \mu\,\frac{\sin 2\mu k}{\pi}\left\{\frac{2E_1}{\mu+1}\sin 2k + \frac{4E_2}{\mu+2}\sin 4k + \text{etc.}\right\}\\ &+ \mu\,\frac{\cos 2\mu k}{\pi}\left\{\frac{2E_1}{\mu+1}\cos 2k + \frac{4E_2}{\mu+2}\cos 4k + \text{etc.}\right\}\\ &+ \mu\,\frac{\sin 2\mu k}{\pi}\left\{\frac{\frac{dE_1}{dk}}{\mu+1}\cos 2k + \frac{\frac{dE_2}{dk}}{\mu+2}\cos 4k + \text{etc.}\right\}\\ &+ \mu\,\frac{\cos 2\mu k}{\pi}\left\{\frac{\frac{dE_1}{dk}}{\mu+1}\sin 2k + \frac{\frac{dE_2}{dk}}{\mu+2}\sin 4k + \text{etc.}\right\}\end{aligned}$$

Setzt man hierin $\mu = 2i+1$ und $k = \frac{\pi}{4}$, so ergiebt sich

$$\frac{d\,.\,R_{2i+2}^{(2i+1)}\sin k}{dk} = 0$$

und es wird also

$$\frac{dR_{2i}^{(2i)}}{dk} = \frac{dR_{2i-1}^{(2i-1)}}{dk}$$

Differentiirt man endlich den Ausdruck von $R_{\mu}^{(\mu)}$ des Art. 36 nach k, und setzt nach der Differentiation $\mu = 2i+1$ und $k = \frac{\pi}{4}$, so bekommt man zuerst

$$\frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} = (-1)^{i+1}\,\frac{4\mu}{\pi}\left\{\frac{1}{\mu^2} + \frac{E_2}{\mu^2-4} - \frac{3E_4}{\mu^2-16} + \frac{5E_6}{\mu^2-36} \mp \text{etc.}\right\} - i\,\frac{dE_{2i+1}}{dk}$$

und dieser verwandelt sich vermöge der Gleichung (46) in

$$\frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} = (2i-1)\,E_{2i} - i\,\frac{dE_{2i+1}}{dk}$$

womit die speciellen Summationen ausgeführt sind. Substituirt man die Werthe der E Coefficienten des vor. Art., so ergiebt sich für $k = \frac{\pi}{4}$,

$$R_{2i}^{(2i)} = R_{2i+1}^{(2i+1)} = (-1)^i\,\frac{1.3.5\ldots.2i-1}{1.2.3\ldots.\ i}\cdot\frac{1}{2i+1}$$

$$\frac{dR_{2i+2}^{(2i+2)}}{dk} = \frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} = (-1)^{i+1}\,\frac{1.3.5\ldots 2i-1}{1.2.3\ldots\ i}\cdot\frac{2i+1}{2^i}$$

39.

Um die eben gefundenen Ausdrücke zur Bestimmung unserer beiden willkührlichen Constanten bequem anwenden zu können, ist erforderlich, dass sie in halb convergirende Reihen umgewandelt werden. Die einfachste

Art dahin zu gelangen scheint mir die folgende zu sein. In *Euler's Inst. cal. diff. Cap. VI. art.* 159 ist folgende Gleichung bewiesen,

$$\log 1 + \log 2 + \ldots + \log n =$$
$$\tfrac{1}{2}\log 2\pi + (n+\tfrac{1}{2})\log n - n + \frac{A}{1.2.n} - \frac{B}{3.4n^3} + \frac{C}{5.6n^5} \mp \text{etc.}$$

wo A, B, C, etc. die Bernouillischen Zahlen sind, nemlich

$$A = \tfrac{1}{6}, \quad B = \tfrac{1}{30}, \quad C = \tfrac{1}{42}, \quad D = \tfrac{1}{30}, \quad \text{etc.}$$

Nennt man nun wieder die Grundzahl der natürlichen Logarithmen c, und setzt

$$\Pi(n) = 1.2.3 \ldots n$$
$$U_n = \frac{A}{1.2.n} - \frac{B}{3.4.n^3} + \frac{C}{5.6n^5} \mp \text{etc.}$$

so verwandelt man diese *Euler*sche Gleichung leicht in

$$\Pi(n) = n^n c^{-n} \sqrt{2n\pi} \,.\, c^{U_n}$$

aber es ist

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n} = \frac{\Pi(2n)}{2^n(\Pi(n))^2}$$

also auch

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n} = \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} c^{U_{2n}-2U_n}$$

wo

$$U_{2n} - 2U_n = -\frac{1}{8n} + \frac{1}{192n^3} - \frac{1}{640n^5} \pm \text{etc.}$$

Löst man die Exponentialgrösse in eine unendliche Reihe auf, so findet man

$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{1.2.3\ldots n} = \frac{2^n}{\sqrt{n\pi}} J_n$$

wo

$$J_n = 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + \frac{5}{1024n^3} - \frac{21}{32768n^4} - \frac{399}{262144n^5} + \text{etc.}$$

Wendet man nun diese Entwickelung auf die zu Ende des vor. Art. gegebenen Ausdrücke an, so wird

$$R_{2i}^{(2i)} = (-1)^i \frac{1}{2\sqrt{i\pi}} J_i$$
$$R_{2i+1}^{(2i+1)} = (-1)^i \frac{1}{2\sqrt{i\pi}} J_i$$
$$\frac{dR_{2i}^{(2i)}}{dk} = (-1)^i \frac{2i}{\sqrt{i\pi}} J_i$$
$$\frac{dR_{2i+1}^{(2i+1)}}{dk} = -(-1)^i \frac{2i+1}{\sqrt{i\pi}} J_i$$

Diese Ausdrücke nehmen eine nicht minder merkwürdige Form an, wenn man μ darin einführt, und zwar in dem ersten und dritten durch die Gleichungen,

$$i = \frac{\mu}{2}, \quad i^2 = \frac{\mu^2}{4}, \text{ etc.}$$

und in dem zweiten und vierten durch

$$\frac{1}{\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{\mu}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \left\{1 + \frac{1}{2\mu} + \frac{3}{8\mu^2} + \frac{5}{16\mu^3} + \frac{35}{128\mu^4} + \frac{63}{256\mu^5} + \text{etc.}\right\}$$

$$\frac{1}{i\sqrt{i}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \cdot \frac{1}{\mu\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\mu}} \left\{\frac{2}{\mu} + \frac{3}{\mu^2} + \frac{15}{4\mu^3} + \frac{35}{8\mu^4} + \frac{315}{64\mu^5} + \text{etc.}\right\}$$

etc.

Es wird durch diese Substitution

1) wenn μ eine grade Zahl ist,

$$R_\mu^{(\mu)} = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K$$

$$\frac{dR_\mu^{(\mu)}}{dk} = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{2\mu}{\sqrt{2\mu\pi}} K$$

wo

$$K = 1 - \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{32\mu^2} + \frac{5}{128\mu^3} - \frac{21}{2048\mu^4} - \frac{399}{8192\mu^5} + \text{etc.}$$

2) wenn μ eine ungrade Zahl ist,

$$R_\mu^{(\mu)} = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K^1$$

$$\frac{dR_\mu^{(\mu)}}{dk} = -(-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \frac{2\mu}{\sqrt{2\mu\pi}} K^1$$

wo

$$K^1 = 1 + \frac{1}{4\mu} + \frac{1}{32\mu^2} - \frac{5}{128\mu^3} - \frac{21}{2048\mu^4} + \frac{399}{8192\mu^5} + \text{etc.}$$

Diese letzteren Ausdrücke unterscheiden sich von den ersteren nur dadurch, dass die mit den ungraden Potenzen von μ behafteten Glieder das entgegengesetzte Zeichen haben.

40.

Setzt man nun $k = \frac{\pi}{4}$ in die Gleichung (40), und erwägt, dass dadurch $x = 1$ wird, so entsteht

$$R_\mu^{(\mu)} = 2h\mathfrak{L} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) + 2h\mathfrak{M} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right)$$

wo

$$\mathfrak{L} = 1 + \frac{3}{256\mu^2} - \frac{1845}{262144\mu^4} + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{4\mu} - \frac{45}{1024\mu^3} + \frac{52875}{1048576\mu^5} + \text{etc.}$$

Differentiirt man die Gleichung (40) nach k, setzt nach der Differentiation $k = \frac{\pi}{4}$, und erwägt dass daraus

$$\frac{dx}{dk} = -1$$

folgt, so bekommt man

$$\frac{dR_\mu^{(\mu)}}{dk} = -4\mu h \mathfrak{L} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) - 4\mu h \mathfrak{M} \cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right)$$

wo die Reihen dieselben sind wie in dem vorstehenden Ausdruck von $R_\mu^{(\mu)}$. Wenn nun μ eine grade Zahl ist, so wird

$$\sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = -(-1)^{\frac{\mu}{2}} \sin l$$

$$\cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = \quad (-1)^{\frac{\mu}{2}} \cos l$$

Substituirt man diese Werthe in die vorstehenden Ausdrücke, und setzt diese dann den bez. Ausdrücken des vor. Art. gleich, so erhält man

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K = 2h \cos l \,.\, \mathfrak{L} - 2h \sin l \,.\, \mathfrak{M}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K = 2h \sin l \,.\, \mathfrak{L} - 2h \cos l \,.\, \mathfrak{M}$$

Hieraus geht hervor dass

$$\cos l = \sin l$$

ist, welcher durch

$$l = \frac{\pi}{4}$$

Genüge geleistet wird. Substituirt man diesen Werth, so wird

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} K = 2h \{\mathfrak{L} - \mathfrak{M}\}$$

und wenn man die obigen Ausdrücke von K, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ substituirt, und die Division ausführt,

$$2h = \frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} \left\{1 + \frac{5}{256\mu^2} - \frac{903}{262144\mu^4} + \text{etc.}\right\}$$

Wenn μ eine ungrade Zahl ist, so wird

$$\sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \cos l$$

$$\cos\left(\frac{\mu\pi}{2} - l\right) = (-1)^{\frac{\mu-1}{2}} \sin l$$

und hieraus bekommt man auf dieselbe Art wie oben

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K^1 = 2h \sin l \,.\, \mathfrak{L} + 2h \cos l \,.\, \mathfrak{M}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\mu\pi}} K^1 = 2h \cos l \,.\, \mathfrak{L} + 2h \sin l \,.\, \mathfrak{M}$$

also wieder $\sin l = \cos l$. Setzt man daher wieder $l = \frac{\pi}{4}$ in diese Gleichungen, so geben sie

$$\frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} K^1 = 2h \{\mathfrak{L} + \mathfrak{M}\}$$

Die Vergleichung dieser Gleichung mit der oben für h gefundenen zeigt, dass daraus derselbe Werth für h hervorgehen muss. Es wird also ohne Rücksicht auf die Form von μ allgemein

$$R_\mu^{(\mu)} = c \cos(2\mu k - 45^0) \left\{ x - \frac{C_2}{\mu^2} + \frac{C_4}{\mu^4} \mp \text{etc.} \right\}$$
$$+ c \sin(2\mu k - 45^0) \left\{ \frac{C_1}{\mu} - \frac{C_3}{\mu^3} + \frac{C_5}{\mu^5} \mp \text{etc.} \right\}$$

wo

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\pi}} \left\{ 1 + \frac{5}{256\,\mu^2} - \frac{902}{262144\,\mu^4} + \text{etc.} \right\}$$

und die Werthe von C_1, C_2, etc. des Art. 33 anzuwenden sind.

Es wurde oben gezeigt, dass die endlichen Ausdrücke des Art. 30 für $R_\mu^{(\mu)}$ in den Fällen, wo bei grossem μ der Winkel k Mittelwerthe zwischen seinen Grenzen 0 und 90° einnimmt, am wenigsten geeignet sind, auf bequeme Art den Werth von $R_\mu^{(\mu)}$ zu geben. Der Ausdruck für x zeigt, dass grade in diesen Fällen bei übrigens gleichen Werthen von μ die vorstehende halbconvergirende Reihe am stärksten convergirt. Je mehr sich k einer seiner beiden Grenzen nähert, desto schwächer wird bei gleichen Werthen von μ die Convergenz derselben, aber grade in diesen Fällen wird der eine der Ausdrücke des Art. 30 zur Berechnung geeignet. Bei gleichen Werthen von k nimmt bei wachsendem μ jedenfalls die Convergenz der halbconvergirenden Reihe zu, und wenn daher bei kleinem oder grossem k die Zahl μ so gross ist, dass die Benutzung der beiden Ausdrücke des Art. 30 unbequem wird, so wird die halbconvergirende Reihe dienen können. Die Anzahl der oben numerisch entwickelten C Coefficienten wird wohl in jedem Falle, wo es der vorhergehenden Auseinandersetzung zufolge zweckmässig ist sich ihrer zu bedienen, hinreichend sein. Ich bemerke noch, dass diese Coefficienten von μ unabhängig sind, und dass sie daher in den Fällen, wo man den Coefficienten $R_\mu^{(\mu)}$ zwar für mehrere Werthe von μ, aber einem und demselben Werthe der Excentricität oder k entsprechend, zu berechnen hat, dieselben bleiben, und nur ein Mal berechnet zu werden brauchen.

41.

Im Vorstehenden ist alles enthalten, welches zur bequemen Berechnung von $R_\mu^{(\mu)}$ erforderlich ist, ich will indess noch einen merk-

würdigen Satz geben, welcher sich aus einer der obigen Relationen leicht ableiten lässt. Schreiben wir jetzt, da verschiedene Werthe von k in Betracht gezogen werden sollen, $R_\mu^{(\mu,k)}$ statt $R_\mu^{(\mu)}$, setzen in den im Art. 36 entwickelten Ausdruck von $R_\mu^{(\mu)}$, k^1 statt k, und bezeichnen die daraus hervorgehenden Werthe der E Coefficienten durch E^1, so wird

$$R_\mu^{(\mu,k^1)} = \frac{\mu \sin 2\mu k^1}{\pi \sin^2 k^1} \left\{ \frac{1}{\mu^2} - \frac{E_2^1}{\mu^2-4} \cos 4k^1 - \frac{2E_3^1}{\mu^2-9} \cos 6k^1 - \frac{3E_4^1}{\mu^2-16} \cos 8k^1 - \text{etc.} \right\}$$
$$+ \frac{\cos 2\mu k^1}{\pi \sin^2 k^1} \left\{ E_1^1 \sin 2k^1 + \frac{\mu^2-2}{\mu^2-4} E_2^1 \sin 4k^1 + \frac{\mu^2-3}{\mu^2-9} E_3^1 \sin 6k^1 + \frac{\mu^2-4}{\mu^2-16} E_4^1 \sin 8k^1 + \text{etc.} \right\}$$
$$+ \frac{\mu+1}{4\mu} E_\mu^1 \frac{\sin 4\mu k^1}{\pi \sin^2 k^1} - (\mu-1) \frac{k^1 E_\mu^1}{\pi \sin^2 k^1}$$

Setzt man nun

$$k^1 = \frac{\pi}{2} - k$$

so bekommt man die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sin^2 k^1 &= \cos^2 k \\
\sin 2\mu k^1 &= -(-1)^\mu \sin 2\mu k \\
\cos 2\mu k^1 &= (-1)^\mu \cos 2\mu k \\
\sin 4\mu k^1 &= -\sin 4\mu k \\
\sin 2k^1 &= \sin 2k \\
\sin 4k^1 &= -\sin 4k \\
\sin 6k^1 &= \sin 6k \\
&\text{etc.} \\
\cos 4k^1 &= \cos 4k \\
\cos 6k^1 &= -\cos 6k \\
&\text{etc.} \\
E_n^1 &= (-1)^n E_n
\end{aligned}$$

wodurch der vorstehende Ausdruck in

$$R_\mu^{\left(\mu,\frac{\pi}{2}-k\right)} = -(-1)^\mu \frac{\mu \sin 2\mu k}{\pi \cos^2 k} \left\{ \frac{1}{\mu^2} - \frac{E_2}{\mu^2-4} \cos 4k - \frac{2E_3}{\mu^2-9} \cos 6k - \frac{3E_4}{\mu^2-16} \cos 8k - \text{etc.} \right\}$$
$$-(-1)^\mu \frac{\cos 2\mu k}{\pi \cos^2 k} \left\{ E_1 \sin 2k + \frac{\mu^2-2}{\mu^2-4} E_2 \sin 4k + \frac{\mu^2-3}{\mu^2-9} E_3 \sin 6k + \frac{\mu^2-4}{\mu^2-16} E_4 \sin 8k + \text{etc.} \right\}$$
$$-(-1)^\mu \frac{\mu+1}{4\mu} E_\mu \frac{\sin 4\mu k}{\pi \cos^2 k} + (-1)^\mu (\mu-1) \frac{k E_\mu}{\pi \cos^2 k} - (-1)^\mu (\mu-1) \frac{E_\mu}{2 \cos^2 k}$$

übergeht. Vergleicht man diesen mit dem Ausdruck für $R_\mu^{(\mu)}$ des Art. 36, so kommt sogleich

$$R_\mu^{\left(\mu,\frac{\pi}{2}-k\right)} = -(-1)^\mu R_\mu^{(\mu,k)} \operatorname{tg}^2 k - (-1)^\mu \frac{(\mu-1)}{2} \frac{E_\mu}{\cos^2 k}$$

durch welche Relation die Werthe von $R_\mu^{(\mu)}$ für ein grosses k auf die für

ein kleines k zurück geführt werden. Es folgt hieraus von selbst die entgegengesetzte Relation, wodurch $R_\mu^{(\mu)}$ für ein kleines k auf $R_\mu^{(\mu)}$ für ein grosses k hingeführt wird.

---

§ III.

Entwickelung der Functionen $\varrho^n \cos mf$ und $\varrho^n \sin mf$ in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie fortschreiten.

42.

Die Entwickelungen der beiden vor. §§ geben schon, wenn sie mit einander verbunden werden, die Auflösung dieser Aufgabe. Es war

$$\varrho^n x^m = \Sigma' V_i^{(n)} x^{m+i}$$

$$x^\mu = \Sigma R_i^{(\mu)} y^i$$

Setzt man daher

$$\varrho^n x^m = \Sigma' W_i^{n,m} y^i$$

so erhält man aus der Multiplication der beiden ersten Reihen mit einander,

$$W_i^{n,m} = V_0^{(n)} R_i^{(m)} + V_1^{(n)} R_i^{(m+1)} + V_2^{(n)} R_i^{(m+2)} + \text{etc.}$$
$$+ V_1^{(n)} R_i^{(m-1)} + V_2^{(n)} R_i^{(m-2)} + \text{etc.}$$

womit die Aufgabe gelöst ist.

43.

Man kann aber diese Aufgabe auch direct lösen, und bekommt dadurch, namentlich wenn n eine ganze und positive Zahl, und $m \overline{\overline{<}} n$ ist, einfache Resultate, indem man auf lauter endliche Ausdrücke hingeführt wird.

Die Gleichung

$$\varrho = 1 - \sin\varphi \cos\varepsilon$$

giebt, wenn wir die zur wahren und excentrischen Anomalie gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen wieder mit x und y bezeichnen, wodurch wie oben

$$x = y \frac{1-\frac{\beta}{y}}{1-\beta y}$$

wird,

$$\varrho^n x^m = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\, y^m (1-\beta y)^{n-m} \left(1-\frac{\beta}{y}\right)^{n+m}$$

Durch die Entwickelung der beiden Binomien ergiebt sich

$$(1-\beta y)^{n-m} = 1 - \frac{n-m}{1}\beta y + \frac{n-m\,.\,n-m-1}{1\,.\,2}\beta^2 y^2 - \frac{n-m\,.\,n-m-1\,.\,n-m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\beta^3 y^3 \pm \text{etc.}$$

$$\left(1-\frac{\beta}{y}\right)^{n+m} = 1 - \frac{n+m}{1}\frac{\beta}{y} + \frac{n+m\,.\,n+m-1}{1\,.\,2}\frac{\beta^2}{y^2} - \frac{n+m\,.\,n+m-1\,.\,n+m-2}{1\,.\,2\,.\,3}\frac{\beta^3}{y^3} \pm \text{etc.}$$

und hieraus

$$W_m^{n,m} = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{1 + \frac{n^2-m^2}{1^2}\beta^2 + \frac{n^2-m^2\,.\,(n-1)^2-m^2}{1^2\,.\,2^2}\beta^4 + \frac{n^2-m^2\,.\,(n-1)^2-m^2\,.\,(n-2)^2-m^2}{1^2\,.\,2^2\,.\,3^2}\beta^6 + \text{etc.}\right\}$$

$$W_{m+1}^{n,m} = -\cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\frac{n-m}{1}\beta + \frac{n^2-m^2\,.\,n-1-m}{1^2\,.\,2}\beta^3 + \frac{n^2-m^2\,.\,(n-1)^2-m^2\,.\,n-2-m}{1^2\,.\,2^2\,.\,3}\beta^5 + \text{etc.}\right\}$$

$$W_{m+2}^{n,m} = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\frac{n-m\,.\,n-1-m}{1\,.\,2}\beta^2 + \frac{n^2-m^2\,.\,n-1-m\,.\,n-2-m}{1^2\,.\,2\,.\,3}\beta^4 + \frac{n^2-m^2\,.\,(n-1)^2-m^2\,.\,n-2-m\,.\,n-3-m}{1^2\,.\,2^2\,.\,3\,.\,4}\beta^6 + \text{etc.}\right\}$$

etc. etc.

$$W_{m-1}^{n,m} = -\cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\frac{n+m}{1}\beta + \frac{n^2-m^2\,.\,n-1+m}{1^2\,.\,2}\beta^3 + \frac{n^2-m^2\,.\,(n-1)^2-m^2\,.\,n-2+m}{1^2\,.\,2^2\,.\,3}\beta^5 + \text{etc.}\right\}$$

$$W_{m-2}^{n,m} = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{\frac{n+m\,.\,n-1+m}{1\,.\,2}\beta^2 + \frac{n^2-m^2\,.\,n-1+m\,.\,n-2+m}{1^2\,.\,2\,.\,3}\beta^4 + \frac{n^2-m^2\,.\,(n-1)^2-m^2\,.\,n-2+m\,.\,n-3+m}{1^2\,.\,2^2\,.\,3\,.\,4}\beta^6 + \text{etc.}\right\}$$

etc. etc.

Diese Ausdrücke zeigen sogleich, dass unter den oben genannten Bedingungen nicht blos jeder WCoefficient aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, sondern auch die Anzahl dieser Coefficienten endlich ist. Diese ist stets unabhängig von m und $= 2n+1$; sie erstreckt sich

$$\text{von } W_{-n}^{n,m} \text{ bis } W_{+n}^{n,m}$$

Die Anzahl der Glieder, aus welchen jeder Coefficient besteht, ist höchstens $= n - m + 1$, sie wächst im Allgemeinen mit der Differenz $n - m$. Die obigen Ausdrücke geben ferner zu erkennen, dass stets

$$W_i^{n,m} = W_{-i}^{n,-m}$$

ist, welcher Satz auch schon eine nothwendige Folge davon ist, $\varrho^n \cos mf$ und $\varrho^n \sin mf$ reelle Grössen sind.

44.

Man kann zwischen je drei auf einander folgenden WCoefficienten, die denselben Werthen von n und m zugehören, eine linearische Gleichung finden. Die Gleichungen

$$(47)\qquad \begin{cases} \varrho = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\left(1+\beta^2-\beta\left(y+\frac{1}{y}\right)\right) \\ x = \frac{y-\beta}{1-\beta y} \end{cases}$$

geben durch die Differentiation

$$\frac{d\varrho}{dy} = \beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \left(\frac{1}{y^2} - 1\right)$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta y)^2}$$

Hiemit wird zuerst

$$\frac{d\,.\,\varrho^n x^m}{dy} = n\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \,.\, \varrho^{n-1} x^m \left(\frac{1}{y^2} - 1\right) + m(1-\beta^2)\frac{\varrho^n x^{m-1}}{(1-\beta y)^2}$$

die sich leicht in

$$\{y(1+\beta^2) - \beta - \beta y^2\} \frac{d\,.\,\varrho^n x^m}{dy} = n\beta\, \varrho^n x^m \left(\frac{1}{y} - y\right) + m(1-\beta^2)\, \varrho^n x^m$$

verwandeln lässt. Substituirt man hierin die Werthe

$$\varrho^n x^m = \Sigma\, W_i^{n,m} y^i\,; \quad \frac{d\,.\,\varrho^n x^m}{dy} = \Sigma\, i\, W_i^{n,m} y^{i-1}$$

so bekommt man sogleich

$$(i+1+n)\beta\, W_{i+1}^{n,m} - [i-m+(i+m)\beta^2]\, W_i^{n,m} + (i-1-n)\beta\, W_{i-1}^{n,m} = 0 \qquad (48)$$

welche mit (36) übereinstimmt, wenn man $n = 0$ macht.

Um von einem Exponenten zu andern überzugehen, lassen sich zwischen vier WCoefficienten zweckmässige Gleichungen finden. Die (47) geben, nachdem die erste durch die zweite dividirt, und der Quotient mit $\varrho^n x^m$ multiplicirt worden ist,

$$\varrho^{n+1} x^{m-1} = \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \left(\frac{1}{y} - 2\beta + \beta^2 y\right) \varrho^n x^m$$

woraus

$$W_i^{n+1,m-1} = \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i+1}^{n,m} - 2\beta \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi\, W_i^{n,m} + \beta^2 \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i-1}^{n,m} \qquad (49)$$

folgt.*) Durch Hülfe dieser Gleichung kann man aus dem einzigen Werthe $\varrho^0 = 1$ alle diejenigen WCoefficienten für jeden positiven und ganzen Werth von n, und jeden ganzen Werth von m, welcher $\leqq n$ ist, berechnen, die man vorzugsweise in der Störungstheorie braucht, nemlich die Coefficienten von

$$\varrho x;\; \varrho x^{-1};\; \varrho^2 x^2;\; \varrho^2;\; \varrho^2 x^{-2};\; \text{etc.}$$

Um dieses zu zeigen, will ich die Formeln für die ersten derselben anführen.

---

*) Durch Hülfe von (48) kann man hier einen beliebigen der WCoefficienten rechter Hand eliminiren, und dadurch eine Gleichung zwischen drei dieser Coefficienten erhalten.

Die Gleichung $\rho^0 = 1$ giebt $W_0^{0,0} = 1$ und alle übrigen W Coefficienten sind für $n = 0$, $m = 0$ gleich Null. Setzt man nun $n = 0$, $m = 0$, und nach einander $i = -1$, $i = 0$, $i = 1$, in (49), so erhält man

$$W_{-1}^{1,-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi;\quad W_0^{1,-1} = -2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi;\quad W_1^{1,-1} = \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

und hieraus wegen $W_i^{n,m} = W_{-i}^{n,-m}$

$$W_{-1}^{1,1} = \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi;\quad W_0^{1,1} = -2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi;\quad W_1^{1,1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

Setzt man ferner $n = 1$, $m = -1$, und nach einander $i = -2$, $i = -1$, etc. bis $i = 2$, so entstehen

$$\begin{aligned}
W_{-2}^{2,-2} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{1,-1}\\
W_{-1}^{2,-2} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{1,-1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{1,-1}\\
W_0^{2,-2} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_1^{1,-1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{1,-1} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{1,-1}\\
W_1^{2,-2} &= \qquad\qquad - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_1^{1,-1} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{1,-1}\\
W_2^{2,-2} &= \qquad\qquad \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_1^{1,-1}
\end{aligned}$$

Setzt man $n = 1$, $m = 1$, $i = -2$, etc. so kommt

$$\begin{aligned}
W_{-2}^{2,0} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{1,1}\\
W_{-1}^{2,0} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{1,1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{1,1}\\
W_0^{2,0} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_1^{1,1} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{1,1} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{1,1}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Die übrigen Coefficienten für $n = 2$ bekommt man aus diesen durch die Gleichung $W_i^{n,m} = W_{-i}^{n,-m}$.

Setzt man $n = 2$, $m = -2$, $i = -3$, etc. so geben die vorstehenden Coefficienten mit Zuziehung von (49)

$$\begin{aligned}
W_{-3}^{3,-3} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-2}^{2,-2}\\
W_{-2}^{3,-3} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-2}^{2,-2}\\
W_{-1}^{3,-3} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-2}^{2,-2}\\
W_0^{3,-3} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_1^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{2,-2}\\
W_1^{3,-3} &= \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_2^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_1^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_0^{2,-2}\\
W_2^{3,-3} &= \qquad\qquad - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_2^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_1^{2,-2}\\
W_3^{3,-3} &= \qquad\qquad \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_2^{2,-2}
\end{aligned}$$

Mit $n = 2$, $m = 0$, $i = -3$, etc. wird

$$W_{-3}^{3,-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-2}^{2,-2}$$
$$W_{-2}^{3,-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-2}^{2,-2}$$
$$W_{-1}^{3,-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{0}^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-2}^{2,-2}$$
$$W_{0}^{3,-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{1}^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{0}^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{-1}^{2,-2}$$
$$W_{1}^{3,-1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{2}^{2,-2} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{1}^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{0}^{2,-2}$$
$$W_{2}^{3,-1} = \qquad - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{2}^{2,-2} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{1}^{2,-2}$$
$$W_{3}^{3,-1} = \qquad \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{2}^{2,-2}$$

u. s. w.

Diese Art der Berechnung hat keine Unsicherheit im Gefolge, weil alle Multiplicatoren kleiner sind wie Eins, und keine Subtractionen vorkommen, indem die W Coefficienten abwechselnd positiv und negativ sind. Man kann durch dieselben Gleichungen auch die Coefficienten für die zwischenliegenden Werthe von m berechnen, wenn man ursprünglich ausser der Gleichung $\varrho^0 = 1$ auch

$$\varrho = -\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi \,.\, y^{-1} + (1+\beta^2)\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi - \beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi \,.\, y$$

zu Hülfe nimmt, welche

$$W_1^{1,0} = W_{-1}^{1,0} = -\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi; \quad W_0^{1,0} = (1+\beta^2)\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

giebt. Man kann diese Rechnung auch noch auf andere Art ausführen, denn auf ähnliche Weise, wie (49) gefunden wurde, findet man auch dass

$$W_i^{n+1,m+1} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i-1}^{n,m} - 2\beta\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_i^{n,m} + \beta^2\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, W_{i+1}^{n,m}$$

ist. Für $W_i^{n,n}$ ergeben sich aus den Ausdrücken des Art. 43 sofort die folgenden einfachen Ausdrücke

$$W_n^{n,n} = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi; \quad W_{n-1}^{n,n} = -\tfrac{2n}{1}\beta\, W_n^{n,n}; \quad W_{n-2}^{n,n} = -\tfrac{2n-1}{2}\beta\, W_{n-1}^{n,n};$$
$$W_{n-3}^{n,n} = -\tfrac{2n-2}{3}\beta\, W_{n-2}^{n,n}; \text{ etc.}$$

die in dieser Rechnung auch mit Vortheil angewandt werden können. Es lassen sich noch viele Gleichungen zwischen den W Coefficienten ableiten, die ich aber hier weglasse, weil die vorstehenden ihren Zweck sicher und leicht erfüllen.

45.

Die W Coefficienten können auch auf ähnliche Weise wie die der vor. §§ durch Kettenbrüche berechnet werden, und wenn man sie auf die im vor. Art. dargelegte Art berechnet, so ist es zur Controlle dienlich, auch einige derselben auf die folgende Art zu berechnen. Setzt man $m+i$ statt i in die Gleichung (48), so kommt

$$0 = (m+n+i+1)\beta W^{n,m}_{m+i+1} - (i+(i+2m)\beta^2) W^{n,m}_{m+i} + (m-n+i-1)\beta W^{n,m}_{m+i-1}$$

Nimmt man i stets positiv, und setzt von $i=1$ bis $i=n-m$,

$$\frac{W^{n,m}_{m+i}}{W^{n,m}_{m+i-1}} = p_i;\quad p_i = -F_i\,\theta_i$$

$$F_i = \frac{n-m-i+1}{i+(i+2m)\beta^2}\,\beta = \frac{n-m-i+1}{i+2m\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}$$

$$\lambda_i = \frac{(n-m+i)(n+m-i+1)\beta^2}{[i+(i+2m)\beta^2][i-1+(i-1+2m)\beta^2]} = F_i\,\frac{n+m+i}{i-1+2m\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}$$

so bekommt man

$$\theta_{i-1} = \frac{1}{1+\lambda_i\theta_i};\quad \theta_{i-2} = \frac{1}{1+\lambda_{i-1}\theta_{i-1}};\quad \text{etc.}$$

$$W^{n,m}_{m+i} = W^{n,m}_m\,p_1\,p_2\,p_3\cdots p_i$$

Der Anfangswerth ist hier

$$\theta_{n-m} = 1$$

aber wenn die W Coefficienten vor $W^{n,m}_n$ schon unmerklich werden, so rechnet man am Zweckmässigsten für den höchsten Werth von i, den man braucht, θ_i aus folgendem Kettenbruch

$$\theta_i = \frac{i+2m\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{i}\cdot\cfrac{\sec^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\cfrac{\alpha_i}{1+\cfrac{\beta_i}{1+\text{etc.}}}}$$

wo

$$\alpha_i = \frac{(n+m)(n-m+1)}{i(i+1)}\beta^2;\qquad \beta_i = \frac{(n-m-i)(n+m+i+1)}{(i+1)(i+2)}\beta^2.$$

$$\gamma_i = \frac{(n+m+1)(n-m+2)}{(i+2)(i+3)}\beta^2;\qquad \delta_i = \frac{(n-m-i-1)(n+m+i+2)}{(i+3)(i+4)}\beta^2$$

etc. etc.

46.

Für die übrigen Coefficienten setze man, von $i=1$ bis $i=n+m$,

$$\frac{W^{n,m}_{m-i}}{W^{n,m}_{m-i+1}} = q_i;\quad q_i = -G_i\,\zeta_i$$

$$G_i = \frac{n+m-i+1}{i-2m\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}$$

$$k_i = G_i\,\frac{n-m+i}{i-1-2m\sin^2\frac{1}{2}\varphi}\cdot\frac{\sin\varphi}{2}$$

dann wird

$$\zeta_{i-1} = \frac{1}{1+k_i\,\zeta_i};\quad \zeta_{i-2} = \frac{1}{1+k_{i-1}\,\zeta_{i-1}},\quad \text{etc.}$$

$$W^{n,m}_{m-i} = W^{n,m}_m\, q_1\, q_2\, q_3 \cdots q_i$$

Der Anfangswerth ist wieder $\zeta_{n+m} = 1$, und wo dieser nicht gebraucht wird,

$$\zeta_i = \frac{i-2m\sin^2\frac{1}{2}\varphi}{i}\cdot\cfrac{\sec^2\frac{1}{2}\varphi}{1+\cfrac{\alpha_i}{1+\cfrac{\beta_i}{1+\text{etc.}}}}$$

wo

$$\alpha_i = \frac{(n-m)(n+m+1)}{i(i+1)}\beta^2,\qquad \beta_i = \frac{(n-m+i+1)(n+m-i)}{(i+1)(i+2)}\beta^2$$

$$\gamma_i^1 = \frac{(n-m-1)(n+m+2)}{(i+2)(i+3)}\beta^2,\qquad \delta_i = \frac{(n-m+i+2)(n+m-i-1)}{(i+3)(i+4)}\beta^2$$

etc. etc.

47.

Es wird, um die vorhergehenden Rechnungen auszuführen, wieder nur $W^{n,m}_m$ gebraucht; ich werde aber, wie vorher, so auch hier etwas weiter gehen. Die Ausdrücke des Art. 43 zeigen sogleich, dass

$$W^{n,m}_{m+i} = (-1)^i\cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{n-m.n-m-1\ldots n-m-i+1}{1\,.\,2\,\ldots\,i}\,\beta^i F(-n-m,\,-n+m+i,\,i+1,\,\beta^2)$$

$$W^{n,m}_{m-i} = (-1)^i\cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{n+m.n+m-1\ldots n+m-i+1}{1\,.\,2\,\ldots\,i}\,\beta^i F(-n+m,\,-n-m+i,\,i+1,\,\beta^2)$$

und der daraus folgende Werth von $W^{n,m}_m$ kann, wenn β klein ist, oder allgemein wenn $n-m$ klein ist, zur Berechnung angewandt werden. Dieser ist aber der a. a. O. gegebene Ausdruck, nemlich

$$W^{n,m}_m = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}\varphi\left\{1+\frac{n^2-m^2}{1^2}\beta^2+\frac{n^2-m^2.(n-1)^2-m^2}{1^2\,.\,2^2}\beta^4+\text{etc.}\right\}$$

Ich werde nun $\beta = \sin k$ setzen, und die von $\cos k$ abhängigen Ausdrücke suchen. Durch die Gleichung (21) bekommen wir sogleich

$$F(-n-m,\,-n+m+i,\,i+1,\,\beta^2) = cF(-n-m,\,-n+m+i,\,-2n,\,\cos^2 k)$$

Wenn $m < n$ ist, so kann der Ausdruck rechter Hand nie unendlich werden, obgleich das dritte Element eine ganze negative Zahl ist, denn er bricht stets vor dem Gliede ab, welches die Null zum Nenner bekommen

von $J_\lambda^{(m+1)}$ zu $J_\lambda^{(m)}$ durch Hülfe eines Kettenbruches berechnet, und schliesslich daraus und durch $J_\lambda^{(0)}$ die Functionen selbst. Es dient dazu der erste der beiden Kettenbrüche, die ich a. a. O. gegeben habe, nachdem darin $i^1\nu = 0$ gesetzt worden.*) Setzt man nemlich

$$p_i = \cfrac{1}{\cfrac{i}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+1}{\lambda} - \cfrac{1}{\cfrac{i+2}{\lambda} - \text{etc.}}}}$$

wo die Null der Grenzwerth der Glieder ist, so wird

$$J_\lambda^{(m)} = J_\lambda^{(0)} p_1 p_2 \ldots p_m$$

Wenn λ eine grosse Zahl ist, so kann man $J_\lambda^{(0)}$ durch die halbconvergirende Reihe, die ich a. a. O. entwickelt habe, mit weit geringerer Mühe berechnen, wie aus der oben angeführten, die stets convergirt.

Ich bemerke noch, dass diese JFunctionen in die Kategorie der hypergeometrischen Reihen gehören, die in den vorigen §§ vorkamen. Man findet leicht

$$J_\lambda^{(m)} = \frac{\lambda^m}{1.2..m} F\left(\nu, \nu, m+1, -\frac{\lambda^2}{\nu^2}\right)$$

wo ν eine unendlich grosse Zahl ist.

53.

Man kann $P_h^{(i)}$ und $Q_i^{(h)}$ auch durch andere Functionen ausdrücken, die in die Klasse derjenigen gehören, wovon ich in den folgenden §§ einen ausschliesslichen Gebrauch machen werde, und die man früher nicht gekannt zu haben scheint. Die Differentialgleichung (57) lässt sich wie folgt schreiben,

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y}(1-\beta y)\cdot\left(1-\frac{\beta}{y}\right)\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

wo wie früher

$$\beta = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi$$

ist. Substituirt man diese nebst (51) in die Gleichung

$$P_h^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^i z^{-h-1}\, dz$$

---

*) Es lässt sich leicht zeigen, dass die a. a. O. gegebenen Integrationsfactoren als JFunctionen definirt werden können, in welchen der obere Index keine ganze Zahl ist, wie er seiner ursprünglichen Bedeutung nach sein muss.

so entsteht

$$P_h^{(i)} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^{i-h-1} (1-\beta y)\left(1-\frac{\beta}{y}\right) c^{\mu\beta(y-y^{-1})}\, dy$$

wo

$$\mu = h \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi$$

ist. Der Coefficient von dy unter dem Integralzeichen lässt sich in folgende drei Factoren zerlegen,

$$y^{i-h-1}\;;\quad (1-\beta y)\, c^{\mu\beta y}\;;\quad (1-\beta y^{-1})\, c^{-\mu\beta y^{-1}}$$

von welchen der dritte aus dem zweiten entsteht, wenn man darin

$$\mu \text{ in } -\mu, \text{ und } y \text{ in } y^{-1}$$

verwandelt. Es ist aber

$$\begin{aligned}(1-\beta y)\, c^{\mu\beta y} &= (1-\beta y)\left\{1 + \mu\beta y + \frac{\mu^2}{2}\beta^2 y^2 + \frac{\mu^3}{2.3}\beta^3 y^3 + \text{etc.}\right\} \\ &= 1 - \beta y \\ &\quad + \mu\beta y - \mu\beta^2 y^2 \\ &\quad\quad + \frac{\mu^2}{2}\beta^2 y^2 - \frac{\mu^2}{2}\beta^3 y^3 \\ &\quad\quad\quad + \frac{\mu^3}{2.3}\beta^3 y^3 - \text{etc.}\end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned} A_1 &= -1 + \mu & B_1 &= 1 + \mu \\ A_2 &= -\mu + \frac{\mu^2}{2} & B_2 &= \mu + \frac{\mu^2}{2} \\ A_3 &= -\frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2.3} & B_3 &= \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2.3} \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \\ A_k &= -\frac{\mu^{k-1}}{2.3\ldots k-1}\left(1-\frac{\mu}{k}\right), & B_l &= \frac{\mu^{l-1}}{2.3\ldots l-1}\left(1+\frac{\mu}{l}\right) \\ &\text{etc.} & &\text{etc.} \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}(1-\beta y)\, c^{\mu\beta y} &= 1 + A_1 \beta y + A_2 \beta^2 y^2 + A_3 \beta^3 y^3 + \text{etc.} \\ (1-\beta y^{-1})\, c^{-\mu\beta y^{-1}} &= 1 - B_1 \frac{\beta}{y} + B_2 \frac{\beta^2}{y^2} - B_3 \frac{\beta^3}{y^3} \pm \text{etc.}\end{aligned}$$

und der eben angeführte Coefficient von dy unter dem Integralzeichen wird

$$\begin{aligned} &= \Sigma_0^\infty\, y^{i-h+k-1} \quad \{A_k \beta^k - A_{k+1} B_1 \beta^{k+2} + A_{k+2} B_2 \beta^{k+4} \mp \text{etc.}\} \\ &+ \Sigma_1^\infty (-1)^l\, y^{i-h-l-1} \{B_l \beta^l - B_{l+1} A_1 \beta^{l+2} + B_{l+2} A_2 \beta^{l+4} \mp \text{etc.}\}\end{aligned}$$

Zufolge des Satzes (54) bekommt man hieraus sogleich

1) wenn $h-i$ positiv ist,

$$P_h^{(i)} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, \{A_{h-i} \beta^{h-i} - A_{h-i+1} B_1 \beta^{h-i+2} + A_{h-i+2} B_2 \beta^{h-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

2) wenn $i-h$ positiv ist,

$$P_h^{(i)} = (-1)^{i-h} \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi \{B_{i-h}\beta^{i-h} - B_{i-h+1} A_1 \beta^{i-h+2} + B_{i-h+2} A_2 \beta^{i-h+4} \mp \text{etc.}\}$$

für $i = h$ sind beide Ausdrücke gleichbedeutend, und die oben bei den P Coefficienten gefundenen Ausnahmefälle sind hier in der allgemeinen Form enthalten. Durch Hülfe der Gleichung

$$Q_i^{(h)} = \frac{h}{i} P_h^{(i)}$$

bringt man die Q Coefficienten auf dieselbe Form, wo aber $i = 0$ einen Ausnahmefall bildet, in welchem der Werth von $Q_0^{(h)}$, welcher aus (55) folgt, stets angewandt werden muss.

Die Vergleichung der vorstehenden Ausdrücke für $P_h^{(i)}$ mit (56) giebt neue Ausdrücke für die J Functionen, die noch nirgends gegeben worden sind.

Es lassen sich noch mehr analoge Formen aufstellen, die ich aber weglasse, weil sie minder einfach sind, wie die obige, und ihre Ableitung dem Inhalt der folgenden §§ leicht entnommen werden kann.

54.

Um eine Relation zwischen drei P oder Q Coefficienten abzuleiten, gehe ich von der identischen Gleichung

$$d.z^h = hz^h \frac{dz}{z}$$

aus. Substituirt man hierin für $\frac{dz}{z}$ seinen Werth aus (57), so bekommt man

$$\frac{d.z^h}{dy} = h\frac{z^h}{y} - \frac{he}{2}z^h - \frac{he}{2}\frac{z^h}{y^2}$$

woraus vermittelst der Gleichungen

$$z^h = \Sigma Q_i^{(h)} y^i, \quad \frac{d.z^h}{dy} = \Sigma.i\, Q_i^{(h)} y^{i-1}$$

die folgende

$$0 = heQ_i^{(h)} - 2(h-i-1)\,Q_{i+1}^{(h)} + heQ_{i+2}^{(h)}$$

sogleich hervorgeht. Durch Anwendung der Gleichung

$$Q_i^{(h)} = \frac{h}{i} P_h^{(i)}$$

bekommt man hieraus

$$0 = \frac{he}{i} P_h^{(i)} - 2\frac{h-i-1}{i+1} P_h^{(i+1)} + \frac{he}{i+2} P_h^{(i+2)}$$

welche jedoch für $i = 0$ ihre Geltung verliert.

§ V.

Entwickelung der Cosinusse und Sinusse der Vielfachen der wahren Anomalien in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalie fortschreiten, und umgekehrt.

55.

Diese Aufgabe lässt sich erstlich aus dem Inhalt der § II und IV lösen. Dort hatten wir nemlich, wenn wir wieder die zur wahren, excentrischen und mittleren Anomalie gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen bez. mit x, y und z bezeichnen,

$$x^\mu = \Sigma R_i^{(\mu)} y^i$$
$$y^i = \Sigma P_h^{(i)} z^h$$

Multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, so bekommt man

$$x^\mu = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} C_h^{(\mu)} z^h$$

wo

$$C_h^{(\mu)} = R_0^{(\mu)} P_h^{(0)} + R_1^{(\mu)} P_h^{(1)} + R_2^{(\mu)} P_h^{(2)} + R_3^{(\mu)} P_h^{(3)} + \text{etc.}$$

Dieser Coefficient besteht also aus einer unendlichen Reihe von Producten, deren jedes aus zwei Factoren besteht. Dieses ist in der That die Form, die alle vorhergehenden Entwickelungen haben, die ich in jedem § aus dem Product zweier Factoren abgeleitet habe. In fast allen vorhergehenden Fällen bestand jeder der beiden Factoren eines jeden Gliedes der Coefficienten aus einem einzigen Gliede, und ich habe daher den Coefficienten selbst sogleich mit Einem Buchstaben bezeichnet. Nur in der, der vorstehenden analogen, Entwickelung des Art. 42 und in der Entwickelung des vorletzten Art. des vor. § bestand jeder Factor aus mehr wie Einem Gliede, weshalb der Coefficient zuletzt unter einer der obigen analogen Form dargestellt wurde.

Die beiden Factoren eines jeden Gliedes der Coefficienten können auf mannigfaltige Weise dargestellt und verändert werden, wie man im Vorhergehenden gesehen hat; es giebt aber ausser diesen eine neue Art, und zwar diejenige, wovon ich im vorletzten Art. des vor. § ein Beispiel gegeben habe, die ein neues Licht auf die Entwickelungen der Functionen des Radius Vectors und der Anomalien nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien wirft, indem sie diese Entwickelungen auf einen bisher noch nicht gekannten Grad von Einfachheit und Regelmässigkeit hinführt.

Auch diese neue Form ist, während sie im Ganzen dieselbe bleibt, in ihren einzelnen Theilen vielfacher Abänderungen fähig, von welchen ich im Folgenden nur die zunächst liegenden entwickeln werde.

56.

Sei wie oben

$$x^\mu = \Sigma\, C_i^{(\mu)}\, z^i$$

und dem entgegengesetzt

$$z^i = \Sigma\, D_\mu^{(i)}\, x^\mu.$$

Da die Differenz zwischen der wahren und mittleren Anomalie eine solche periodische Function ist, wie im Art. 17 allgemein angenommen wurde, so finden hier die Sätze der Artt. 19 und 20 statt. Es sind also alle C und D Coefficienten kleiner wie Eins, mit Ausnahme des dort bezeichneten Falles, in welchem sie gleich Eins werden. Da ferner hier augenscheinlich

$$C_{-i}^{(-\mu)} = C_i^{(\mu)} \text{ und } D_{-\mu}^{(-i)} = D_\mu^{(i)}$$

ist, so wird

$$D_\mu^{(i)} = \frac{i}{\mu}\, C_i^{(\mu)}$$

oder

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i}\, D_\mu^{(i)}$$

57.

Die D Coefficienten kann man erstlich ohne Integrationen finden. Es ist dem Vorhergehenden zufolge

$$z = y\, c^{-\frac{e}{2}\left\{y - \frac{1}{y}\right\}}$$

$$y = x\, \frac{1 + \frac{\beta}{x}}{1 + \beta x}$$

wo wieder $\beta = \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$ ist. Hieraus bekommt man

$$z^i = x^i\, \frac{\left(1 + \frac{\beta}{x}\right)^i}{(1 + \beta x)^i}\, c^{-\frac{ie}{2}\left\{\frac{x+\beta}{1+\beta x} - \frac{1+\beta x}{x+\beta}\right\}}$$

Um die Entwickelung dieser Function auf eine regelmässige Form hinzuführen, bemerke ich dass

$$(58) \qquad \frac{x+\beta}{1+\beta x} = \beta + (1-\beta^2)\, \frac{x}{1+\beta x}\,; \quad \frac{1+\beta x}{x+\beta} = \beta + (1-\beta^2)\, \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{\beta}{x}}$$

Substituirt man diese in dem Exponenten der vorstehenden Gleichung, so wird

$$z^i = x^i (1+\beta x)^{-i} (1+\beta x^{-1})^i \, c^{m\beta \left\{\frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}} - \frac{x}{1+\beta x}\right\}}$$

wo

$$m = \frac{ie(1-\beta^2)}{2\beta} = i \cos\varphi$$

gesetzt ist. Die rechte Seite dieser Gleichung lässt sich in drei Factoren zerlegen, nemlich in

$$x^i \; ; \quad (1+\beta x)^{-i} c^{-\frac{m\beta x}{1+\beta x}} \; ; \quad (1+\beta x^{-1})^i c^{\frac{m\beta x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}}$$

wovon der dritte aus dem zweiten entsteht, wenn man darin $-i$ statt i, $-m$ statt m, und x^{-1} statt x schreibt. Es ist nun

$$\begin{aligned}
(1+\beta x)^{-i} c^{-\frac{m\beta x}{1+\beta x}} &= (1+\beta x)^{-i} - (1+\beta x)^{-i-1} m\beta x + (1+\beta x)^{-i-2} \frac{m^2}{2} \beta^2 x^2 \mp \text{etc.} \\
&= 1 - \frac{i}{1} \beta x + \frac{i.i+1}{1.2} \beta^2 x^2 - \frac{i.i+1.i+2}{1.2.3} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\
&\quad - m\beta x + m \frac{i+1}{1} \beta^2 x^2 - m \frac{i+1.i+2}{1.2} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\
&\quad + \frac{m^2}{2} \beta^2 x^2 - \frac{m^2}{2} \frac{i+2}{1} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\
&\quad - \frac{m^3}{2.3} \beta^3 x^3 \pm \text{etc.} \\
&\quad \pm \text{etc.}
\end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M}_1 &= \frac{i}{1} + m \\
\mathfrak{M}_2 &= \frac{i.i+1}{1.2} + \frac{i+1}{1} m + \frac{m^2}{2} \\
\mathfrak{M}_3 &= \frac{i.i+1.i+2}{1.2.3} + \frac{i+1.i+2}{1.2} m + \frac{i+2}{1} \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3} \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} \\
\mathfrak{N}_1 &= \frac{i}{1} + m \\
\mathfrak{N}_2 &= \frac{i.i-1}{1.2} + \frac{i-1}{1} m + \frac{m^2}{2} \\
\mathfrak{N}_3 &= \frac{i.i-1.i-2}{1.2.3} + \frac{i-1.i-2}{1.2} m + \frac{i-2}{1} \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3} \\
&\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

so wird

$$(1+\beta x)^{-i} c^{-\frac{m\beta x}{1+\beta x}} = 1 - \mathfrak{M}_1 \beta x + \mathfrak{M}_2 \beta^2 x^2 - \mathfrak{M}_2 \beta^3 x^3 \pm \text{etc.}$$

$$(1+\beta x^{-1})^i c^{\frac{m\beta x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}} = 1 + \mathfrak{N}_1 \frac{\beta}{x} + \mathfrak{N}_2 \frac{\beta^2}{x^2} + \mathfrak{N}_3 \frac{\beta^3}{x^3} + \text{etc.}$$

und hieraus folgt sogleich, wenn man $\mu = i \pm k$ setzt,

$$D_{i+k}^{(i)} = (-1)^k \{\mathfrak{M}_k \beta^k - \mathfrak{M}_{k+1} \mathfrak{N}_1 \beta^{k+2} + \mathfrak{M}_{k+2} \mathfrak{N}_2 \beta^{k+4} \mp \text{etc.}\}$$
$$D_{i-k}^{(i)} = \{\mathfrak{N}_k \beta^k - \mathfrak{N}_{k+1} \mathfrak{M}_1 \beta^{k+2} + \mathfrak{N}_{k+2} \mathfrak{M}_2 \beta^{k+4} \mp \text{etc.}\}$$

wo k nie negativ genommen werden darf. Für $k = 0$ gelten beide Formeln. Um die entsprechenden Ausdrücke für die entgegengesetzte Entwickelung zu erhalten, braucht man nur die vorstehenden der D Coefficienten in die Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

zu substituiren, in welcher aber $i = 0$ eine Ausnahme macht.

58.

Um andere Ausdrücke zu erhalten, bemerke ich dass

$$D_\mu^{(i)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} z^i x^{-\mu-1} dx$$

Macht man in dieser die Grösse unter dem Integralzeichen durch die Gleichungen

$$z = yc^{-\frac{e}{2}\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$
$$x = y\,\frac{1-\beta y^{-1}}{1-\beta y}$$
$$dx = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta y)^2}\, dy$$

zur Function von y und dy, so wird

$$(59)\quad D_\mu^{(i)} = \frac{1-\beta^2}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^{i-\mu-1} (1-\beta y)^{\mu-1} (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{-n\beta(y-y^{-1})} dy$$

wo

$$n = i \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$

ist. Hier sind

$$y^{i-\mu-1}\ ;\quad (1-\beta y)^{\mu-1} c^{-n\beta y}\ ;\quad (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{n\beta y^{-1}}$$

die drei Factoren, von welchen der letzte in den zweiten übergeht, wenn man darin $-\mu$ statt μ, $-n$ statt n, und y^{-1} statt y schreibt. Da nun

$$\begin{aligned}
(1-\beta y)^{\mu-1} c^{-n\beta y} = 1 &- \frac{\mu-1}{1}\beta y + \frac{\mu-1.\mu-2}{1.2}\beta^2 y^2 - \frac{\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3}\beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\
&- n\beta y + n\frac{\mu-1}{1}\beta^2 y^2 - n\frac{\mu-1.\mu-2}{1.2}\beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\
&+ \frac{n^2}{2}\beta^2 y^2 - \frac{n^2}{2}\frac{\mu-1}{1}\beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\
&- \frac{n^3}{2.3}\beta^3 y^3 \pm \text{etc.} \\
&\pm \text{etc.}
\end{aligned}$$

ist, so wird wenn man

$$P_1 = \frac{\mu-1}{1} + n$$

$$P_2 = \frac{\mu-1.\mu-2}{1.2} + \frac{\mu-1}{1} n + \frac{n^2}{2}$$

$$P_3 = \frac{\mu-1.\mu-2.\mu-3}{1.2.3} + \frac{\mu-1.\mu-2}{1.2} n + \frac{\mu-1}{1}\frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2.3}$$

etc. etc.

$$Q_1 = \frac{\mu+1}{1} + n$$

$$Q_2 = \frac{\mu+1.\mu+2}{1.2} + \frac{\mu+1}{1} n + \frac{n^2}{2}$$

$$Q_3 = \frac{\mu+1.\mu+2.\mu+3}{1.2.3} + \frac{\mu+1.\mu+2}{1.2} n + \frac{\mu+1}{1}\frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2.3}$$

etc. etc.

setzt,

$$(1-\beta y)^{\mu-1} c^{-n\beta y} = 1 - P_1 \beta x + P_2 \beta^2 x^2 - P_3 \beta^3 x^3 \pm \text{etc.}$$

$$(1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{n\beta y^{-1}} = 1 + Q_1 \frac{\beta}{x} + Q_2 \frac{\beta^2}{x^2} + Q_3 \frac{\beta^3}{x^3} + \text{etc.}$$

Der Coefficient von dy unter dem Integralzeichen wird hiemit

$$= \Sigma_0^\infty (-1)^p y^{i-\mu+p-1} \{P_p \beta^p - P_{p+1} Q_1 \beta^{p+2} + P_{p+2} Q_2 \beta^{p+4} \mp \text{etc.}\}$$
$$+ \Sigma_1^\infty y^{i-\mu-q-1} \quad \{Q_q \beta^q - Q_{q+1} P_1 \beta^{q+2} + Q_{q+2} P_2 \beta^{q+4} \mp \text{etc.}\}$$

Hieraus folgt sogleich zufolge (54)

1) wenn $\mu - i$ positiv ist,

$$D_\mu^{(i)} = (-1)^{\mu-i}(1-\beta^2)\{P_{\mu-i}\beta^{\mu-i} - P_{\mu-i+1} Q_1 \beta^{\mu-i+2} + P_{\mu-i+2} Q_2 \beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

2) wenn $i - \mu$ positiv ist,

$$D_\mu^{(i)} = (1-\beta^2)\{Q_{i-\mu}\beta^{i-\mu} - Q_{i-\mu+1} P_1 \beta^{i-\mu+2} + Q_{i-\mu+2} P_2 \beta^{i-\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

Für $\mu = i$ gelten beide Formeln. Die Ausdrücke für $P_{\mu-i}$, $Q_{i-\mu}$, etc. bekommt man aus den obigen Ausdrücken für P_1, Q_1, etc. wie folgt

$$P_{\mu-i} = \frac{\mu-1.\mu-2\ldots i}{1.2..\mu-i} + \frac{\mu-1.\mu-2..i+1}{1.2..\mu-i-1} n + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu-1}{1}\frac{n^{\mu-i-1}}{2.3..\mu-i-1} + \frac{n^{\mu-i}}{2.3..\mu-i}$$

$$P_{\mu-i+1} = \frac{\mu-1.\mu-2..i-1}{1.2..\mu-i+1} + \frac{\mu-1.\mu-2..i}{1.2..\mu-i} n + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu-1}{1}\frac{n^{\mu-i}}{2.3..\mu-i} + \frac{n^{\mu-i+1}}{2.3..\mu-i+1}$$

etc. etc.

$$Q_{i-\mu} = \frac{\mu+1.\mu+2..i}{1.2..i-\mu} + \frac{\mu+1.\mu+2..i-1}{1.2..i-\mu-1}\, n + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu+1}{1}\,\frac{n^{i-\mu-1}}{2.3..i-\mu-1} + \frac{n^{i-\mu}}{2.3..i-\mu}$$

$$Q_{i-\mu+1} = \frac{\mu+1.\mu+2..i+1}{1.2..i-\mu+1} + \frac{\mu+1.\mu+2..i}{1.2..i-\mu}\, n + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\mu+1}{1}\,\frac{n^{i-\mu}}{2.3..i-\mu} + \frac{n^{i-\mu+1}}{2.3..i-\mu+1}$$

etc. etc.

Durch Anwendung der Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

nehmen die C Coëfficienten mit Ausnahme von $i = 0$ auch diese Form an.

59.

Durch eine kleine Veränderung des Exponenten von c in der Gleichung (59) kann man eine dritte Form zu Wege bringen. Addirt und subtrahirt man nemlich zu diesem Exponenten n, so wird

$$D_\mu^{(i)} = \frac{1-\beta^2}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c^{-n\sqrt{-1}}}^{c^{+n\sqrt{-1}}} y^{i-\mu-1} (1-\beta y)^{\mu-1} (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{n(1-\beta y)} c^{-n(1-\beta y^{-1})} dy$$

wo die drei Factoren

$$y^{i-\mu-1}\,;\quad (1-\beta y)^{\mu-1} c^{n(1-\beta y)}\,;\quad (1-\beta y^{-1})^{-\mu-1} c^{-n(1-\beta y^{-1})}$$

sind. Auf dieselbe Art wie vorher findet man nun den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen

$$= \Sigma_0^\infty (-1)^p y^{i-\mu+p-1} \{ R_p S_0 \beta^p - R_{p+1} S_1 \beta^{p+2} + R_{p+2} S_2 \beta^{p+4} \mp \text{etc.} \}$$
$$+ \Sigma_1^\infty y^{i-\mu-q-1} \{ S_q R_0 \beta^q - S_{q+1} R_1 \beta^{q+2} + S_{q+2} R_2 \beta^{q+4} \mp \text{etc.} \}$$

wo

$$R_0 = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{2.3} + \text{etc.} = c^n$$
$$R_1 = \frac{\mu-1}{1} + \frac{\mu}{1} n + \frac{\mu+1}{1}\frac{n^2}{2} + \text{etc.}$$
$$R_2 = \frac{\mu-1.\mu-2}{1.2} + \frac{\mu.\mu-1}{1.2} n + \frac{\mu+1.\mu}{1.2}\frac{n^2}{2} + \text{etc.}$$

etc.

$$S_0 = 1 - n + \frac{n^2}{2} - \frac{n^3}{2.3} \pm \text{etc.} = c^{-n}$$
$$S_1 = \frac{\mu+1}{1} - \frac{\mu}{1} n + \frac{\mu-1}{1}\frac{n^2}{2} \mp \text{etc.}$$
$$S_2 = \frac{\mu+1.\mu+2}{1.2} - \frac{\mu.\mu+1}{1.2} n + \frac{\mu-1.\mu}{1.2}\frac{n^2}{2} \mp \text{etc.}$$

etc.

Es wird daher

1) wenn $\mu - i$ positiv ist,

$$D_\mu^{(i)} = (-1)^{\mu-i}(1-\beta^2)\{R_{\mu-i}S_0\beta^{\mu-i} - R_{\mu-i+1}S_1\beta^{\mu-i+2} + R_{\mu-i+2}S_2\beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

2) wenn $i - \mu$ positiv ist,

$$D_\mu^{(i)} = (1-\beta^2)\{S_{i-\mu}R_0\beta^{i-\mu} - S_{i-\mu+1}R_1\beta^{i-\mu+2} + S_{i-\mu+2}R_2\beta^{i-\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

und vermöge der Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

nehmen die C Coefficienten, wieder mit Ausnahme von $i = 0$, auch diese Form an, welche sich unter andern von den beiden vorhergehenden Formen darin unterscheidet, dass die R und S unendliche Reihen sind, während in jenen die analogen Coefficienten endliche Ausdrücke sind.

60.

Es wären noch die Ausnahmefälle $C_0^{(\mu)}$ der vorhergehenden Analyse zu entwickeln, allein wenn wir statt dessen $C_i^{(\mu)}$ allgemein auf eine der vorhergehenden analoge Art behandeln, so werden wir auf noch drei andere Formen hingeführt, die auch die D Coefficienten, vermittelst der Gleichung

$$D_\mu^{(i)} = \frac{i}{\mu} C_i^{(\mu)}$$

jedoch mit Ausnahme von $\mu = 0$, annehmen.

Aus der Gleichung

$$x^\mu = \Sigma C_i^{(\mu)} z^i$$

ergiebt sich

$$C_i^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} x^\mu z^{-i-1}\, dz \tag{60}$$

Die obigen Relationen zwischen x, y und z geben

$$\frac{dz}{z} = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2}(1+\beta x)^{-2}(1+\beta x^{-1})^{-2}\frac{dx}{x}$$

substituirt man diese, so wie

$$z = x(1+\beta x)^{-1}(1+\beta x^{-1})\, c^{m\beta\left\{\frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}} - \frac{x}{1+\beta x}\right\}}$$

so wird

$$C_i^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2}\int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} x^{\mu-i-1}(1+\beta x)^{i-2}(1+\beta x^{-1})^{-i-2}\, c^{m\beta\left\{\frac{x}{1+\beta x} - \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}\right\}}\, dx \tag{61}$$

wo wie oben $m = i \cos \varphi$ ist. Die drei Factoren sind hier

$$x^{\mu-i-1}\;; \quad (1+\beta x)^{i-2}\, c^{m\beta \frac{x}{1+\beta x}}\;; \quad (1+\beta x^{-1})^{-i-2}\, c^{-m\beta \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}}$$

Setzt man nun

$$T_1 = \frac{i-2}{1} + m$$

$$T_2 = \frac{i-2\,.\,i-3}{1\,.\,2} + \frac{i-3}{1} m + \frac{m^2}{2}$$

etc.

$$T_k = \frac{i-2\,.\,i-3\,..\,i-k-1}{1\,.\,2\,...\,k} + \frac{i-3\,.\,i-4\,..\,i-k-1}{1\,.\,2\,...\,k-1} m + \,..\, + \frac{i-k-1}{1} \frac{m^{k-1}}{2\,.\,3\,..\,k-1} + \frac{m^k}{2\,.\,3\,..\,k}$$

etc.

$$U_1 = \frac{i+2}{1} + m$$

$$U_2 = \frac{i+2\,.\,i+3}{1\,.\,2} + \frac{i+3}{1} m + \frac{m^2}{2}$$

etc.

$$U_l = \frac{i+2\,.\,i+3\,..\,i+l+1}{1\,.\,2\,...\,l} + \frac{i+3\,.\,i+4\,..\,i+l+1}{1\,.\,2\,..\,l-1} m + \,..\, + \frac{i+l+1}{1} \frac{m^{l-1}}{2\,.\,3\,..\,l-1} + \frac{m^l}{2\,.\,3\,..\,l}$$

etc.

dann wird der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen

$$= \Sigma_0^\infty\, x^{\mu-i+k-1} \quad \{T_k \beta^k - T_{k+1} U_1 \beta^{k+2} \pm \text{etc.}\}$$

$$+ \Sigma_1^\infty\, (-1)^l x^{\mu-i-l-1} \{U_l \beta^l - U_{l+1} T_1 \beta^{l+2} \pm \text{etc.}\}$$

und hiemit

1) wenn $i-\mu$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} \{T_{i-\mu} \beta^{i-\mu} - T_{i-\mu+1} U_1 \beta^{i-\mu+2} + T_{i-\mu+2} U_2 \beta^{i-\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

2) wenn $\mu-i$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = (-1)^{\mu-i} \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} \{U_{\mu-i} \beta^{\mu-i} - U_{\mu-i+1} T_1 \beta^{\mu-i+2} + U_{\mu-i+2} T_2 \beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

welches die vierte Form ist.

61.

Um eine fünfte Form zu erhalten, mache ich durch die Gleichungen

$$x = y\, \frac{1-\beta y^{-1}}{1-\beta y}$$

$$z = y c^{-\frac{e}{2}(y - y^{-1})}$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} (1-\beta y)(1-\beta y^{-1}) \cos^2 \tfrac{1}{2}\varphi$$

die Grösse unter dem Integralzeichen der Gleichung (60) zur Function von y und dy. Es kommt

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^{\mu-i-1} (1-\beta y)^{-\mu+1} (1-\beta y^{-1})^{\mu+1} c^{n\beta(y-y^{-1})} dy$$

wo wie oben $n = i\cos^2\frac{1}{2}\varphi$ ist. Die drei Factoren

$$y^{\mu-i-1}\ ;\quad (1-\beta y)^{-\mu+1} c^{n\beta y}\ ;\quad (1-\beta y^{-1})^{\mu+1} c^{-n\beta y^{-1}}$$

geben durch ähnliche Entwickelung wie oben den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen

$$= \Sigma_0^\infty\, y^{\mu-i+k-1} \quad \{K_k\,\beta^k - K_{k+1}\,L_1\,\beta^{k+2} \pm \text{etc.}\}$$
$$+ \Sigma_1^\infty (-1)^l\, y^{\mu-i-l-1} \{L_l\,\beta^l - L_{l+1}\,K_1\,\beta^{l+2} \pm \text{etc.}\}$$

wo

$$K_1 = \frac{\mu-1}{1} + n$$

$$K_2 = \frac{\mu-1.\mu}{1.2} + \frac{\mu-1}{1} n + \frac{n^2}{2}$$

etc.

$$K_k = \frac{\mu-1.\mu\ldots\mu+k-2}{1.2..k} + \frac{\mu-1.\mu..\mu+k-3}{1.2..k-1} n + \ldots + \frac{\mu-1}{1}\,\frac{n^{k-1}}{2.3..k-1} + \frac{n^k}{2.3..k}$$

etc.

$$L_1 = \frac{\mu+1}{1} + n$$

$$L_2 = \frac{\mu+1.\mu}{1.2} + \frac{\mu+1}{1} n + \frac{n^2}{2}$$

etc.

$$L_l = \frac{\mu+1.\mu..\mu-l+2}{1.2..l} + \frac{\mu+1.\mu..\mu-l+3}{1.2..l-1} n + \ldots + \frac{\mu+1}{1}\,\frac{n^{l-1}}{2.3..l-1} + \frac{n^l}{2.3..l}$$

etc.

und hieraus ergiebt sich

1) wenn $i-\mu$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\, \{K_{i-\mu}\beta^{i-\mu} - K_{i-\mu+1}\,L_1\,\beta^{i-\mu+2} + K_{i-\mu+2}\,L_2\,\beta^{i-\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

2). wenn $\mu-i$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = (-1)^{\mu-i}\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\{L_{\mu-i}\beta^{\mu-i} - L_{\mu-i+1}K_1\beta^{\mu-i+2} + L_{\mu-i+2}K_2\beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.}\}$$

62.

Um eine sechste Form zu erhalten, füge ich wieder dem Exponenten von c die Grösse $n-n$ hinzu. Dadurch werden die drei Factoren unter dem Integralzeichen der Gleichung des vor. Art.

$$y^{\mu-i-1}\;;\quad (1-\beta y)^{-\mu+1}\,c^{-n(1-\beta y)}\;;\quad (1-\beta y^{-1})^{\mu+1}\,c^{n(1-\beta y^{-1})}$$

und der Coefficient von dy unter dem Integralzeichen

$$= \Sigma_0^\infty\; y^{\mu-i+k-1} \quad \{ G_k H_0 \beta^k - G_{k+1} H_1 \beta^{k+2} \pm \text{etc.} \}$$
$$+ \Sigma_1^\infty\; (-1)^l y^{\mu-i-l-1} \{ H_l G_0 \beta^l - H_{l+1} G_1 \beta^{l+2} \pm \text{etc.} \}$$

wo

$$G_0 = 1 - n + \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.} = c^{-n}$$
$$G_1 = \frac{\mu-1}{1} - \frac{\mu-2}{1} n + \frac{\mu-3}{1} \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.}$$
$$G_2 = \frac{\mu-1.\mu}{1.2} - \frac{\mu-2.\mu-1}{1.2} n + \frac{\mu-3.\mu-2}{1.2} \frac{n^2}{2} \mp \text{etc.}$$

etc.

$$H_0 = 1 + n + \frac{n^2}{2} + \text{etc.} = c^n$$
$$H_1 = \frac{\mu+1}{1} + \frac{\mu+2}{1} n + \frac{\mu+3}{1} \frac{n^2}{2} + \text{etc.}$$
$$H_2 = \frac{\mu+1.\mu}{1.2} + \frac{\mu+2.\mu+1}{1.2} n + \frac{\mu+3.\mu+2}{1.2} \frac{n^2}{2} + \text{etc.}$$

etc.

Es folgt hieraus

1) wenn $i - \mu$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi \{ G_{i-\mu} H_0 \beta^{i-\mu} - G_{i-\mu+1} H_1 \beta^{i-\mu+2} + G_{i-\mu+2} H_2 \beta^{i-\mu+4} \pm \text{etc.} \}$$

2) wenn $\mu - i$ positiv ist,

$$C_i^{(\mu)} = (-1)^{\mu-i} \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi \{ H_{\mu-i} G_0 \beta^{\mu-i} - H_{\mu-i+1} G_1 \beta^{\mu-i+2} + H_{\mu-i+2} G_2 \beta^{\mu-i+4} \mp \text{etc.} \}$$

wo, wie in der dritten Form, die G und H Coefficienten unendliche Reihen sind.

Diese sechs Formen mögen hier gnügen, obgleich man noch mehrere geben könnte.

63.

Die Ausnahmefälle, die die Uebergangsformel

$$i\,C_i^{(\mu)} = \mu D_\mu^{(i)}$$

darbietet, verdienen eine besondere Betrachtung. Setzt man $i = k$ in dem Ausdruck für $D_{i-k}^{(i)}$ des Art. 57, so wird

$$D_0^{(i)} = \mathfrak{N}_i \beta^i - \mathfrak{N}_{i+1} \mathfrak{M}_1 \beta^{i+2} + \mathfrak{N}_{i+2} \mathfrak{M}_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.}$$

wo

$$\mathfrak{N}_i \;= 1 + m + \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3} + \ldots + \frac{m^i}{2.3..i}$$

$$\mathfrak{N}_{i+1} = \frac{m^{i+1}}{2.3..i+1}$$

$$\mathfrak{N}_{i+2} = -\mathfrak{N}_{i+1}\left(1 - \frac{m}{i+2}\right)$$

$$\mathfrak{N}_{i+3} = \quad \mathfrak{N}_{i+1}\left(1 - 2\frac{m}{i+2} + \frac{m^2}{i+2.i+3}\right)$$

etc.

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{i}{1} + m$$

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{i.i+1}{1.2} + \frac{i+1}{1}m + \frac{m^2}{2}$$

etc.

Setzt man $\mu = 0$ in dem zweiten Ausdruck für $D_\mu^{(i)}$ des Art. 58, so ergiebt sich

$$D_0^{(i)} = (1-\beta^2)\{Q_i\beta^i - Q_{i+1}P_1\beta^{i+2} + Q_{i+2}P_2\beta^{i+4} \mp \text{etc.}\}$$

wo

$$Q_i \;= 1 + n + \frac{n^2}{2} + \ldots + \frac{n^i}{2.3\ldots i}$$

$$Q_{i+1} = Q_i \quad + \frac{n^{i+1}}{2.3..i+1}$$

$$Q_{i+2} = Q_{i+1} + \frac{n^{i+2}}{2.3..i+2}$$

etc.

$$P_1 = -1 + n$$

$$P_2 = -P_1 + \frac{n^2}{2}$$

$$P_3 = -P_2 + \frac{n^3}{2.3}$$

etc.

Setzt man endlich $\mu = 0$ in dem zweiten Ausdruck für $D_\mu^{(i)}$ des Art. 59, so kommt

$$D_0^{(i)} = (1-\beta^2)\{S_i R_0 \beta^i - S_{i+1} R_1 \beta^{i+2} + S_{i+2} R_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.}\}$$

wo

$$S_i = 1 - (-1)^i \quad \frac{n^{i+1}}{2.3..i+1}\left\{1 - \frac{i+1}{i+2}n + \frac{i+1}{i+3}\frac{n^2}{2} - \frac{i+1}{i+4}\frac{n^3}{2.3} \pm \text{etc.}\right\}$$

$$S_{i+1} = 1 - (-1)^{i+1}\frac{n^{i+2}}{2.3..i+2}\left\{1 - \frac{i+2}{i+3}n + \frac{i+2}{i+4}\frac{n^2}{2} - \frac{i+2}{i+5}\frac{n^3}{2.3} \pm \text{etc.}\right\}$$

etc.

$$R_0 = c^n$$

$$R_1 = -1 + \frac{n^2}{2}\left\{1 + \frac{2}{3}n + \frac{2}{4}\frac{n^2}{2} + \frac{2}{5}\frac{n^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

$$R_2 = \quad 1 + \frac{n^3}{2.3}\left\{1 + \frac{3}{4}n + \frac{3}{5}\frac{n^2}{2} + \frac{3}{6}\frac{n^3}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

etc.

Ich werde weiter unten auf diese Ausdrücke zurückkommen.

64.

Setzt man in den Ausdrücken für $C_i^{(\mu)}$ der Artt. 60, 61 und 62 $i = 0$, so wird vor Allem

$$m = 0\,, \quad n = 0$$

und man bekommt

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2}\{U_\mu \beta^\mu - U_{\mu+1} T_1 \beta^{\mu+1} + U_{\mu+2} T_2 \beta^{\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

wo

$$U_\mu = \mu + 1\,,\; U_{\mu+1} = \mu + 2\,,\; U_{\mu+2} = \mu + 3\,,\; \text{etc.}$$
$$T_1 = -2\,,\; T_2 = 3\,,\; T_3 = -4\,,\; \text{etc.}$$

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\{L_\mu \beta^\mu - L_{\mu+1} K_1 \beta^{\mu+2} + L_{\mu+2} K_2 \beta^{\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

wo

$$L_\mu = \mu + 1\,,\; L_{\mu+1} = 1\,,\; L_{\mu+2} = 0\,,\; \text{etc.}$$
$$K_1 = \mu - 1\,,\; K_2 = \tfrac{1}{2}\mu(\mu - 1)\,;\; \text{etc.}$$

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\{H_\mu G_0 \beta^\mu - H_{\mu+1} G_1 \beta^{\mu+2} + H_{\mu+2} G_2 \beta^{\mu+4} \mp \text{etc.}\}$$

wo

$$H_\mu = \mu + 1\,,\; H_{\mu+1} = 1\,,\; H_{\mu+2} = 0\,,\; \text{etc.}$$
$$G_0 = 1\,,\; G_1 = \mu - 1\,,\; G_2 = \tfrac{1}{2}\mu(\mu - 1)\,;\; \text{etc.}$$

Die beiden letzten dieser Ausdrücke sind identisch, und geben für $C_0^{(\mu)}$ einen endlichen Ausdruck, welcher nach der Substitution der Factoren so steht

$$(62)\quad C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu \beta^\mu \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\{\mu + 1 - (\mu - 1)\beta^2\} = (-1)^\mu \beta^\mu (1 + \mu \cos\varphi)$$

Man kann diesen Ausdruck auch auf andere Art finden. Setzt man $i = 0$ in die Gleichung (61), so wird

$$C_0^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} x^{\mu-1}(1+\beta x)^{-2}(1+\beta x^{-1})^{-2}\,dx$$

Aber zufolge des § I ist

$$\varrho = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2}(1+\beta x)^{-1}(1+\beta x^{-1})^{-1}$$

Substituirt man diesen Werth, so wird weil

$$\cos\varphi = \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2}$$

ist,

$$C_0^{(\mu)} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}.\cos\varphi}\int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} \varrho^2\, x^{\mu-1}\, dx$$

Diese Gleichung zeigt, dass $C_0^{(\mu)}\cos\varphi$ gleich dem Coefficienten von x^μ oder von $x^{-\mu}$ in der Entwickelung von ϱ^2 nach den Potenzen von x ist. Alle für diesen Coefficienten im § I entwickelten, verschiedenen Formen kann man also hier nach und nach substituiren. Diese Coefficienten wurden dort allgemein mit $V_{\pm i}^{(n)}$ bezeichnet, setzt man also darin $n = 2$ und $\pm i = \mu$, so wird überhaupt

$$C_0^{(\mu)} = \frac{V_\mu^{(2)}}{\cos\varphi}$$

Um hieraus den oben gefundenen endlichen Ausdruck wieder zu erhalten, braucht man nur den Ausdruck (17) zu substituiren. Dieser wird in unserm Falle

$$V_\mu^{(2)} = (-1)^\mu(1+\mu)\beta^\mu\frac{\cos\varphi}{1+\beta^2}F(\mu-1, -1, \mu+1, \beta^2)$$

Schreibt man hierin die FFunction aus, und substituirt in die vorhergehende Gleichung, so wird

$$C_0^{(\mu)} = (-1)^\mu\frac{\beta^\mu}{1+\beta^2}\{\mu+1-(\mu-1)\beta^2\}$$

welche wegen $1+\beta^2 = \sec^2\frac{1}{2}\varphi$ mit (62) identisch ist.

63.

Ausserdem will ich noch die Functionen

$$\cos\mu(\varepsilon-g) \text{ und } \sin\mu(\varepsilon-g),$$

wo μ eine beliebige Zahl ist, in Reihen entwickeln, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der wahren Anomalie fortschreiten. Gehen wir zu den imaginären Exponentialfunctionen über, so kommen wir auf die Function $\left(\frac{y}{z}\right)^\mu$, die nach den ganzen Potenzen von x zu entwickeln ist. Sei daher

$$\left(\frac{y}{z}\right)^\mu = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} E_i^{(\mu)} x^i$$

wo i nothwendiger Weise eine ganze Zahl ist. Die Gleichungen

$$z = y c^{-\frac{e}{2}(y - y^{-1})}$$

$$y = \frac{x+\beta}{1+\beta x}$$

geben hier

$$\frac{y}{z} = c^{\frac{e}{2}\left\{\frac{x+\beta}{1+\beta x} - \frac{1+\beta x}{x+\beta}\right\}}$$

Erhebt man diese Gleichung Seite für Seite zur Potenz μ, und nimmt auf die Gleichungen (58) Rücksicht, so wird

$$\left(\frac{y}{z}\right)^{\mu} = c^{\frac{m\beta x}{1+\beta x}} \cdot c^{-\frac{m\beta x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}}$$

wo $m = \mu \cos\varphi$ ist.

Behandelt man diese Gleichung eben so wie die vorhergehenden, und setzt

$$F_1 = m$$

$$F_2 = -m + \frac{m^2}{2}$$

$$F_3 = m - 2\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3}$$

etc.

$$G_1 = m$$

$$G_2 = m + \frac{m^2}{2}$$

$$G_3 = m + 2\frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{2.3}$$

etc.

so erhält man

1) für die positiven Werthe von i,

$$E_i^{(\mu)} = F_i\,\beta^i - F_{i+1}\,G_1\,\beta^{i+2} + F_{i+2}\,G_2\,\beta^{i+4} \mp \text{etc.}$$

2) für die negativen Werthe von i,

$$E_i^{(\mu)} = (-1)^i\{G_i\,\beta^i - G_{i+1}\,F_1\,\beta^{i+2} + G_{i+2}\,F_2\,\beta^{i+4} \mp \text{etc.}\}$$

Für $i = 0$ gelten beide Ausdrücke.

Die F und G Coefficienten können hier durch das folgende Verfahren gebildet werden. Sei

$$\frac{m^2}{2} = m_1\,, \quad \frac{m^3}{2.3} = m_2\,, \quad \frac{m^4}{2.3.4} = m_3\,, \quad \text{etc.}$$

Man schreibe die Zahlenwerthe von m, m_1, etc. unter einander und bilde wie gewöhnlich die Differenzreihen der verschiedenen Ordnungen, nemlich nach folgendem Schema

$$\begin{array}{lllll}
m & & & & \\
 & m_1 - m = \alpha & & & \\
m_1 & & \beta - \alpha = \alpha_1 & & \\
 & m_2 - m_1 = \beta & & \beta_1 - \alpha_1 = \alpha_2 & \\
m_2 & & \gamma - \beta = \beta_1 & & \beta_2 - \alpha_2 = \alpha_3 \text{ etc.} \\
 & m_3 - m_2 = \gamma & & \gamma_1 - \beta_1 = \beta_2 & \text{etc.} \\
m_3 & & \delta - \gamma = \gamma_1 & \text{etc.} & \\
 & m_4 - m_3 = \delta & \text{etc.} & & \\
m_4 & \text{etc.} & & & \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}$$

dann ist

$$\alpha = F_2,\ \alpha_1 = F_3,\ \alpha_2 = F_4,\ \text{etc.}$$

Bildet man eben so die Summen, nemlich

$$\begin{array}{lllll}
m & & & & \\
 & m_1 + m = a & & & \\
m_1 & & b + a = a_1 & & \\
 & m_2 + m_1 = b & & b_1 + a_1 = a_2 & \\
m_2 & & c + b = b_1 & & b_2 + a_2 = a_3 \text{ etc.} \\
 & m_3 + m_2 = c & & c_1 + b_1 = b_2 & \text{etc.} \\
m_3 & & d + c = c_1 & \text{etc.} & \\
 & m_4 + m_3 = d & \text{etc.} & & \\
m_4 & \text{etc.} & & & \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}$$

so wird

$$a = G_2,\ a_1 = G_3,\ a_2 = G_4,\ \text{etc.}$$

66.

Zwischen den C und D Coefficienten lassen sich nicht so einfache, und wie es scheint, auch nicht so viele, endliche Relationen angeben, wie zwischen den der vor. §§. Ich werde hier nur Eine Relation zwischen fünf dieser Coefficienten ableiten. Es ist

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\cos\varphi}{\varrho^2}\,\frac{x}{z}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{x^{-2}\sin^2\varphi + 4x^{-1}\sin\varphi + 4 + 2\sin^2\varphi + 4x\sin\varphi + x^2\sin^2\varphi}{4\cos^4\varphi}$$

Substituirt man diese in die identische Gleichung

$$d.x^\mu = \mu x^\mu \frac{dx}{x}$$

so kommt

$$z\frac{d.x^\mu}{dz} = \mu \frac{x^{\mu-2}\sin^2\varphi + 4x^{\mu-1}\sin\varphi + (4+2\sin^2\varphi)x^\mu + 4x^{\mu+1}\sin\varphi + x^{\mu+2}\sin^2\varphi}{4\cos^2\varphi}$$

und wenn die Gleichungen

$$x^\mu = \Sigma C_i^{(\mu)} z^i, \quad \frac{d.x^\mu}{dz} = \Sigma\, i\, C_i^{(\mu)} z^{i-1}$$

berücksichtigt werden,

$$0 = \mu\sin^2\varphi\, C_i^{(\mu-2)} + 4\mu\sin\varphi\, C_i^{(\mu-1)} + \{\mu(4+2\sin^2\varphi) - 4i\cos^2\varphi\}\, C_i^{(\mu)}$$
$$+ 4\mu\sin\varphi\, C_i^{(\mu+1)} + \mu\sin^2\varphi\, C_i^{(\mu+2)}$$

Durch Hülfe der Gleichung

$$C_i^{(\mu)} = \frac{\mu}{i} D_\mu^{(i)}$$

bekommt man hieraus

$$0 = (\mu-2)\sin^2\varphi\, D_{\mu-2}^{(i)} + 4(\mu-1)\sin\varphi\, D_{\mu-1}^{(i)} + \{\mu(4+2\sin^2\varphi) - 4i\cos^2\varphi\} D_\mu^{(i)}$$
$$+ 4(\mu+1)\sin\varphi\, D_{\mu+1}^{(i)} + (\mu+2)\sin^2\varphi\, D_{\mu+2}^{(i)}$$

wo $i = 0$ keine Ausnahme macht.

---

§ VI.

Entwickelung der Functionen $\varrho^n \cos mf$ und $\varrho^n \sin mf$ in Reihen, die nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreiten.

67.

Diese Aufgabe kann schon durch den Inhalt der vorhergehenden §§ auf zwei Arten gelöst werden. Im § I wurde $\varrho^n x^m$ in eine nach den Potenzen von x fortschreitende Reihe verwandelt, und im § V wurden die Potenzen von x in Reihen verwandelt, die nach den Potenzen von z fortschreiten. Die Verbindung dieser beiden Aufgaben giebt eine Auflösung der gegenwärtigen. Es wurde gefunden

$$\varrho^n x^m = \Sigma V_i^{(n)} x^{m\pm i}$$
$$x^\mu = \Sigma C_i^{(\mu)} z^i$$

multiplicirt man diese beiden Reihen mit einander, so ergiebt sich, nachdem

$$\varrho^n x^m = \Sigma_{-\infty}^{+\infty} X_i^{n,m} z^i$$

gesetzt worden ist,

$$X_i^{n,m} = V_0^{(n)} C_i^{(m)} + V_1^{(n)} C_i^{(m+1)} + V_2^{(n)} C_i^{(m+2)} + \text{etc.}$$
$$+ V_1^{(n)} C_i^{(m-1)} + V_2^{(n)} C_i^{(m-2)} + \text{etc.}$$

68.

Die zweite Auflösung ergiebt sich aus dem Inhalt der §§ III und IV. Dort wurde

$$\varrho^n x^m = \Sigma W_i^{n,m} y^i$$
$$y^i = \Sigma P_h^{(i)} z^h$$

gefunden, und die Multiplication dieser beiden Reihen mit einander giebt

$$X_h^{n,m} = W_0^{n,m} P_h^{(0)} + W_1^{n,m} P_h^{(1)} + W_2^{n,m} P_h^{(2)} + \text{etc.}$$
$$+ W_{-1}^{n,m} P_h^{(-1)} + W_{-2}^{n,m} P_h^{(-2)} + \text{etc.}$$

69.

Ausser diesen beiden Auflösungen lässt sich eine einfache directe Auflösung auf ähnliche Art wie die des vor. § finden, und mehrere der dort gefundenen Formen werden sich als specielle Fälle der hier zu entwickelnden darstellen. Vermittelst des oft angewandten Satzes wird

$$X_i^{n,m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} \varrho^n x^m z^{-i-1} dz \qquad (63)$$

und diese geht durch die Substitution der Gleichungen

$$\varrho = \frac{(1-\beta^2)^2}{1+\beta^2} (1+\beta x)^{-1} (1+\beta x^{-1})^{-1}$$
$$z = yc^{-\frac{e}{2}(y-y^{-1})}$$
$$y = x \frac{1+\beta x^{-1}}{1+\beta x}$$
$$\frac{dz}{z} = \frac{(1-\beta^2)^3}{1+\beta^2} (1+\beta x)^{-2} (1+\beta x^{-1})^{-2} \frac{dx}{x}$$

in folgende über

$$X_i^{n,m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} x^{m-i-1} (1+\beta x)^{-n+i-2} (1+\beta x^{-1})^{-n-i-2} c^{\mu\beta\left\{\frac{x}{1+\beta x} - \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}\right\}}$$

wo $\mu = i \cos\varphi$ ist. Der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen lässt sich wieder in die folgenden drei Factoren zerlegen,

$$x^{n-i-1}\,;\quad (1+\beta x)^{-n+i-2}\, c^{\mu\beta \frac{x}{1+\beta x}}\,;\quad (1+\beta x^{-1})^{-n-i-2}\, c^{-\mu\beta \frac{x^{-1}}{1+\beta x^{-1}}}$$

Da nun die Reihenentwickelung

$$\begin{aligned}(1+\beta x)\, c^{\mu\beta \frac{x}{1+\beta x}} = 1 &- \tfrac{n-i+2}{1}\beta x + \tfrac{n-i+2.\,n-i+3}{1.\,2}\beta^2 x^2 \mp \text{etc.}\\ &+ \mu\beta x - \mu\tfrac{n-i+3}{1}\beta^2 x^2 \pm \text{etc.}\\ &+ \tfrac{\mu^2}{2}\beta^2 x^2 \mp \text{etc.}\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

giebt, so wird wenn man

$$\mathfrak{M}_1 = \tfrac{n-i+2}{1} - \mu$$

$$\mathfrak{M}_2 = \tfrac{n-i+2.\,n-i+3}{1.\,2} - \tfrac{n-i+3}{1}\mu + \tfrac{\mu^2}{2}$$

$$\mathfrak{M}_3 = \tfrac{n-i+2.\,n-i+3.\,n-i+4}{1.\,2.\,3} - \tfrac{n-i+3.\,n-i+4}{1.\,2}\mu + \tfrac{n-i+4}{1}\tfrac{\mu^2}{2} - \tfrac{\mu^3}{2.\,3}$$

etc.

$$\begin{aligned}\mathfrak{M}_p = \tfrac{n-i+2.\,n-i+3\,..\,n-i+p+1}{1.\,2\,...\,p} &- \tfrac{n-i+3.\,n-i+4\,..\,n-i+p+1}{1.\,2\,..\,p-1}\mu \pm ..\\ &\pm \tfrac{n-i+p+1}{1}\tfrac{\mu^{p-1}}{2.\,3\,..\,p-1} \mp \tfrac{\mu^p}{2.\,3\,..\,p}\end{aligned}$$

etc.

$$\mathfrak{N}_1 = \tfrac{n+i+2}{1} + \mu$$

$$\mathfrak{N}_2 = \tfrac{n+i+2.\,n+i+3}{1.\,2} + \tfrac{n+i+3}{1}\mu + \tfrac{\mu^2}{2}$$

$$\mathfrak{N}_3 = \tfrac{n+i+2.\,n+i+3.\,n+i+4}{1.\,2.\,3} + \tfrac{n+i+3.\,n+i+4}{1.\,2}\mu + \tfrac{n+i+4}{1}\tfrac{\mu^2}{2} + \tfrac{\mu^3}{2.\,3}$$

etc.

$$\begin{aligned}\mathfrak{N}_q = \tfrac{n+i+2.\,n+i+3\,..\,n+i+q+1}{1.\,2\,..\,q} &+ \tfrac{n+i+3.\,n+i+4\,..\,n+i+q+1}{1.\,2\,...\,q-1}\mu + ..\\ &+ \tfrac{n+i+q+1}{1}\tfrac{\mu^{q-1}}{2.\,3\,..\,q-1} + \tfrac{\mu^q}{2.\,3\,..\,q}\end{aligned}$$

etc.

setzt, der Coefficient von dx unter dem Integralzeichen

$$\begin{aligned}&= \Sigma_0^\infty (-1)^p x^{n-i+p-1}\{\mathfrak{M}_p \beta^p + \mathfrak{M}_{p+1}\mathfrak{N}_1 \beta^{p+2} + \mathfrak{M}_{p+2}\mathfrak{N}_2 \beta^{p+4} + \text{etc.}\}\\ &+ \Sigma_1^\infty (-1)^q x^{n-i-q-1}\{\mathfrak{N}_q \beta^q + \mathfrak{N}_{q+1}\mathfrak{M}_1 \beta^{q+2} + \mathfrak{N}_{q+2}\mathfrak{M}_2 \beta^{q+4} + \text{etc.}\}\end{aligned}$$

und hieraus folgt auf dieselbe Art wie oben

1) wenn $i-m$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{i-m} \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \{\mathfrak{M}_{i-m}\beta^{i-m} + \mathfrak{M}_{i-m+1}\mathfrak{N}_1\beta^{i-m+2} + \mathfrak{M}_{i-m+2}\mathfrak{N}_2\beta^{i-m+4} + \text{etc.}\}$$

2) wenn $m-i$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{m-i} \frac{(1-\beta^2)^{2n+3}}{(1+\beta^2)^{n+1}} \{\mathfrak{N}_{m-i}\beta^{m-i} + \mathfrak{N}_{m-i+1}\mathfrak{M}_1\beta^{m-i+2} + \mathfrak{N}_{m-i+2}\mathfrak{M}_2\beta^{m-i+4} + \text{etc.}\}$$

Für $m=i$ gelten beide Ausdrücke. Es ist zu bemerken, dass die Auflösung des Art. 60 des vor. § ein specieller Fall dieser ist, welcher daraus hervorgeht, wenn man $n=0$ macht.

70.

Eine andere Form erhält man, wenn man in der Gleichung (63) die Grösse unter dem Integralzeichen durch die Gleichungen

$$\varrho = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,(1-\beta y)(1-\beta y^{-1})$$

$$x = y\,\frac{1-\beta y^{-1}}{1-\beta y}$$

$$z = y c^{-\frac{e}{2}(y-y^{-1})}$$

$$\frac{dz}{z} = \cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\frac{dy}{y}\,(1-\beta y)(1-\beta y^{-1})$$

zur Function von y und dy macht. Man erhält dadurch

$$X_i^{n,m} = \frac{\cos^{2(n+1)}\frac{1}{2}\varphi}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} y^{m-i-1}(1-\beta y)^{n-m+1}(1-\beta y^{-1})^{n+m+1} c^{\nu\beta(y-y^{-1})}\,dy \quad (64)$$

wo $\nu = i\cos^2\frac{1}{2}\varphi$ ist. Zerlegt man erst den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen in die folgenden drei Factoren

$$y^{m-i-1}\;;\quad (1-\beta y)^{n-m+1} c^{-\nu(1-\beta y)}\;;\quad (1-\beta y^{-1})^{n+m+1} c^{\nu(1-\beta y^{-1})}$$

so wird derselbe nach der Entwickelung

$$= \Sigma_0^\infty (-1)^p y^{m-i+p-1}\{G_p H_0 \beta^p + G_{p+1} H_1 \beta^{p+2} + \text{etc.}\}$$
$$+ \Sigma_1^\infty (-1)^q y^{m-i-q-1}\{H_q G_0 \beta^q + H_{q+1} G_1 \beta^{q+2} + \text{etc.}\}$$

wo

$$G_0 = c^{-\nu}, \quad H_0 = c^{\nu}$$

und ausserdem allgemein

$$G_p = \frac{n-m+1 \,.\, n-m \,..\, n-m-p+2}{1\,.\,2\,...\,p} - \frac{n-m+2 \,.\, n-m+1 \,...\, n-m-p+3}{1\,.\,2\,...\,p}\,\nu$$
$$+ \frac{n-m+3 \,.\, n-m+2 \,...\, n-m-p+4}{1\,.\,2\,...\,p} \,.\, \frac{\nu^2}{2} \mp \text{etc.}$$

$$H_q = \frac{n+m+1 \,.\, n+m \,...\, n+m-q+2}{1\,.\,2\,....\,q} + \frac{n+m+2 \,.\, n+m+1 \,...\, n+m-q+3}{1\,.\,2\,...\,q}\,\nu$$
$$+ \frac{n+m+3 \,.\, n+m+2 \,...\, n+m-q+4}{1\,.\,2\,...\,q} \,.\, \frac{\nu^2}{2} + \text{etc.}$$

Es folgt hieraus auf dieselbe Art wie oben

1) wenn $i-m$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{i-m} \cos^{2(n+1)} \tfrac{1}{2}\varphi \,\{G_{i-m} H_0 \beta^{i-m} + G_{i-m+1} H_1 \beta^{i-m+2} + G_{i-m+2} H_2 \beta^{i-m+4} + \text{etc.}\}$$

2) wenn $m-i$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{m-i} \cos^{2(n+1)} \tfrac{1}{2}\varphi \,\{H_{m-i} G_0 \beta^{m-i} + H_{m-i+1} G_1 \beta^{m-i+2} + H_{m-i+2} G_2 \beta^{m-i+4} + \text{etc.}\}$$

Von dieser Form ist die des Art. 62 ein specieller Fall, welcher durch die Annahme $n = 0$ entsteht.

71.

Noch eine andere Form ergiebt sich, wenn man den Coefficienten von dy unter dem Integralzeichen in (64) in folgende Factoren auflöst.

$$y^{m-i-1}\,; \quad (1-\beta y)^{n-m+1} e^{\nu y}\,; \quad (1-\beta y^{-1})^{n+m+1} e^{-\nu y^{-1}}$$

Derselbe wird nun nach der Entwickelung

$$= \Sigma_0^\infty (-1)^p y^{m-i+p-1} \{P_p \beta^p + P_{p+1} Q_1 \beta^{p+2} + \text{etc.}\}$$
$$+ \Sigma_1^\infty (-1)^q y^{m-i-q-1} \{Q_q \beta^q + Q_{q+1} P_1 \beta^{q+2} + \text{etc.}\}$$

wo

$$P_1 = \frac{n-m+1}{1} - \nu$$

$$P_2 = \frac{n-m+1 \,.\, n-m}{1\,.\,2} - \frac{n-m+1}{1}\,\nu + \frac{\nu^2}{2}$$

$$P_3 = \frac{n-m+1 \,.\, n-m \,.\, n-m-1}{1\,.\,2\,.\,3} - \frac{n-m+1 \,.\, n-m}{1\,.\,2}\,\nu + \frac{n-m+1}{1}\,\frac{\nu^2}{2} - \frac{\nu^3}{2\,.\,3}$$

etc.

$$P_p = \frac{n-m+1 \,.\, n-m \,..\, n-m-p+2}{1\,.\,2\,..\,p} - \frac{n-m+1 \,.\, n-m \,..\, n-m-p+3}{1\,.\,2\,..\,p-1}\,\nu \pm \,..$$
$$... \pm \frac{n-m+1}{1}\,\frac{\nu^{p-1}}{2\,.\,3\,..\,p-1} \mp \frac{\nu^p}{2\,.\,3\,...\,p}$$

etc.

$$Q_1 = \frac{n+m+1}{1} + \nu$$

$$Q_2 = \frac{n+m+1 . n+m}{1 . 2} + \frac{n+m+1}{1}\nu + \frac{\nu^2}{2}$$

$$Q_3 = \frac{n+m+1 . n+m . n+m-1}{1 . 2 . 3} + \frac{n+m+1 . n+m}{1 . 2}\nu + \frac{n+m+1}{1}\frac{\nu^2}{2} + \frac{\nu^3}{2.3}$$

etc.

$$Q_q = \frac{n+m+1 . n+m \,.\,.\, n+m-q+2}{1 . 2 \,.\,.\, q} + \frac{n+m+1 . n+m \,.\,.\, n+m-q+3}{1 . 2 \,.\,.\, q-1}\nu + \ldots$$

$$\ldots + \frac{n+m+1}{1}\frac{\nu^{q-1}}{2 . 3 \,.\,.\, q-1} + \frac{\nu^q}{2 . 3 \,.\,.\, q}$$

etc.

ist, und hieraus folgt

1) wenn $i-m$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{i-m}\cos^{2(n+1)}\tfrac{1}{2}\varphi\,\{P_{i-m}\beta^{i-m} + P_{i-m+1}Q_1\beta^{i-m+2} + P_{i-m+2}Q_2\beta^{i-m+4} + \text{etc.}\}$$

2) wenn $m-i$ positiv ist,

$$X_i^{n,m} = (-1)^{m-i}\cos^{2(n+1)}\tfrac{1}{2}\varphi\,\{Q_{m-i}\beta^{m-i} + Q_{m-i+1}P_1\beta^{m-i+2} + Q_{m-i+2}P_2\beta^{m-i+4} + \text{etc.}\}$$

wovon die Form des Art. 61 ein specieller Fall ist, welcher durch die Annahme $n=0$ entsteht.

Ich füge hinzu, dass man noch mehr Formen angeben könnte, muss es aber, um diese Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, bei den vorstehenden bewenden lassen. Ich bemerke noch, dass die Coefficienten P, Q, etc. dieses § sich durch ähnliche Algorithmen berechnen lassen, wie die des Art. 65.

72.

Der Fall $i=0$ führt Vereinfachung mit sich. Setzt man $i=0$ in die Gleichung (63), so wird

$$X_0^{n,m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} \varrho^n x^m \frac{dz}{z}$$

Aber es ist

$$\frac{dz}{z} = \frac{\varrho^2}{\cos\varphi}\frac{dx}{x}$$

also

$$X_0^{n,m} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}.\cos\varphi}\int_{c-\pi\sqrt{-1}}^{c+\pi\sqrt{-1}} \varrho^{n+2} x^m \frac{dx}{x}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass $X_0^{n,m}$ dem mit $\cos\varphi$ dividirten Coefficienten von x^{-m} in der Entwickelung von ϱ^{n+2} nach den Potenzen von x gleich

ist. Dieser Coefficient wurde im § I allgemein mit $V_m^{(n+2)}$ bezeichnet, und es ist also

$$X_0^{n,m} = \frac{V_m^{(n+2)}}{\cos\varphi}$$

worauf die im § I gegebenen, verschiedenen Formen der V Coefficienten nach Belieben angewandt werden können.

Von diesem Ausdruck ist wieder der im Art. 64 abgeleitete ein specieller Fall.

73.

Aus der Analyse dieses § geht die unerwartet einfache Auflösung des *Keppler*'schen Problems hervor, die ich schon veröffentlicht habe, und die sich als ein specieller Fall der hier behandelten Aufgabe darstellt. Da

$$(65) \qquad f = \int \frac{\cos\varphi}{\varrho^2}\, dg$$

ist, so kommt es für die Erlangung des Ausdrucks der Mittelpunktsgleichung nur auf die Entwickelung von ϱ^{-2} nach den Potenzen von z an. Setzt man nun

1) $n = -2$ und $m = 0$ in die Formeln des Art. 69, so wird, wenn man zugleich die Zeichen der mit ungradem Index versehenen $\mathfrak{M}$ Coefficienten umkehrt,

$$\mathfrak{M}_i = 1 + \mu + \frac{\mu^2}{2} + \frac{\mu^3}{2.3} + \ldots + \frac{\mu^i}{2.3\ldots i}$$

$$\mathfrak{M}_{i+1} = \frac{\mu^{i+1}}{2.3\ldots i+1}$$

$$\mathfrak{M}_{i+2} = -\mathfrak{M}_{i+1}\left(1 - \frac{\mu}{i+2}\right)$$

$$\mathfrak{M}_{i+3} = \mathfrak{M}_{i+1}\left(1 - 2\frac{\mu}{i+2} + \frac{\mu^2}{i+2.i+3}\right)$$

$$\mathfrak{M}_{i+4} = -\mathfrak{M}_{i+1}\left(1 - 3\frac{\mu}{i+2} + 3\frac{\mu^2}{i+2.i+3} - \frac{\mu^3}{i+2.i+3.i+4}\right)$$

etc.

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{i}{1} + \mu$$

$$\mathfrak{N}_2 = \frac{i.i+1}{1.2} + \frac{i+1}{1}\mu + \frac{\mu^2}{2}$$

etc.

$$X_i^{-2,0} = \frac{1+\beta^2}{1-\beta^2}\{\mathfrak{M}_i\beta^i - \mathfrak{M}_{i+1}\mathfrak{N}_1\beta^{i+2} \pm \text{etc.}\}$$

Substituirt man nun diesen Ausdruck in die Gleichung

$$\varrho^{-2} = \Sigma X_i^{-2,0} z^i$$

und diesen in (65), geht zum Reellen über und integrirt, so wird

$$f-g = \Sigma_1^\infty \tfrac{2}{i} \{\mathfrak{M}_i \beta^i - \mathfrak{M}_{i+1} \mathfrak{N}_1 \beta^{i+2} + \mathfrak{M}_{i+2} \mathfrak{N}_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.}\} \sin ig$$

Eine andere Auflösung findet man, wenn man

2) $n = -2$ und $m = 0$ in die Formeln des Art. 70 setzt. Kehrt man zugleich die Zeichen der G Coefficienten um, deren Index ungrade ist, so wird

$$G_i = 1 - (-1)^i \frac{\nu^{i+1}}{2.3\ldots i+1} \left\{1 - \tfrac{i+1}{i+2}\nu + \tfrac{i+1}{i+3}\tfrac{\nu^2}{2} \mp \text{etc.}\right\}$$

$$G_{i+1} = 1 - (-1)^{i+1} \frac{\nu^{i+2}}{2.3\ldots i+2} \left\{1 - \tfrac{i+2}{i+3}\nu + \tfrac{i+2}{i+4}\tfrac{\nu^2}{2} \mp \text{etc.}\right\}$$

etc.

$$H_0 = e^\nu$$

$$H_1 = -1 + \tfrac{\nu^2}{2}\left\{1 + \tfrac{2}{3}\nu + \tfrac{2}{4}\tfrac{\nu^2}{2} + \text{etc.}\right\}$$

$$H_2 = \quad 1 + \tfrac{\nu^3}{2.3}\left\{1 + \tfrac{3}{4}\nu + \tfrac{3}{5}\tfrac{\nu^2}{2} + \text{etc.}\right\}$$

etc.

$$X_i^{-2,0} = (1+\beta^2)\{G_i H_0 \beta^i - G_{i+1} H_1 \beta^{i+2} + G_{i+2} H_2 \beta^{i+4} \mp \text{etc.}\}$$

woraus auf dieselbe Art wie oben

$$f-g = (1-\beta^2)\, \Sigma_1^\infty \tfrac{2}{i} \{G_i H_0 \beta^i - G_{i+1} H_1 \beta^{i+2} \pm \text{etc.}\} \sin ig$$

folgt. Setzt man

3) $n = -2$ und $m = 1$ in die Formeln des Art. 71 und kehrt zugleich die Zeichen aller mit ungradem Index versehenen P und Q Coefficienten um, so entsteht

$$P_i = 1 + \nu + \tfrac{\nu^2}{2} + \ldots + \tfrac{\nu^i}{2.3\ldots i}$$

$$P_{i+1} = P_i + \tfrac{\nu^{i+1}}{2.3\ldots i+1}$$

$$P_{i+2} = P_{i+1} + \tfrac{\nu^{i+2}}{2.3\ldots i+2}$$

etc.

$$Q_1 = 1 - \nu$$

$$Q_2 = Q_1 + \tfrac{\nu^2}{2}$$

$$Q_3 = Q_2 - \tfrac{\nu^3}{2.3}$$

etc.

und hiemit

$$f - g = (1-\beta^2)\,\Sigma_1^\infty \tfrac{2}{i}\{P_i\beta^i + P_{i+1}Q_1\beta^{i+2} + P_{i+2}Q_2\beta^{i+4} + \text{etc.}\}\sin ig$$

Jede dieser drei Auflösungen des *Keppler*'schen Problems ist bei Weitem einfacher wie die vorher bekannten, und besonders die letzte lässt an Einfachheit nichts zu wünschen übrig.

Vergleicht man die im Art. 63 abgeleiteten Werthe der Coefficienten $D_0^{(i)}$ mit dem Vorstehenden, so zeigt sich, dass sie den Coefficienten der Mittelpunktsgleichung gleich sind. Man darf daher nicht hoffen, sie auf endliche Ausdrücke hinführen zu können, wie im Art. 64 bei den Coefficienten $C_0^{(\mu)}$ möglich wurde.

Ueber die Convergenz der in diesem und in dem vorhergehenden § vorkommenden unendlichen Reihen habe ich noch nichts gesagt. Man findet aber leicht, dass sie alle für jeden Werth von μ und i, so wie für alle Werthe von $\beta < 1$, also auch für alle Werthe von

$$e < 1$$

convergiren.

74.

Um Relationen zwischen den X Coefficienten abzuleiten, bediene ich mich wieder der oben mehrmals angewandten Methode. In die identische Gleichung

$$z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = x^m z\frac{d.\varrho^n}{dz} + \varrho^n z\frac{d.x^m}{dz}$$

substituire ich in die Gleichungen

$$z\frac{d.\varrho^n}{dz} = \frac{n\sin\varphi}{2\cos\varphi}\varrho^{n-1}\left(\frac{1}{x} - x\right)$$

$$z\frac{d.x^m}{dz} = m\cos\varphi\,\varrho^{-2}x^m$$

Hieraus entsteht

$$(66)\qquad z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = \frac{n\sin\varphi}{2\cos\varphi}\varrho^{n-1}(x^{m-1} - x^{m+1}) + m\cos\varphi\,\varrho^{n-2}x^m$$

Diese lässt sich auf mehrfache Art durch den Ausdruck von ϱ durch x, nemlich durch

$$\sin\varphi(x^{-1} + x) - 2\cos^2\varphi\,\varrho^{-1} + 2 = 0$$

verändern. Multiplicirt man nemlich diese Gleichung nach und nach mit

$$\pm\frac{n\varrho^{n-1}x^m}{2\cos\varphi} \quad\text{und}\quad \frac{m\varrho^{n-1}x^m}{2\cos\varphi}$$

und addirt die Producte zur rechten Seite von (66), so erhält man

$$z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = \frac{n\sin\varphi}{\cos\varphi}\varrho^{n-1}x^{m-1} + (m-n)\cos\varphi\,\varrho^{n-2}x^m + \frac{n}{\cos\varphi}\varrho^{n-1}x^m \qquad (67)$$

$$z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = -\frac{n\sin\varphi}{\cos\varphi}\varrho^{n-1}x^{m+1} + (m+n)\cos\varphi\,\varrho^{n-2}x^m - \frac{n}{\cos\varphi}\varrho^{n-1}x^m \qquad (68)$$

$$z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = \frac{(n+m)\sin\varphi}{2\cos\varphi}\varrho^{n-1}x^{m-1} - \frac{(n-m)\sin\varphi}{2\cos\varphi}\varrho^{n-1}x^{m+1} + \frac{m}{\cos\varphi}\varrho^{n-1}x^m \qquad (69)$$

welche Gleichungen zwischen vier X Coefficienten geben werden. Multiplicirt man die rechte Seite von (69) mit

$$\frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}\varrho(x^{-1}+x) + \frac{\varrho}{\cos^2\varphi} = 1$$

so entsteht

$$\begin{aligned} z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = {} & \frac{(n+m)\sin^2\varphi}{4\cos^2\varphi}\varrho^n x^{m-2} + \frac{(n+2m)\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}\varrho^n x^{m-1} \\ & + \frac{2m+m\sin^2\varphi}{2\cos^2\varphi}\varrho^n x^m \\ & - \frac{(n-2m)\sin\varphi}{2\cos^2\varphi}\varrho^n x^{m+1} - \frac{(n-m)\sin^2\varphi}{4\cos^2\varphi}\varrho^n x^{m+2} \end{aligned} \qquad (70)$$

welche eine Gleichung zwischen fünf X Coefficienten geben wird.

Differentiirt man die Gleichungen (67) und (68), so bekommt man leicht

$$\begin{aligned} z^2\frac{d^2.\varrho^n x^m}{dz^2} + z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = {} & [n(n-2)+m^2]\cos^2\varphi\,\varrho^{n-4}x^m - n(2n-3)\varrho^{n-3}x^m \\ & + n(n-1)\varrho^{n-2}x + m(n-1)\sin\varphi\,\varrho^{n-3}(x^{m-1}-x^{m+1}) \end{aligned} \qquad (71)$$

und hieraus ergeben sich durch Hülfe der Gleichung

$$\sin\varphi(x^{-1}+x) - 2\cos^2\varphi\,\varrho^{-1} + 2 = 0$$

die folgenden beiden

$$\begin{aligned} \frac{d^2.\varrho^n x^m}{dz^2} + z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = {} & [n(n-2)+m^2-2m(n-1)]\cos^2\varphi\,\varrho^{n-4}x^m - [n(2n-3)-2m(n-1)]\varrho^{n-3}x^m \\ & + n(n-1)\varrho^{n-2}x^m + 2m(n-1)\sin\varphi\,\varrho^{n-3}x^{m-1} \end{aligned} \qquad (7$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2.\varrho^n x^m}{dz^2} + z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = {} & [n(n-2)+m^2+2m(n-1)]\cos^2\varphi\,\varrho^{n-4}x^m - [n(2n-3)+2m(n-1)]\varrho^{n-3}x^m \\ & + n(n-1)\varrho^{n-2}x^m - 2m(n-1)\sin\varphi\,\varrho^{n-3}x^{m+1} \end{aligned} \qquad (73)$$

Substituirt man nun die Gleichungen

$$\varrho^n x^m = \Sigma X_i^{n,m} z^i$$

$$z\frac{d.\varrho^n x^m}{dz} = \Sigma i.X_i^{n,m} z^i$$

$$z^2\frac{d^2.\varrho^n x^m}{dz^2} = \Sigma i(i-1) X_i^{n,m} z^i$$

in die Gleichungen (66) bis (73), so bekommt man die folgenden Relationen,

ENTWICKELUNG DER NEGATIVEN UND UNGRADEN POTENZEN DER QUADRATWURZEL DER FUNCTION $r^2+r'^2-2rr'(\cos U\cos U'+\sin U\sin U'\cos J)$.

Die Entwickelung der Potenzen der in der Ueberschrift genannten Function ist an sich von besonderem, mathematischen Interesse, weil sie zu den schwierigsten Aufgaben gehört, und auf merkwürdige Formen hinführt. Die negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel derselben haben ausserdem ein hohes Interesse, weil sie in der Mechanik des Himmels allenthalben erscheinen, sowohl in der Theorie der Bewegung der Himmelskörper um einander, wie in der um ihre Axen, und nicht minder in der Theorie der Figur derselben. Die Entwickelung der Potenz $-\frac{1}{2}$ dieser Function, welche vorzugsweise in den genannten Theorien erscheint, ist namentlich in zwei verschiedenen Formen behandelt worden. Für die Anwendung auf die Theorie der Bewegung der Himmelskörper um einander, für welche U und U' die Argumente der Breite irgend zweier Körper bedeuten, während r und r' die Radii Vectoren, und J die gegenseitige Neigung der Bahnen ist, hat man sie sonst immer in eine Reihe entwickelt, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien fortschreitet. Ich habe sie für diesen Zweck in den «Absoluten Störungen in Ellipsen von beliebiger Excentricität und Neigung» für den einen Körper nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der excentrischen Anomalie, und in meiner Pariser Preissschrift nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen anderer Bögen oder Winkel, die ich partielle Anomalien nenne, entwickelt. Die zweite Form, die man der Entwickelung der in Rede stehenden Function gegeben hat, ist die nach den Potenzen von r und r' geordnete, welche vorzugsweise in der Theorie der Rotation und der Figur der Himmelskörper zur Anwendung kommt. In den «Absoluten Störungen etc.» habe ich, um die beabsichtigte Form zu erhalten, erst die Entwickelung nach den Potenzen von r und r' vorgenom-

men, und bin dadurch dahin gelangt, die Berechnung der Entwickelungscoefficienten überhaupt in sehr kurzer Zeit ausführen zu können.

Spätere Untersuchungen haben mich überzeugt, dass in vielen Fällen diese Art der Entwickelung dieser Function auf weit kürzere Arbeit bei der Berechnung der numerischen Coefficienten hinführt, wie alle anderen bisher bekannten Verfahrungsarten. Wenn r und r' so beschaffen sind, dass ihr Verhältniss der Eins nahe kommen kann, dann wird dieses Verfahren freilich nicht mehr kurz, aber es ist schon nicht mehr unbequem, wenn $r:r'$ zwischen 0,5 und 0,6 liegt, und kann selbst immer noch mit Nutzen bei Werthen dieses Verhältnisses angewandt werden, die etwas grösser sind. Ist hingegen der grösste Werth desselben kleiner wie 0,5, so wird es schon beträchtlich kürzer, und überhaupt um desto kürzer, je kleiner der grösste Werth dieses Verhältnisses ist. Diese Entwickelungsart wird sich daher mit Nutzen bei der Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten, die jetzt in so grosser Menge auftauchen, anwenden lassen; eine Berechnung, die dringend nothwendig wird, um nicht den einen oder andern derselben wieder verloren gehen zu lassen.

Namentlich für diese Planeten bietet die genannte Entwickelungsart wesentliche Rechenvortheile dar, die in dem Umstande ihren Grund haben, dass die störenden Planeten immer dieselben sind. Es kann nemlich ein nicht unbeträchtlicher Theil der Rechnung ein für alle Mal ausgeführt werden, weil die numerischen Werthe der bezüglichen Coefficienten von den Elementen der Planetenbahnen unabhängig sind. Ein anderer, auch nicht unbedeutender, Theil kann deshalb ein für alle Mal ausgeführt werden, weil es blos von den Excentricitäten der Bahnen der störenden Planeten abhängt, so dass schliesslich bei der Anwendung auf einen speciellen Fall nur die dritte Abtheilung der Rechnung auszuführen ist, welche von den Elementen der Bahn des gestörten Planeten abhängt. Die ins Einzelne gehende Auseinandersetzung dieses Verfahrens und die Anwendung desselben auf ein Beispiel muss ich indess einer anderen Abhandlung vorbehalten, wovon ich schon einen Theil ausgearbeitet habe.

Die Entwickelung der in Rede stehenden Function nach den Potenzen von r und r' ist schon längst auf eine elegante Form gebracht worden, allein diese kann hier nicht angewendet werden, da in derselben die Glieder grade die entgegengesetzte Form haben, deren man

zum oben genannten Zwecke bedarf. Sie sind nemlich nach den Potenzen der Sinusse und Cosinusse von U und U', und nach den Cosinussen der Vielfachen von J geordnet, während wir sie nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von U und U', und nach den Potenzen des Sinus oder Cosinus von J haben müssen, weil U und U' die Argumente der Breiten, und J die gegenseitige Neigung der Bahnen des störenden und gestörten Planeten bedeuten.

Eine Entwickelung dieser Art ist noch nirgends gegeben worden; die welche ich hier gebe, hat daher auch, abgesehen von ihrer astronomischen Anwendung, das rein mathematische Interesse, dass sie die Coefficienten von r und r' in einer neuen, bisher unbekannten Form darstellt. Der allgemeine Ausdruck, den ich für diese Coefficienten erhalten habe, ist sehr einfach, er besteht für die positiven und negativen Coefficienten abgesondert aus einem einzigen Gliede, und ist eine Function von Factoriellen, oder mit andern Worten Function der Gaussischen Π Functionen mit Argumenten, die ganze und positive Zahlen sind. Aus diesem Ausdruck setzen sich die Coefficienten der Cosinusse der Vielfachen von U und U' dergestalt zusammen, dass sie ganze und rationale Functionen von $\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}J$ sind. Die numerischen Werthe der Coefficienten derselben sind bis zur 21. Potenz von r berechnet und dieser Abhandlung angehängt. Die Berechnung selbst habe ich ausgeführt, und Hr. Dr. *Scheibner* hat die Controllen derselben nach Anleitung des Art. 26 berechnet.

Da die ganze Entwickelung strenge ausgeführt ist, so gilt sie für jeden Werth von J, aber da die Coefficienten der höheren Potenzen von $\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}J$ bedeutend gross werden, während die ganze und rationale Function, welcher sie angehören, nur bedeutend kleinere Werthe annehmen kann, so wird ihre Anwendung in dieser Form beschwerlich, wenn J eine gewisse Grösse übersteigt. Da man sie jedoch noch ohne Unbequemlichkeit für die grösste jetzt bekannte, in unserm Planetensystem vorkommende, Neigung — die der Pallasbahn von ohngefähr 35° — anwenden kann, so hätte ich mich mit derselben begnügen können, aber um auch Formeln für den nicht undenkbaren Fall zu geben, dass Planeten mit grösseren Neigungen bekannt werden sollten, habe ich mehrere Umformungen damit vorgenommen. Es zeigt sich leicht, dass diese ganze und rationale Function, abgesehen von einem allgemeinen Factor, welcher hervortritt, in die Classe der Gaussischen hypergeometrischen

Reihen gehört, und dass folglich die Umformungen, deren diese Reihen fähig sind, hierauf angewandt werden können.

Bei den Formen, die ich hier beabsichtigte dieser Reihe zu geben, trat das Bedürfniss hervor sie in Fällen, wofür man bis jetzt keine Summenformeln hatte (namentlich im Falle wo das vierte Element $= -1$ wird) summiren zu müssen, und dieser Umstand veranlasste eigene Untersuchungen über die Summation dieser hypergeometrischen Reihe, und gab Veranlassung zum Inhalt des ersten Paragraphen dieser Abhandlung. Man darf hierin daher nicht eine vollständige Abhandlung über die Summation dieser Reihen erwarten, sondern nur die Summation derselben in den Fällen, die im zweiten Paragraphen zur Anwendung kommen. Ausser diesem wird man jedoch, darin mehrere neue Summationsformeln, die sich mir in dieser Untersuchung gelegentlich darboten, so wie einen neuen allgemeinen Ausdruck finden, der eine weit allgemeinere Benutzung zuzulassen scheint, wie die, die ich hier daraus gezogen habe.

Während im grössten Verlaufe des zweiten Paragraphen die Entwickelung der Potenz $-\frac{1}{2}$ der Eingangs genannten Function ausgeführt wird, zeige ich am Schlusse, nachdem ich die Formeln zum Uebergang zu den Coefficienten der Cosinusse und Sinusse der Vielfachen der wahren Anomalien entwickelt habe, wie man davon zu der Entwickelung der Potenzen $-\frac{3}{2}$, $-\frac{5}{2}$, etc. der genannten Function übergehen kann. Der dritte §. endlich behandelt kurz ein paar Formen, die ich nicht glaubte mit Stillschweigen übergehen zu dürfen.

§ I.

Von der Summation der Gaussischen hypergeometrischen Reihe.

1.

Euler hat (*Inst. calc. integr.* Vol. II. probl. 134) durch ein sehr elegantes, in späteren Schriften oft nachgeahmtes, Verfahren eine hypergeometrische Reihe summirt, die der Gaussischen (*Disquisitiones ca. ser. infinit.*) analog ist, und auf diese hingeführt werden kann. Eulers Resultat umfasst aber nicht alle Fälle, auf welche es bezogen werden kann, sondern ist einer Erweiterung fähig, von welcher ich hier das Wesentlichste entwickeln werde. Sei die Reihe

$$\psi(x) = 1 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + a_3 b_3 x^3 + \dots$$

zu summiren, in welcher a_1, a_2, etc. irgend welche numerische Coefficienten, und

$$b_1 = \frac{\beta}{\gamma},\ b_2 = \frac{\beta.\beta+1}{\gamma.\gamma+1},\ b_3 = \frac{\beta.\beta+1.\beta+2}{\gamma.\gamma+1.\gamma+2},\ \text{etc.}$$

sind. Sei ferner

$$\varphi(xu) = 1 + a_1 xu + a_2 x^2 u^2 + a_3 x^3 u^3 + \ldots$$

Wenn nun P irgend eine Function von u, und a und b ohne Indices zwei beliebige Grössen bezeichnen, dann ist identisch

$$\int_a^b P\varphi(xu)\,du = \int_a^b Pdu\,(1 + a_1 xu + a_2 x^2 u^2 + a_3 x^3 u^3 + \ldots)$$

Stellt man hierauf die folgenden Gleichungen auf

$$\int_a^b Pu\,du = b_1 \int_a^b Pdu$$

$$\int_a^b Pu^2\,du = b_2 \int_a^b Pdu$$

$$\int_a^b Pu^3\,du = b_3 \int_a^b Pdu$$

etc.

und substituirt sie in die vorstehende identische Gleichung, so wird

$$\int_a^b P\varphi(xu)\,du = (1 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + a_3 b_3 x^3 + \ldots)\int_a^b Pdu$$

woraus sogleich

$$\psi(x) = \frac{\int_a^b P\varphi(xu)\,du}{\int_a^b Pdu} \tag{1}$$

folgt, in welcher Gleichung noch die Function P und die Grenzen a und b der Integrale zu bestimmen sind.

2.

Die oben aufgestellten Gleichungen geben

$$\int_a^b Pu\,du = b_1 \int_a^b Pdu$$

$$b_1 \int_a^b Pu^2\,du = b_2 \int_a^b Pu\,du$$

$$b_2 \int_a^b Pu^3\,du = b_3 \int_a^b Pu^2\,du$$

etc.

also überhaupt

$$b_{i-1} \int_a^b Pu^i\,du = b_i \int_a^b Pu^{i-1}\,du$$

Die obigen Ausdrücke für b_1, b_2, etc. geben aber allgemein

$$b_i = \frac{\beta . \beta+1 \ldots \beta+i-1}{\gamma . \gamma+1 \ldots \gamma+i-1}$$

es wird daher

$$(2) \qquad (\gamma+i-1)\int_a^b Pu^i du = (\beta+i-1)\int_a^b Pu^{i-1} du$$

wo im Allgemeinen die ganze und positive Zahl i von 1 bis ∞ ausgedehnt werden muss. Sei durch die unbestimmte Integration

$$(\gamma+i-1)\int Pu^i du = (\beta+i-1)\int Pu^{i-1} du + Qu^i$$

erlangt, wo Q auch eine Function von u ist. Bestimmt man nun nach der Ermittelung der Ausdrücke für P und Q durch diese Gleichung, die Grenzen a und b der Integrale durch die Bedingung, dass

$$Qu^i = 0$$

an jeder derselben, und dass innerhalb derselben Qu^i nicht unendlich werde, so ist es klar, dass die Gleichung (2) erfüllt ist. Differentiirt man zu dem Ende die vorstehende Gleichung, so kommt

$$(\gamma+i-1)\, Pu^i du = (\beta+i-1)\, Pu^{i-1} du + iQu^{i-1} du + u^i dQ$$

und diese zerfällt, weil sie für jeden Werth von i gelten muss, in folgende zwei

$$Pu = P + Q$$

$$(\gamma-1)\, Pudu = (\beta-1)\, Pdu + udQ$$

woraus

$$P = \frac{Q}{u-1}$$

$$\frac{dQ}{Q} = (\gamma-1)\frac{du}{u-1} - (\beta-1)\frac{du}{u(u-1)}$$

hervorgeht. Durch die Integration dieser wird, wenn k die willkührliche Constante bezeichnet,

$$(3) \qquad Qu^i = k.u^{\beta+i-1}(1-u)^{\gamma-\beta}$$

und da die Eins der kleinste Werth von i ist, so sieht man sogleich, dass wenn

$$\beta > 0 \text{ und } \gamma > \beta$$

sind, die Werthe $u = 0$ und $u = 1$ die Gleichung $Qu^i = 0$ erfüllen, ohne dass zwischen diesen Grenzen Qu^i unendlich wird. Wenn daher diese beiden Ungleichheiten statt finden, so wird der Ausdruck (1)

$$(3^*) \qquad \psi(x) = \frac{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\varphi(xu)\, du}{\int_0^1 u^{\beta-1}(1-u)^{\gamma-\beta-1}\, du}$$

Zu bemerken ist hiebei sowohl, wie bei den andern unten folgenden Summenformeln, dass die Bedingungen, unter welchen $Qu^i = 0$ wird, die Gleichung (2) im grössten Umfange erfüllen, und dass es daher Fälle geben kann, in welchen aus der (2) eine der folgenden Gleichungen hervorgehen:

$$0 = 0 \text{ oder } \infty = \infty$$

Die Fälle, in welchen diese Identitäten statt finden, müssen ausgeschlossen werden.

3.

Die Gaussische Reihe ist

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} x + \frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1.\ 2.\ \ \gamma.\gamma+1} x^2 + \dots$$

es ist also in Bezug auf diese

$$a_1 = \frac{\alpha}{1},\ a_2 = \frac{\alpha.\alpha+1}{1.2},\ a_3 = \frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2}{1.\ 2.\ 3}, \text{ etc.}$$

und es wird daher

$$\varphi(xu) = 1 + \frac{\alpha}{1} xu + \frac{\alpha.\alpha+1}{1.2} x^2 u^2 + \frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2}{1.\ 2.\ 3} x^3 u^3 + \dots$$
$$= (1-xu)^{-\alpha}$$

Substituirt man diesen Werth von $\varphi(xu)$ in (3*), so ergiebt sich

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} (1-xu)^{-\alpha} du}{\int_0^1 u^{\beta-1} (1-u)^{\gamma-\beta-1} du} \tag{4}$$

welches die Eulersche Summenformel ist, wenn man in seiner Reihe die Substitutionen macht, die nothwendig sind, um sie in die Gaussische umzuwandeln. Da in der letztgenannten die beiden ersten Elemente α und β mit einander verwechselt werden dürfen, so folgt aus der vorstehenden Summenformel sogleich die folgende

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} (1-xu)^{-\beta} du}{\int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\gamma-\alpha-1} du} \tag{5}$$

welche das Erfülltsein der Ungleichheiten

$$\alpha > 0 \text{ und } \gamma > \alpha$$

verlangt.

4.

Ausser den obigen Bedingungen, unter welchen $Qu^i = 0$ wird, giebt es noch andere, die bei Euler nicht vorkommen, und die ich auch sonst nirgends aufgestellt gefunden habe. Schreiben wir die Gleichung (3) wie folgt,

$$Qu^i = k\,\frac{u^{\beta+i-1}}{(1-u)^{\beta-\gamma}}$$

und setzen wir

$$\beta > 0 \text{ und } \beta - \gamma > \beta + i - 1$$

dann wird $Qu^i = 0$ für $u = 0$ und $u = -\infty$, ohne für irgend einen Zwischenwerth unendlich zu werden.

Die zweite dieser Bedingungen kann erfüllt werden, wenn α eine ganze und negative Zahl, und γ überhaupt eine negative Grösse ist, denn vermöge dieser Beschaffenheit von α ist stets

$$i \overline{\overline{<}} -\alpha$$

Es wird demzufolge, wenn man $-\alpha$ statt α, und $-\gamma$ statt γ schreibt,

$$F(-\alpha, \beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^{-\infty} u^{\beta-1}\,(1-u)^{-(\gamma+\beta+1)}\,(1-xu)^{\alpha}\,du}{\int_0^{-\infty} u^{\beta-1}\,(1-u)^{-(\gamma+\beta+1)}\,du}$$

in welcher man durch die Substitution

$$\frac{u}{1-u} = -y$$

die Grenzen der Integrale auf 0 und 1 zurückführen kann. Da vermöge dieser Substitution die Werthe

$$u = -\infty \text{ und } y = 1$$
$$u = 0 \text{ und } y = 0$$

correspondiren, und

$$u = -\frac{y}{1-y}, \quad 1 - u = \frac{1}{1-y}, \quad du = -\frac{dy}{(1-y)^2}$$

wird, so ergiebt sich

$$(6) \qquad F(-\alpha, \beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\beta-1}\,(1-u)^{\gamma-\alpha}\,(1+(x-1)\,u)^{\alpha}\,du}{\int_0^1 u^{\beta-1}\,(1-u)^{\gamma}\,du}$$

wenn

$$\beta > 0, \ \gamma > \alpha - 1$$

und α eine ganze und positive Zahl ist. Dieses ist eine neue Summenformel, die für eine Reihe anderer Fälle wie die obige gilt. Durch Vertauschung von α und β mit einander findet man hieraus

$$F(\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\beta}(1+(x-1)u)^{\beta}du}{\int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma}du}$$

welche voraussetzt, dass

$$\alpha > 0, \ \gamma > \beta - 1$$

und dass β eine ganze und positive Zahl sei.

5.

Seien ferner β und γ negative Grössen, dann wird die (3), wenn man $-\beta$ statt β, und $-\gamma$ statt γ schreibt,

$$Qu^i = k\frac{(1-u)^{\beta-\gamma}}{u^{\beta-i+1}}$$

und dieser Ausdruck wird Null für $u = 1$ und $u = \infty$, ohne für irgend einen Zwischenwerth unendlich zu werden, wenn

$$\beta > \gamma > i - 1$$

ist. Die zweite Ungleichheit kann wieder erfüllt werden, wenn α eine ganze und negative Zahl ist. Es wird daher alsdann

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_1^{\infty} u^{-(\beta+1)}(1-u)^{\beta-\gamma-1}(1-xu)^{\alpha}du}{\int_1^{\infty} u^{-(\beta+1)}(1-u)^{\beta-\gamma-1}du}$$

Man führt hier die Grenzen der Integrale auf 0 und 1 zurück, wenn man

$$u = \frac{1}{y}$$

setzt, und erhält dadurch

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\gamma-\alpha}(1-u)^{\beta-\gamma-1}(u-x)^{\alpha}du}{\int_0^1 u^{\gamma}(1-u)^{\beta-\gamma-1}du} \tag{7}$$

wenn

$$\beta > \gamma > \alpha - 1$$

und α eine ganze und positize Zahl ist. Durch Vertauschung von α und β mit einander ergiebt sich

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, x) = \frac{\int_0^1 u^{\gamma-\beta}(1-u)^{\alpha-\gamma-1}(u-x)^{\beta}du}{\int_0^1 u^{\gamma}(1-u)^{\alpha-\gamma-1}du}$$

wenn

$$\alpha > \gamma > \beta - 1$$

und β eine ganze und positive Zahl ist.

6.

Die in den Nennern dieser Summationsformeln vorkommenden Integrale lassen sich durch die Gaussischen ΠFunctionen erhalten, da unabhängig von der Theorie der FFunctionen bewiesen werden kann, dass allgemein

$$(8) \qquad \int_0^1 u^{\lambda-1}(1-u)^{\mu-1}\,du = \frac{\Pi(\lambda-1).\Pi(\mu-1)}{\Pi(\lambda+\mu-1)}$$

ist, wenn λ und μ positive Grössen sind. Da in dem speciellen Falle $x = 1$ die Zähler dieser Summationsformeln dieselbe Form annehmen, so kann man in demselben auch diese, und folglich auch die FFunctionen selbst durch die ΠFunctionen ausdrücken. Aus (4) und (5) erhält man ohne Unterschied

$$(A) \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

welches die bekannte Gaussische Summationsformel ist. Wegen des im Zähler von (4) und (5) enthaltenen Integrals, welches, nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist, den Factor $(1-u)^{\gamma-\beta-\alpha-1}$ enthält, muss hier zufolge der einen Bedingung, die die Gleichung (8) verlangt,

$$\gamma - \alpha - \beta > 0$$

sein, und es scheint, als müsse auch entweder α oder β positiv sein, dieses ist aber nicht nothwendig, denn der Factor, welcher den Ausdruck (A) unbestimmt machen könnte, wenn weder α noch β positiv ist, ist in dem Quotienten der Integrale verschwunden. Ausser dieser Summenformel geben die Ausdrücke (6) und (7) für den Fall $x = 1$ die folgenden:

$$(B) \qquad F(-\alpha, \beta, -\gamma, 1) = \frac{\Pi(\beta+\gamma)\,\Pi(\gamma-\alpha)}{\Pi(\gamma)\,\Pi(\gamma+\beta-\alpha)}$$

$$(C) \qquad F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = (-1)^{\alpha}\,\frac{\Pi(\gamma-\alpha)\,\Pi(\beta+\alpha-\gamma-1)}{\Pi(\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma-1)}$$

und die zu (6) und (7) correspondirenden Summationsformeln geben zwei ähnliche, die man auch aus den Vorstehenden durch Vertauschung von α und β mit einander erhält. Die Vorstehenden gelten für eine Reihe von andern Fällen wie (A), worunter ich hier nur den, wo in $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$

$$\gamma - \beta - \alpha = 0$$

ist, hervorheben will, welcher durch (B) summirt werden kann, während er von (A) ausgeschlossen werden muss. Die Summationsformeln (B) und (C) setzen jedenfalls voraus, dass das in der FFunction mit α be-

zeichnete Element eine ganze und positize Zahl sei, in Bezug auf die übrigen Bedingungen sind sie aber einer weiteren Ausdehnung fähig wie die der allgemeineren (6) und (7), aus welchen sie hier abgeleitet worden sind. Man wird dieses aus den folgenden einfachen Betrachtungen erkennen, aus welchen sie auch hervorgehen. Dieselben Betrachtungen führen überdiess auch noch auf eine andere Summationsformel hin, die mit keiner der vorstehenden identisch ist.

7.

In meiner vorigen Abhandlung habe ich gezeigt, dass die Gleichung

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = c\,F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1-x)$$

wo c eine Function von α, β und γ ohne x ist, allemal statt findet, wenn beide FFunctionen endliche Reihen (ganze und rationale Functionen von x und bez. von $1-x$) sind, die nicht unendlich werden können. Setzt man nun $x=1$ in die vorstehende Gleichung, so wird die FFunction rechter Hand gleich Eins, und man erhält

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = c$$

Setzt man $x = 0$, so wird die FFunction linker Hand gleich Eins, und es ergiebt sich

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\gamma+1, 1) = \frac{1}{c}$$

in welcher man darauf γ für $\alpha+\beta-\gamma+1$ schreiben kann. Die obige Bedingung findet statt, wenn entweder α oder β eine ganze und negative Zahl,*) und nur nicht γ eine kleinere oder eben so grosse, ganze und negative Zahl ist. Ich will daher die obige Gleichung so schreiben:

$$F(-\alpha, \beta, \gamma, x) = c\,F(-\alpha, \beta, \beta-\alpha-\gamma+1, 1-x)$$

wo α eine ganze und positive Zahl sein soll, β und γ aber beliebige reelle Grössen sind, letztere jedoch dem oben aufgestellten Ausnahmefall unterliegt.

Die Constante c kann nun durch die Vergleichung des in jeder FFunction mit der höchsten Potenz von x, das ist mit x^α, multiplicirten

*) Die FFunctionen können auch bei gebrochenen Werthen der beiden ersten Elemente derselben endliche Reihen werden, wenn nur zwischen α und β gewisse Relationen statt finden; z. B. für $\alpha = -\frac{\alpha'}{2}$, $\beta = -\frac{\alpha'-1}{2}$, wenn α' eine ganze und positive Zahl ist. Diese Fälle werde ich aber hier ausschliessen.

Gliedes bestimmt werden. Man findet leicht das allgemeine Glied der FFunction links vom Gleichheitszeichen =

$$(-1)^i \frac{\alpha.\alpha-1\ldots\alpha-i+1.\beta.\beta+1\ldots\beta+i-1}{1.2\ \ldots\ i.\ \gamma.\gamma+1\ldots\gamma+i-1}\, x^i$$

und das der FFunction rechts vom Gleichheitszeichen =

$$(-1)^i \frac{\alpha.\alpha-1\ldots\alpha-i+1.\beta.\beta+1\ldots\beta+i-1}{1.2\ldots\ldots i.\beta-\alpha-\gamma+1.\beta-\alpha-\gamma+2\ldots\beta-\alpha-\gamma+i}\,(1-x)^i$$

Das letzte Glied wird daher =

$$(-1)^\alpha \frac{\beta.\beta+1\ldots\beta+\alpha-1}{\gamma.\gamma+1\ldots\gamma+\alpha-1}\, x^\alpha$$

$$\text{und bez.} = (-1)^\alpha \frac{\beta.\beta+1\ldots\beta+\alpha-1}{\beta-\alpha-\gamma+1.\beta-\alpha-\gamma+2\ldots\beta-\gamma}\,(1-x)^\alpha$$

Aber das in der Entwickelung von $(1-x)^\alpha$ mit x^α multiplicirte Glied ist $= (-x)^\alpha$, hiemit wird sogleich

$$c = (-1)^\alpha \frac{\beta-\alpha-\gamma+1.\beta-\alpha-\gamma+2\ldots\beta-\gamma}{\gamma.\gamma+1\ldots\ldots\gamma+\alpha-1}$$

Um diesen Ausdruck auf ΠFunctionen hinzuführen, dient die Fundamentalgleichung der Theorie dieser Functionen, nemlich

$$(z+1)\,(z+2)\ldots(z+n) = \frac{\Pi\,(z+n)}{\Pi\,(z)}$$

wo z jede beliebige reelle Grösse sein kann, n hingegen eine ganze und positive Zahl sein muss. Wir bekommen hiemit die Gleichung

$$(9)\quad F(-\alpha,\beta,\gamma,x) = (-1)^\alpha \frac{\Pi\,(\beta-\gamma)\,\Pi\,(\gamma-1)}{\Pi\,(\beta-\alpha-\gamma)\,\Pi\,(\gamma+\alpha-1)}\, F\,(-\alpha,\beta,\beta-\alpha-\gamma+1,1-x)$$

die auch in § 2 Anwendung finden wird. Setzt man nun hierin $x = 1$, so bekommt man die Summenformel

$$(\text{D})\qquad F\,(-\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,1) = (-1)^\alpha \frac{\Pi\,(\beta-\gamma)\,\Pi\,(\gamma-1)}{\Pi\,(\beta-\alpha-\gamma)\,\Pi\,(\gamma+\alpha-1)}$$

und setzt man $x = 0$, so bekommt man eine Formel, die nach der Substitution von γ für $\beta-\alpha-\gamma+1$ mit dieser identisch wird. Da

$$\Pi\,(-z) = \infty$$

wenn z eine ganze und positive Zahl ist, so giebt die Formel (D) folgenden merkwürdigen Satz, dass

$$F\,(-\alpha,\,\beta,\,\gamma,\,1) = 0$$

wenn $\beta-\alpha-\gamma$ eine ganze und negative Zahl, und

$$\beta-\gamma > 0$$

ist. Wenn $\beta=\gamma$ ist, so versteht sich dieses von selbst, da

$$F\,(-\alpha,\,\beta,\,\beta,\,1) = (1-1)^\alpha$$

ist, aber wenn das zweite und dritte Element einander nicht gleich sind,

so ist die FFunction keine Binomialformel. Die Summenformel (D) wird unbestimmt, wenn β oder γ ganze negative Zahlen sind, welches davon herrührt, dass in diesen Fällen die Constante c eine andere Form annimmt. Sei überhaupt β eine negative Grösse, dann ist leicht zu finden, dass der obige Ausdruck für c die folgende Form annimmt:

$$c = \frac{\alpha+\beta+\gamma-1 \,.\, \alpha+\beta+\gamma-2 \ldots \beta+\gamma}{\gamma \,.\, \gamma+1 \ldots\ldots\ldots \gamma+\alpha-1}$$

Hiemit ergiebt sich

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, x) = \frac{\Pi(\alpha+\beta+\gamma-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha+\gamma-1)\,\Pi(\gamma+\beta-1)} F(-\alpha, -\beta, -(\alpha+\beta+\gamma-1), 1-x) \qquad (10)$$

und nachdem $x = 1$ gesetzt worden ist

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\alpha+\beta+\gamma-1)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha+\gamma-1)\,\Pi(\gamma+\beta-1)} \qquad (E)$$

die mit der Gaussischen Summenformel (A) identisch wird, wenn darin $-\alpha$ statt α, und $-\beta$ statt β geschrieben wird. Die vorstehende Ableitung setzt zwar voraus, dass α eine ganze und positive Zahl sei, welches die vorhergehende Ableitung der Formel (A), so wie die von Gauss selbst, nicht verlangt, die vorstehende Ableitung zeigt dagegen aber, dass wenn α oder β ganz und positiv ist, die Bedingung $\gamma - \beta - \alpha > 0$ nicht für die Gültigkeit derselben erforderlich ist, welcher Umstand nicht aus jenem Beweise hervorgeht. Setzt man $x = 0$ in (10) und schreibt

$$\gamma \text{ für } \alpha+\beta+\gamma-1$$

so bekommt man

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-\alpha)\,\Pi(\gamma-\beta)}{\Pi(\gamma)\,\Pi(\gamma-\alpha-\beta)} \qquad (F)$$

welche mit der Summationsformel (B) identisch wird, wenn man darin $-\beta$ für β schreibt, woraus folgt, dass diese auch für negative Werthe von β und γ gilt, wenn nur nicht $\gamma-\beta$ oder γ negative und ganze Zahlen sind. Es folgt ferner aus der vorstehenden Summationsformel der Satz, dass

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = 0$$

ist, wenn $\gamma-\alpha-\beta$ eine ganze und negative Zahl ist, und nur nicht zugleich $\gamma-\alpha$ und $\gamma-\beta$ ganze und negative Zahlen sind. Setzt man endlich $-\beta$ für β, und $-\gamma$ für γ in den obigen Ausdruck für c, so entsteht

$$c = (-1)^{\alpha} \frac{\alpha+\beta-\gamma-1 \,.\, \alpha+\beta-\gamma-2 \ldots \beta+\gamma}{\gamma \,.\, \gamma-1 \ldots\ldots\ldots \gamma-\alpha+1}$$

und hieraus ergiebt sich, sowohl für $x = 1$ wie für $x = 0$,

$$F(-\alpha, -\beta, -\gamma, 1) = (-1)^{\alpha} \frac{\Pi(\gamma-\alpha)\,\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma-1)} \qquad (G)$$

welche mit (C) identisch ist. Ich bemerke schliesslich, dass man diese Summenformeln auch aus der Gaussischen vermittelst der angeführten Fundamentalgleichung der Π Functionen ableiten kann.

8.

Wenn man u auf reelle Weise beschränkt, so sind im Vorhergehenden alle Fälle erschöpft, in welchen $Qu^i = 0$ werden kann, giebt man aber u imaginäre Werthe, so werden andere Bedingungen möglich, und es öffnet sich ein neues Feld für die Summation der F Functionen. Der allgemeinste Ausdruck, den man für u wählen kann, ist der folgende:

$$u = r\,(\cos sy + \sqrt{-1}\,.\,\sin sy)$$

wo s, r und y reelle Grössen sind, von welchen ich hier nur y als veränderlich betrachten werde. Substituirt man diesen Ausdruck in (3), und verleibt den constanten Factor $r^{\beta+i-1}$ der willkührlichen Constante k ein, so ergiebt sich

$$Qu^i = kp^{\gamma-\beta}\{\cos[(\gamma-\beta)q + (\beta+i-1)sy] + \sqrt{-1}\,.\,\sin[(\gamma-\beta)q + (\beta+i-1)sy]\}$$

wo

$$1 - r\cos sy = p\cos q$$
$$-r\sin sy = p\sin q$$

ist. Derselbe Werth von u giebt ferner, wenn man stets die constanten Factoren der Constante k einverleibt,

$$Pdu = kp^{\gamma-\beta-1}\{\cos[(\gamma-\beta-1)q + \beta sy] + \sqrt{-1}\,.\,\sin[(\gamma-\beta-1)q + \beta sy]\}$$
$$\varphi(xu) = h^{-\alpha}(\cos\alpha l - \sqrt{-1}\,.\,\sin\alpha l)$$

wo

$$1 - xr\cos sy = h\cos l$$
$$-xr\sin sy = h\sin l$$

ist. Substituirt man diese Werthe in (1), und setzt darauf den reellen, und den imaginären Theil dieser Gleichung, jeden für sich, gleich Null, so bekommt man die folgenden zwei Ausdrücke:

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_a^b h^{-\alpha}\, p^{\gamma-\beta-1}\cos[(\gamma-\beta-1)q + \beta sy - \alpha l]\,dy}{\int_a^b p^{\gamma-\beta-1}\cos[(\gamma-\beta-1)q + \beta sy]\,dy}$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = \frac{\int_a^b h^{-\alpha}\, p^{\gamma-\beta-1}\sin[(\gamma-\beta-1)q + \beta sy - \alpha l]\,dy}{\int_a^b p^{\gamma-\beta-1}\sin[(\gamma-\beta-1)q + \beta sy]\,dy}$$

wo die Grenzen der Integrale wieder durch die Bedingung bestimmt werden müssen, dass an jeder derselben der obige Ausdruck für $Qu^i = 0$ werde, ohne zwischen denselben unendlich werden zu können. Es ist hiebei noch zu bemerken, dass wenn nur die eben ausgesprochenen Bedingungen erfüllt werden, die Grenzen des imaginären Theils anders angenommen werden dürfen wie die des reellen.

9.

Es würde mich zu weit führen, wenn ich jetzt alle Fälle untersuchen wollte, in welchen die Bedingungen für $Qu^i = 0$ erfüllt werden können, ich muss dieses auf eine andere Zeit verschieben, und darf mich hier nur mit dem Falle beschäftigen, welcher in § 2. angewandt werden wird, und überhaupt die Veranlassung dieser Untersuchungen gewesen ist. In diesem Falle sind $-\alpha$, $-\beta$ und γ ganze und positive Zahlen, und es ist überdiess $x = -1$. Führen wir diese Annahmen in die Formeln des vor. Art. ein, so dürfen wir $r = 1$ und $s = 2$ setzen, wodurch

$$p = 2 \sin y,\; q = \frac{3\pi}{2} + y$$

wird, wenn π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet. Hiemit erhalten wir, wenn wir fortfahren alle constanten Factoren der willkührlichen Constante einzuverleiben, und $-\beta$ statt β schreiben,

$$Qu^i = k \sin^{\gamma+\beta} y\, \{\cos(\gamma-\beta+2i-2)y + \sqrt{-1}\,.\, \sin(\gamma-\beta+2i-2)y\}$$

Da nun γ und β positiv sind, so wird unabhängig von i, $Qu^i = 0$, wenn $y = 0, = \pi, = 2\pi$, etc. wird, ohne je unendlich zu werden. Für die Integrationsgrenzen können wir also setzen

$$a = 0,\; b = \pi$$

Verbindet man ferner die Annahme $x = -1$ mit $r = 1$ und $s = 2$, so wird

$$h = 2 \cos y;\; l = y$$

und wenn man diese Werthe in die beiden Summenformeln des vor. Art. substituirt, und darin $-\alpha$ statt α, und $-\beta$ statt β schreibt, so wird

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = 2^\alpha \frac{\int_0^\pi \cos^\alpha y \sin^{\gamma+\beta-1} y\,.\, \cos(\gamma-\beta+\alpha-1)y\,.\, dy}{\int_0^\pi \sin^{\gamma+\beta-1} y\,.\, \cos(\gamma-\beta-1)y\,.\, dy}$$

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = 2^\alpha \frac{\int_0^\pi \cos^\alpha y \sin^{\gamma+\beta-1} y\,.\, \sin(\gamma-\beta+\alpha-1)y\,.\, dy}{\int_0^\pi \sin^{\gamma+\beta-1} y\,.\, \sin(\gamma-\beta-1)y\,.\, dy}$$

Ich lege in diesen Formeln den Elementen α, β und γ die Bedeutung unter, dass sie ganze und positive Zahlen sein sollen, weil dieses der Fall ist, in welchem ich sie weiter unten anwenden werde. Es ist aber leicht zu erkennen, dass die Gültigkeit derselben nicht auf diese Bedingungen beschränkt ist.

10.

Für die Anwendung der eben gefundenen Summenformeln auf den genannten Fall ist vor Allem zu bemerken, dass man sich der ersten bedienen muss, wenn $\gamma+\beta-1$ eine grade Zahl ist, indem in diesem Falle der zweite Ausdruck $\frac{0}{0}$ wird. Wenn dagegen $\gamma+\beta-1$ eine ungrade Zahl ist, so muss die zweite Summenformel angewandt werden, indem dann der erste Ausdruck $\frac{0}{0}$ wird. Es tritt hier der Fall ein, dessen in Art. 2 gedacht wurde, dass nemlich in den angeführten Fällen die Gleichung (2) $0=0$ wird, und daher nichts bedeuten kann.

Um die Integrationen auszuführen, sei nun

wenn $\gamma+\beta-1$ grade ist,

$$\cos^\alpha y.\sin^{\gamma+\beta-1}y=$$

$$\frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-1}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}}\{a_0\cos(\gamma+\beta+\alpha-1)y+a_1\cos(\gamma+\beta+\alpha-3)y+\ldots$$
$$+a_1\cos(-\gamma-\beta-\alpha+3)y+a_0\cos(-\gamma-\beta-\alpha+1)y\}$$

und wenn $\gamma+\beta-1$ ungrade ist,

$$\cos^\alpha y.\sin^{\gamma+\beta-1}y=$$

$$\frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-2}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}}\{a_0\sin(\gamma+\beta+\alpha-1)y+a_1\sin(\gamma+\beta+\alpha-3)y+\ldots$$
$$-a_1\sin(-\gamma-\beta-\alpha+3)y-a_0\sin(-\gamma-\beta-\alpha+1)y\}$$

dann ist offenbar im ersten Falle

$$\int_0^\pi\cos^\alpha y.\sin^{\gamma+\beta-1}y.\cos(\gamma-\beta+\alpha-1)y.\,dy=\pi\cdot\frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-1}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}}a_\beta$$

und im zweiten Falle

$$\int_0^\pi\cos^\alpha y.\sin^{\gamma+\beta-1}y.\sin(\gamma-\beta+\alpha-1)y.\,dy=\pi\,\frac{(-1)^{\frac{\gamma+\beta-2}{2}}}{2^{\gamma+\beta+\alpha-1}}a_\beta$$

Die Integrale der Nenner können wir bekannten Formeln entnehmen, denn man weiss dass

$$\int_0^\pi \sin^{2q} y \,.\, \cos 2py \,.\, dy \qquad = (-1)^p \pi \frac{\Pi(2q)}{2^{2q}\,\Pi(q+p)\,\Pi(q-p)}$$

$$\int_0^\pi \sin^{2q+1} y \,.\, \sin(2p+1)y \,.\, dy = (-1)^p \pi \frac{\Pi(2q+1)}{2^{2q+1}\,\Pi(q+p+1)\,\Pi(q-p)}$$

ist, wenn p und q ganze und positive Zahlen bedeuten, und

$$p \overline{\overline{<}} q$$

ist. Substituirt man diese Ausdrücke in die Summenformeln des vor. Art., so ergiebt sich, $\gamma+\beta$ mag grade oder ungrade sein,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = (-1)^\beta \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta)}{\Pi(\gamma+\beta-1)} a_\beta \qquad (11)$$

für welche nur noch der Ausdruck von a_β zu ermitteln ist. Es ist vielleicht überflüssig diesem hinzuzufügen, dass wenn z eine ganze und positive Zahl ist,

$$\Pi(z) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots z$$

und ausserdem

$$\Pi(0) = 1$$

ist. Zur obigen Summenformel ist noch zu bemerken, dass durch die Vertauschung der Elemente α und β mit einander daraus eine ähnliche entsteht, die im Allgemeinen die Summation vermittelst anderer Zahlenwerthe der in dem Ausdruck vorkommenden Factoren giebt, und dass daher Fälle vorkommen können, in welchen es in den Anwendungen vortheilhafter ist, sich der durch diese Vertauschung entstehenden Summenformel zu bedienen.

Diese Formel giebt nicht blos die Summe der bezeichneten FFunction, sondern auch die einiger anderen. Die allgemeine Verwandelungsformel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

giebt

$$F(-\alpha, \gamma+\beta, \gamma, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^\alpha} F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1)$$

$$F(\gamma+\alpha, -\beta, \gamma, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^\beta} F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1)$$

und die Summenformel (11) giebt daher auch die Summe dieser beiden FFunctionen, in welchen das vierte Element $= \frac{1}{2}$ ist. Ferner, die Gleichung (10) des Art. 7. giebt wenn man $x = -1$ setzt

$$F(-\alpha, -\beta, -(\alpha+\beta+\gamma-1), 2) = \frac{\Pi(\alpha+\gamma-1)\,\Pi(\beta+\gamma-1)}{\Pi(\alpha+\beta+\gamma-1)\,\Pi(\gamma-1)} F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1)$$

und die vorstehende allgemeine Verwandelungsformel giebt, wenn man $x = 2$ setzt,

$$F(-12, -8, 1, -1) = 1 - \frac{12.8}{1.1} + \frac{12.11.8.7}{1.2.1.2} \mp \text{etc.}$$
$$= 1 - 96 + 1848 - 12320 + 34650 - 44352$$
$$+ 25872 - 6336 + 495$$
$$= -238$$

wie oben.

12.

Man kann auch Ausdrücke geben, durch welche die a Coefficienten, jeder für sich, erhalten werden. Sei ε eine ganze und positive Zahl, und

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = \pm \varepsilon$$
$$\alpha + \beta + \gamma - 1 = \lambda$$

dann ist auch stets $\frac{\lambda - \varepsilon}{2}$ eine ganze und positive Zahl, die Null eingeschlossen. Es wird hiemit

$$\left(z+\frac{1}{z}\right)^{\alpha}\left(z-\frac{1}{z}\right)^{\beta+\gamma-1} = \left(z+\frac{1}{z}\right)^{\frac{\lambda\pm\varepsilon}{2}}\left(z-\frac{1}{z}\right)^{\frac{\lambda\mp\varepsilon}{2}} = \left(z^2-\frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\lambda-\varepsilon}{2}}\left(z\pm\frac{1}{z}\right)^{\varepsilon}$$

und die Entwickelung der Binomien giebt

$$\left(z^2 - \frac{1}{z^2}\right)^{\frac{\lambda-\varepsilon}{2}} = z^{\lambda-\varepsilon} - \frac{\lambda-2}{2} z^{\lambda-\varepsilon-4} + \frac{\lambda-\varepsilon.\lambda-\varepsilon-2}{2.4} z^{\lambda-\varepsilon-8} \mp \text{etc.}$$
$$\left(z \pm \frac{1}{z}\right)^{\varepsilon} = z^{\varepsilon} \pm \frac{\varepsilon}{1} z^{\varepsilon-2} + \frac{\varepsilon.\varepsilon-1}{1.2} z^{\varepsilon-4} \pm \text{etc.}$$

woraus sogleich

$$(13)\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = \pm \frac{\varepsilon}{1} \\ a_2 = \frac{\varepsilon.\varepsilon-1}{1.2} - \frac{\lambda-\varepsilon}{2} \\ a_3 = \pm\left\{\frac{\varepsilon.\varepsilon-1.\varepsilon-2}{1.2.3} - \frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{\lambda-\varepsilon}{2}\right\} \\ a_4 = \frac{\varepsilon.\varepsilon-1.\varepsilon-2.\varepsilon-3}{1.2.3.4} - \frac{\varepsilon.\varepsilon-1}{1.2}\cdot\frac{\lambda-\varepsilon}{2} + \frac{\lambda-\varepsilon.\lambda-\varepsilon-2}{2.4} \\ a_5 = \pm\left\{\frac{\varepsilon.\varepsilon-1..\varepsilon-4}{1.2..5} - \frac{\varepsilon.\varepsilon-1.\varepsilon-2}{1.2.3}\cdot\frac{\lambda-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{1}\cdot\frac{\lambda-\varepsilon.\lambda-\varepsilon-2}{2.4}\right\} \\ a_6 = \frac{\varepsilon.\varepsilon-1..\varepsilon-5}{1.2..6} - \frac{\varepsilon.\varepsilon-1..\varepsilon-3}{1.2..4}\cdot\frac{\lambda-\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon.\varepsilon-1}{1.2}\cdot\frac{\lambda-\varepsilon.\lambda-\varepsilon-2}{2.4} - \frac{\lambda-\varepsilon.\lambda-\varepsilon-2.\lambda-\varepsilon-4}{2.4.6} \\ \quad\quad\quad\quad \text{etc.} \end{cases}$$

folgt. Wenn man den letzten der durch (12) berechneten a Coefficienten auch durch den bezüglichen Ausdruck (13) berechnet, so erhält man

auch eine Controlle für die Richtigkeit der numerischen Rechnung. Für das obige Beispiel wird $\varepsilon = 4$ und $\lambda = 20$, und daher durch (13)

$$a_8 = 28 - 336 + 70 = -238$$

wie oben.

13.

Man sieht aus dem Vorhergehenden, dass die ΠFunctionen, die wir hier betrachtet haben, sich im Allgemeinen nicht durch ein einziges, aus ΠFunctionen bestehendes Glied darstellen lassen, es giebt jedoch besondere Fälle, in welchen dieses möglich wird. Unter diesen will ich erst den Fall

$$\varepsilon = 0$$

betrachten. Die Gleichungen (12) geben in diesem Falle sogleich

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1 \\
a_1 &= 0 \\
a_2 &= -\tfrac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma - 1) \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= -\tfrac{1}{4}(\alpha + \beta + \gamma - 3)\, a_2 \\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

und es wird daher, wenn ausserdem β ungrade ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = 0$$

und wenn β grade ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = (-1)^{\frac{1}{2}\beta} \frac{\Pi(\gamma - 1)\, \Pi(\beta)}{\Pi(\frac{1}{2}\beta)\, \Pi(\alpha - \frac{1}{2}\beta)}$$

welcher Ausdruck denen der Art. 5. und 6. analog ist. Ein anderer Fall, in welchem ein analoger Ausdruck entsteht, ist der, wo

$$\varepsilon = 1$$

ist. Die Ausdrücke (13) geben in diesem Falle

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1, & a_1 &= \pm 1 \\
a_2 &= -\frac{\lambda - 1}{2} & a_3 &= \mp \frac{\lambda - 1}{2} \\
a_4 &= \frac{\lambda - 1 \,.\, \lambda - 3}{2 \,.\, 4}, & a_5 &= \pm \frac{\lambda - 1 \,.\, \lambda - 3}{2 \,.\, 4} \\
&\text{etc.} & &\text{etc.}
\end{aligned}$$

Hieraus folgt,

wenn β eine grade Zahl ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = (-1)^{\frac{\beta}{2}} \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta)\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{2}\right)}{\Pi(\gamma+\beta-1)\,\Pi\left(\frac{\alpha+\gamma-2}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta}{2}\right)}$$

und wenn β eine ungrade Zahl ist,

$$F(-\alpha, -\beta, \gamma, -1) = \mp (-1)^{\frac{\beta-1}{2}} \frac{\Pi(\gamma-1)\,\Pi(\beta)\,\Pi\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma-2}{2}\right)}{\Pi(\gamma+\beta-1)\,\Pi\left(\frac{\alpha+\gamma-1}{2}\right)\Pi\left(\frac{\beta-1}{2}\right)}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = +1$$

und das untere, wenn

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = -1$$

ist. In meiner vorigen Abhandlung habe ich durch eine, von der hier angewandten gänzlich verschiedene, Methode die Function

$$F(-\mu, \mu, 1, \sin^2 k)$$

und deren erstes Differential in Bezug auf k, in dem Falle wo $k = \frac{\pi}{4}$ summirt, diese Functionen gehören in den eben behandelten Fall, und ich werde daher zeigen, dass das sich aus den hier entwickelten Ausdrücken ergebende Resultat mit jenem übereinstimmt. Es wird vermittelst eines bekannten Satzes

$$\frac{dF(-\mu, \mu, 1, \sin^2 k)}{dk} = -2\mu^2 \sin k \cos k\, F(1-\mu, 1+\mu, 2, \sin^2 k)$$

und die beiden zu summirenden Functionen sind daher

$$F(-\mu, \mu, 1, \tfrac{1}{2}) \text{ und } -\mu^2 F(1-\mu, 1+\mu, 2, \tfrac{1}{2})$$

die ich der Kürze wegen mit F und F' bezeichnen werde. Durch die Verwandelungsformeln des Art. 9. bekommt man nun zuerst

$$F = \frac{1}{2^\mu} F(-\mu, 1-\mu, 1, -1)$$

$$F' = -\frac{\mu^2}{2^{\mu-1}} F(1-\mu, 1-\mu, 2, -1)$$

Es ist also hier bezüglich

$$\alpha = \mu, \qquad \beta = \mu - 1, \ \gamma = 1$$

und $\qquad \alpha = \mu - 1, \ \beta = \mu - 1, \ \gamma = 2$

es wird daher für die erste Function

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = +1$$

und für die zweite

$$\alpha - \beta - \gamma + 1 = -1$$

Substituirt man diese Werthe der Elemente α, β und γ in die obigen Summenformeln, so bekommt man

wenn μ ungrade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{2^\mu} \frac{\Pi(\mu-1)}{\left(\Pi\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\right)^2}$$

$$F' = (-1)^{\frac{\mu+1}{2}} \frac{\mu}{2^{\mu-1}} \frac{\Pi(\mu-1)}{\left(\Pi\left(\frac{\mu-1}{2}\right)\right)^2} = -2\mu F$$

und wenn μ grade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2^\mu} \frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi\left(\frac{\mu}{2}\right)\Pi\left(\frac{\mu-2}{2}\right)}$$

$$F' = (-1)^{\frac{\mu}{2}} \frac{\mu}{2^{\mu-1}} \frac{\Pi(\mu-1)}{\Pi\left(\frac{\mu}{2}\right)\Pi\left(\frac{\mu-2}{2}\right)} = 2\mu F$$

oder wenn man die ΠFunctionen ausschreibt,

wenn μ ungrade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu-1}{2}}}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots\mu-2}{2.4.6\ldots\mu-1}$$

$$F' = -2\mu F$$

und wenn μ grade ist,

$$F = \frac{(-1)^{\frac{\mu}{2}}}{2} \cdot \frac{1.3.5\ldots\mu-1}{2.4.6\ldots\mu}$$

$$F' = 2\mu F$$

mit jenen Resultaten übereinstimmend.

§ II.

Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function

$$r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$$

nach den Potenzen von r und r', und den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen der wahren Anomalien.

14.

Es sollen fortwährend r der Radius Vector des Planeten m, r' der des Planeten m' bedeuten, und

$$r' > r$$

sein. Den Winkel zwischen dem Radius r und der gegenseitigen Knotenlinie der beiden Bahnebenen nenne ich U, und den zwischen r' und demselben Theil derselben Knotenlinie U'; die Neigung der Bahnebenen gegen einander sei J. Es ist zwar hier gleichgültig, ob man für J den spitzen oder den stumpfen Winkel wählt, den die beiden Bahnebenen mit einander machen, um aber von einer festen Regel auszugehen, werde ich annehmen, dass J nie grösser sei wie 90^0. Die Winkel U und U' müssen ihren Anfang in den Theilen der Bahnebenen nehmen, die diesen Winkel J einschliessen, und es ist folglich, wenn der Winkel zwischen r und r' mit H bezeichnet wird,

$$\cos H = \cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J$$
$$= \cos^2 \tfrac{1}{2} J \cos (U' - U) + \sin^2 \tfrac{1}{2} J \cos (U' + U)$$

Nennt man die gegenseitige Entfernung der beiden Planeten $\triangle$, so wird

$$\triangle^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos^2 \tfrac{1}{2} J \cos (U' - U) - 2rr' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \cos (U' + U)$$

Um diesen Ausdruck, so wie dessen Entwickelung, auf den Fall anwenden zu können, wo der eine der beiden Himmelskörper rückläufig ist, braucht man nur in den Formeln der elliptischen Bewegung desselben die mittlere Bewegung negativ anzunehmen. Sei nun

$$\frac{r}{r'} \cos^2 \tfrac{1}{2} J = \alpha; \; \frac{r}{r'} \sin^2 \tfrac{1}{2} J = \beta,$$

dann lässt sich der vorstehende Ausdruck leicht auf folgende Form bringen,

$$(14) \quad \frac{\triangle^2}{r'^2} = 1 - 2\alpha \cos (U' - U) - 2\beta \cos (U' + U) + \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

die eine Verallgemeinerung der bekannten Form

$$1 - 2\gamma \cos x + \gamma^2$$

ist, und in diese übergeht, wenn man entweder α oder β gleich Null macht. Setzt man ferner

$$2 \cos (U' - U) = p + \frac{1}{p}, \; 2 \cos (U' + U) = q + \frac{1}{q}$$

dann sind p und q die den Bögen $U' - U$ und $U' + U$ zukommenden, imaginären Exponentialfunctionen; nemlich, wenn man die Grundzahl der natürlichen Logarithmen mit c bezeichnet,

$$p = c^{(U' - U)\sqrt{-1}}, \; q = c^{(U' + U)\sqrt{-1}}$$

Durch die Substitution dieser Ausdrücke bringt man (14) auf folgende Form

$$(15) \quad \frac{\triangle^2}{r'^2} = (1 - \alpha p - \beta q)\left(1 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}\right) - \alpha\beta\left(\sqrt{\frac{p}{q}} - \sqrt{\frac{q}{p}}\right)^2$$

welche ich der beabsichtigten Reihenentwickelung zu Grunde legen werde.

15.

Durch die Entwickelung der Factoren und des Quadrats des Ausdrucks (15) kann man leicht seine Identität mit dem Ausdruck (14) nachweisen, allein man kann ihn auch auf die folgende Art direct finden. Ich beziehe die beiden Körper m und m' auf die Achsen der rechtwinklichen Coordinaten x, y, z, und x', y', z'. Die Ebene der Bahn des m' soll die xy Ebene, und der aufsteigende Knoten von m auf m' die x Achse sein, dann haben die Coordinaten von m und m' folgende Ausdrücke,

$$\begin{aligned} x &= r \cos U, & x' &= r' \cos U' \\ y &= r \cos J \sin U, & y' &= r' \sin U' \\ z &= r \sin J \sin U, & z' &= 0 \end{aligned}$$

und es ist

$$\begin{aligned} \triangle^2 &= (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + z^2 \\ &= \{x'-x-(y'-y)\sqrt{-1}\}\{x'-x+(y'-y)\sqrt{-1}\} + z^2 \qquad (16) \end{aligned}$$

Die vorstehenden Ausdrücke der Coordinaten geben aber

$$\begin{aligned} x'-x-(y'-y)\sqrt{-1} &= r'(\cos U' - \sqrt{-1}.\sin U') - r(\cos U - \sqrt{-1}.\cos J \sin U) \\ &= r'\left(c^{-U'\sqrt{-1}} - \frac{r}{r'}\cos^2\tfrac{1}{2}J.\,c^{-U\sqrt{-1}} - \frac{r}{r'}\sin^2\tfrac{1}{2}J.\,c^{U\sqrt{-1}}\right) \\ &= r'c^{-U'\sqrt{-1}}\left(1 - \alpha\, c^{(U'-U)\sqrt{-1}} - \beta c^{(U'+U)\sqrt{-1}}\right) \\ &= r'c^{-U'\sqrt{-1}}(1 - \alpha p - \beta q) \end{aligned}$$

und wenn man hierin $-\sqrt{-1}$ statt $\sqrt{-1}$ schreibt, so erfolgt

$$x'-x+(y'-y)\sqrt{-1} = r'c^{U'\sqrt{-1}}\left(1 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}\right)$$

Die Gleichungen

$$p = c^{(U'-U)\sqrt{-1}}, \quad q = c^{(U'+U)\sqrt{-1}}$$

geben

$$c^{U\sqrt{-1}} = \sqrt{\frac{q}{p}}$$

also

$$2\sqrt{-1}.\sin U = \sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}$$

und hiemit erhält man

$$z^2 = -r'^2\alpha\beta\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2$$

Substituirt man diese Ausdrücke in (16), so geht (15) daraus hervor.

16.

Ich werde nun zuerst den Ausdruck (15) nach den Potenzen von α und β entwickeln, und den allgemeinen Ausdruck der Coefficienten ableiten, es ist klar, dass man durch die Summation dieses Ausdrucks in Bezug auf alle Glieder, für welche die Summe der Exponenten von α und β dieselbe ist, den Coefficienten der betreffenden Potenz von $\frac{r}{r'}$ erhält. Sei

$$F = 1 - \alpha p - \beta q, \quad F' = 1 - \frac{\alpha}{p} - \frac{\beta}{q}$$

dann wird (15)

$$\frac{\triangle^2}{r'^2} = FF' - \alpha\beta\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2$$

und die Reihenentwickelung giebt zuerst

$$\frac{r'}{\triangle} = \frac{1}{(FF')^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\frac{\alpha\beta}{(FF')^{\frac{3}{2}}}\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\frac{\alpha^2\beta^2}{(FF')^{\frac{5}{2}}}\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^4 + \text{etc.}$$

Von dieser Reihe lässt sich leicht das allgemeine Glied aufstellen. Der u^{te} Binomialcoefficient der Potenz $-\frac{2m+1}{2}$ hat folgenden Ausdruck

$$(17) \qquad \frac{\Pi(2m+2u)\,\Pi(m)}{2^{2u}\,\Pi(m+u)\,\Pi(2m)\,\Pi(u)}$$

wo die Argumente der ΠFunctionen stets ganze und positive Zahlen sind, weil m eine solche Zahl bedeutet. Also der u^{te} Coefficient der Potenz $-\frac{1}{2}$ ist $= \frac{\Pi(2u)}{2^{2u}\,(\Pi(u))^2}$

und die obige Reihe wird daher durch folgenden allgemeinen Ausdruck dargestellt,

$$(18) \quad \frac{r'}{\triangle} = \Sigma_{u=0}^{u=\infty}\, \alpha^u \beta^u \frac{\Pi(2u)}{2^{2u}\,(\Pi(u))^2}\,(FF')^{-\frac{2u+1}{2}}\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{2u}$$

welcher nun weiter zu entwickeln ist.

17.

Durch Hülfe des Ausdrucks (17) bekommen wir zuerst

$$F^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma \frac{\Pi(2u+2n)\,\Pi(u)}{2^{2n}\,\Pi(u+n)\,\Pi(2u)\,\Pi(n)}\,(\alpha p + \beta q)^n$$

aber der Coefficient von $\alpha^k\beta^l$ in der n^{ten} Potenz von $\alpha p + \beta q$ ist $=$

$$\frac{k+l\,.\,k+l-1\,.\,k+l-2\ldots k+1}{1\,.\,2\,.\,3\ldots l}$$

und da in jedem Gliede $k + l = n$ ist, so kann man diesen Coefficienten auch so schreiben $\frac{\Pi(n)}{\Pi(k)\,\Pi(l)}$

Es wird also

$$F^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma \alpha^k \beta^l \frac{\Pi(2u+2n)\,\Pi(u)}{2^{2n}\,\Pi(u+n)\,\Pi(2u)\,\Pi(k)\,\Pi(l)}\, p^k q^l$$

Der Coefficient von $\alpha^k\beta^l$ ist hier stets ein einziges Glied, welches auch mit $p^k q^l$ multiplicirt ist, da nun F' aus F durch Verwandelung von p in p^{-1} und q in q^{-1} hervorgeht, so wird die Entwickelung von $F'^{-\frac{2u+1}{2}}$ aus der eben abgeleiteten durch blose Verwandelung von $p^k q^l$ in $p^{-k} q^{-l}$ erhalten. Es ist daher

$$F'^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma \alpha^k \beta^l \frac{\Pi(2u+2n)\,\Pi(u)}{2^{2n}\,\Pi(u+n)\,\Pi(2u)\,\Pi(k)\,\Pi(l)}\, p^{-k} q^{-l}.$$

Im Product dieser beiden Grössen kann der Factor $\alpha^k\beta^l$ durch alle möglichen Verbindungen von $k=0$, $l=0$ bis $k=k$, $l=l$ hervorgebracht werden. Nemlich die in $F'^{-\frac{2u+1}{2}}$ mit

$$\begin{array}{lllll} \alpha^0\beta^0, & \alpha^0\beta, & \alpha^0\beta^2, & \ldots & \alpha^0\beta^l \\ \alpha\beta^0, & \alpha\beta, & \alpha\beta^2, & \ldots & \alpha\beta^l \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha^k\beta^0, & \alpha^k\beta^1, & \alpha^k\beta^2, & \ldots & \alpha^k\beta^l \end{array}$$

multiplicirten Glieder geben, wenn sie bez. mit den in $F^{-\frac{2u+1}{2}}$ mit

$$\begin{array}{lllll} \alpha^k\beta^l, & \alpha^k\beta^{l-1}, & \alpha^k\beta^{l-2}, & \ldots & \alpha^k\beta^0 \\ \alpha^{k-1}\beta^l, & \alpha^{k-1}\beta^{l-1}, & \alpha^{k-1}\beta^{l-2}, & \ldots & \alpha^{k-1}\beta^0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \alpha^0\beta^l, & \alpha^0\beta^{l-1}, & \alpha^0\beta^{l-2}, & \ldots & \alpha^0\beta^0 \end{array}$$

multiplicirten verbunden werden, Glieder die alle mit $\alpha^k\beta^l$ multiplicirt sind. Diese Verbindungen sind die einzigen, die solche Glieder hervorbringen können, und sie unterscheiden sich alle durch die Exponenten, die p und q bekommen. Diese sind für die obigen Verbindungen der Reihe nach

$$\begin{array}{lllll} p^k q^l, & p^k q^{l-2}, & p^k q^{l-4}, & \ldots & p^k q^{-l} \\ p^{k-2} q^l, & p^{k-2} q^{l-2}, & p^{k-2} q^{l-4}, & \ldots & p^{k-2} q^{-l} \\ \vdots & & & & \vdots \\ p^{-k} q^l, & p^{-k} q^{l-2}, & p^{-k} q^{l-4}, & \ldots & p^{-k} q^{-l} \end{array}$$

Der Coefficient eines jeden dieser Glieder ist Ein Glied, denn jede dieser Potenzen wird in dem Coefficienten von $\alpha^k\beta^l$ nur Einmal hervorgebracht.

Denkt man sich nun ausser unter k und l auch unter τ und σ zwei ganze und positize Zahlen, die Null eingeschlossen, so kann man das allgemeine Glied

$$\text{in } (FF')^{-\frac{2u+1}{2}} \text{ mit } \alpha^k\beta^l p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}$$

multiplicirt sich denken, und dieses kann nur auf Eine Art, nemlich durch die Multiplication des

$$\text{in } F'^{\,-\frac{2u+1}{2}} \text{ von } \alpha^{\tau}\beta^{\sigma}p^{-\tau}q^{-\sigma}$$

abhängigen mit dem

$$\text{in } F^{\,-\frac{2u+1}{2}} \text{ von } \alpha^{k-\tau}\beta^{l-\sigma}p^{k-\tau}q^{l-\sigma}$$

abhängigen entstehen. Setzt man daher

$$(19)\qquad (FF')^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma M(k,\, l)\, \alpha^k \beta^l$$

wo also überhaupt $M(k, l)$ den Coefficienten des in $(FF')^{-\frac{2u+1}{2}}$ mit $\alpha^k\beta^l$ multiplicirten Gliedes bezeichnet, und

$$(19^*)\qquad M(k,\, l) = \Sigma N(\tau, \sigma)\, p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}$$

so dass überhaupt $N(\tau, \sigma)$ den Coefficienten des in $M(k, l)$ mit $p^{k-2\tau}q^{l-2\sigma}$ multiplicirten Gliedes bezeichnet, so erhält man sogleich

$$(20)\quad N(\tau,\sigma) = \frac{\Pi(2u+2v+2w)\,\Pi(2u+2\tau+2\sigma)\,(\Pi(u))^2}{2^{2n}\,\Pi(u+v+w)\,\Pi(u+\tau+\sigma)\,(\Pi(2u))^2\,\Pi(v)\,\Pi(w)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma)}$$

wo

$$n = k + l,\quad v = k - \tau,\quad w = l - \sigma$$

ist. Die eine Summation des Ausdrucks (19*) muss

$$\text{von } \tau = 0 \text{ bis } \tau = k$$

und die andere

$$\text{von } \sigma = 0 \text{ bis } \sigma = l$$

ausgedehnt werden. Da aber das Product FF' reel ist, und keine Sinusse enthält, so müssen die Coefficienten der negativen Potenzen von p und q denen der gleichen positiven gleich sein, und gleiches algebraisches Zeichen haben. Man braucht daher die Summation nur bis dahin auszudehnen wo beide Exponenten negativ werden.

18.

Da der r^{te} Binomialcoefficient der m^{ten} Potenz

$$= \frac{\Pi(m)}{\Pi(r)\,\Pi(m-r)}$$

ist, so bekommt man sogleich

$$(20^*)\quad \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{2u} =$$

$$\frac{p^u}{q^u} + \frac{\Pi(2u)}{\Pi(2)\,\Pi(2u-2)}\frac{p^{u-2}}{q^{u-2}} + \frac{\Pi(2u)}{\Pi(u)\,\Pi(2u-4)}\frac{p^{u-4}}{q^{u-4}} + \ldots + \frac{q^u}{p^u}$$

$$-\left\{\frac{\Pi(2u)}{\Pi(1)\,\Pi(2u-1)}\frac{p^{u-1}}{q^{u-1}} + \frac{\Pi(2u)}{\Pi(3)\,\Pi(2u-3)}\frac{p^{u-3}}{q^{u-3}} + \ldots + \frac{\Pi(2u)}{\Pi(1)\,\Pi(2u-1)}\frac{q^{u-1}}{p^{u-1}}\right\}$$

Es ergiebt sich aus diesem Ausdruck, dass die Form der Glieder in dem Coefficienten von $\alpha^k \beta^l$ in der Entwickelung von $\frac{r'}{\Delta}$ schliesslich eine zweifache ist, und dass die Glieder der einen Form, welche aus der ersten Zeile des vorstehenden Ausdrucks entstehen werden, mit

$$p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma}$$

hingegen die der andern Form, die aus der zweiten Zeile hervorgehen werden, mit

$$p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1}$$

multiplicirt sein werden. Setzt man daher

$$\frac{r'}{\Delta} = \Sigma_0^\infty E(k, l) \alpha^k \beta^l$$

so wird der Coefficient $E(k, l)$ die folgende Form haben

$$E(k, l) = \Sigma G(\tau, \sigma) p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma} - \Sigma H(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1} \quad (21)$$

und die Aufgabe besteht zunächst darin, die Ausdrücke dieser G und H Coefficienten durch bekannte Grössen zu erlangen.

Substituirt man zuerst den Ausdruck (19) in (18), so bekommt man

$$E(k, l) = M(k-u, l-u) \frac{\Pi(2u)}{2^{2u}(\Pi(u))^2} \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{2u}$$

$$= M'(k, l) \left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{2u} \quad (22)$$

wenn man

$$M'(k, l) = \frac{\Pi(2u)}{2^{2u}(\Pi(u))^2} M(k-u, l-u)$$

setzt. Setzt man andrer Seits

$$M'(k, l) = \Sigma N'(\tau, \sigma) \,.\, p^{k-2\tau-u} q^{l-2\sigma-u} \quad (23)$$

dann giebt der Ausdruck (20)

$$N'(\tau, \sigma) = \frac{\Pi(2v+2w-2u)\, \Pi(2u+2\tau+2\sigma)}{2^{2n-2u}\, \Pi(v+w-u)\, \Pi(\tau+\sigma+u)\, \Pi(2u)\, \Pi(v-u)\, \Pi(w-u)\, \Pi(\tau)\, \Pi(\sigma)} \quad (24)$$

indem durch die Substitutionen $k-u$ statt k, und $l-u$ statt l

$$n \text{ in } n-2u, \; v \text{ in } v-u, \text{ und } w \text{ in } w-u$$

übergehen. Schreibt man nun zur Abkürzung

$$\left(\sqrt{\frac{q}{p}} - \sqrt{\frac{p}{q}}\right)^{2u} = X - X'$$

und versteht unter X die erste, und unter $-X'$ die zweite Zeile des Ausdrucks rechter Hand in der Gleichung (20*), so wird vermöge der Gleichungen (21), (22) und (23), zuerst

$$\Sigma G(\tau, \sigma) p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma} = \Sigma X N'(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-u} q^{l-2\sigma-u}$$

$$\Sigma H(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1} = \Sigma X' N'(\tau, \sigma) p^{k-2\tau-u} q^{l-2\sigma-u}$$

und da diese Gleichungen identisch sein müssen, so bekommt man durch die Substitution der Ausdrücke von X und X′ in dieselben sogleich

$$G(\tau,\sigma) = \Sigma \Big\{ N'(\tau, \sigma-u) + \frac{\Pi(2u)}{\Pi(2)\,\Pi(2u-2)} N'(\tau-1, \sigma-u+1) + \dots$$
$$+ \frac{\Pi(2u)}{\Pi(2)\,\Pi(2u-2)} N'(\tau-u+1, \sigma-1) + N'(\tau-u, \sigma) \Big\}$$
$$H(\tau,\sigma) = \Sigma \Big\{ \frac{\Pi(2u)}{\Pi(1)\,\Pi(2u-1)} N'(\tau, \sigma-u+1) + \frac{\Pi(2u)}{\Pi(3)\,\Pi(2u-3)} N'(\tau-1, \sigma-u+2) + \dots$$
$$+ \frac{\Pi(2u)}{\Pi(3)\,\Pi(2u-3)} N'(\tau-u+2, \sigma-1) + \frac{\Pi(2u)}{\Pi(1)\,\Pi(2u-1)} N'(\tau-u+1, \sigma) \Big\}$$

wo die Summationen sich auf u beziehen, und auf alle Werthe desselben ausgedehnt werden müssen, die Glieder geben, die nicht Null werden.

19.

Substituirt man nun für die N' Coefficienten ihren Ausdruck (24) in die oben erhaltenen Ausdrücke, so ergiebt sich

$$G(\tau, \sigma) = KT, \quad H(\tau, \sigma) = K'T' \tag{25}$$

wenn

$$K = \frac{\Pi(2v+2w)\,\Pi(2\tau+2\sigma)}{2^{2n}\,\Pi(v+w)\,\Pi(\tau+\sigma)\,\Pi(v)\,\Pi(w)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma)}$$

$$T = \Sigma \Big\{ \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(\sigma)}{\Pi(v-u)\,\Pi(\sigma-u)\,\Pi(2u)} + \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(w)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma)}{\Pi(v-u+1)\,\Pi(\sigma-u+1)\,\Pi(w-1)\,\Pi(\tau-1)\,\Pi(2u-2)\,\Pi(2)}$$
$$+ \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(w)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma)}{\Pi(v-u+2)\,\Pi(\sigma-u+2)\,\Pi(w-2)\,\Pi(\tau-2)\,\Pi(2u-4)\,\Pi(4)} + \dots$$
$$+ \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(w)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma)}{\Pi(w-u+1)\,\Pi(\tau-u+1)\,\Pi(v-1)\,\Pi(\sigma-1)\,\Pi(2u-2)\,\Pi(2)}$$
$$+ \frac{2^{2u}\,\Pi(w)\,\Pi(\tau)}{\Pi(w-u)\,\Pi(\tau-u)\,\Pi(2u)} \Big\}$$

$$K' = \frac{\Pi(2v+2w-2)\,\Pi(2\tau+2\sigma+2)}{2^{2n}\,\Pi(v+w-1)\,\Pi(\tau+\sigma+1)\,\Pi(v)\,\Pi(w-1)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma+1)}$$

$$T' = \Sigma \Big\{ \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(\sigma+1)}{\Pi(v-u)\,\Pi(\sigma-u+1)\,\Pi(2u-1)\,\Pi(1)}$$
$$+ \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(w-1)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma+1)}{\Pi(v-u+1)\,\Pi(\sigma-u+2)\,\Pi(w-2)\,\Pi(\tau-1)\,\Pi(2u-3)\,\Pi(3)} + \dots$$
$$+ \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(w-1)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma+1)}{\Pi(w-u+1)\,\Pi(\tau-u+2)\,\Pi(v-2)\,\Pi(\sigma-1)\,\Pi(2u-3)\,\Pi(3)}$$
$$+ \frac{2^{2u}\,\Pi(v)\,\Pi(w-1)\,\Pi(\tau)\,\Pi(\sigma+1)}{\Pi(w-u)\,\Pi(\tau-u+1)\,\Pi(v-1)\,\Pi(\sigma)\,\Pi(2u-1)\,\Pi(1)} \Big\}$$

gesetzt wird. Die Summationen dieser Ausdrücke für T und T' müssen so ausgeführt werden wie am Ende des vor. Art. angeführt wurde. Man sieht hieraus leicht, dass in Bezug auf T die Summation sich, wenn

$$\sigma < v$$

im ersten Gliede von $u = 0$ bis $u = \sigma$
- zweiten — - $u = 1$ - $u = \sigma + 1$
- dritten — - $u = 2$ - $u = \sigma + 2$

u. s. w.

und wenn

$$\sigma > v$$

im ersten Gliede von $u = 0$ bis $u = v$
- zweiten — - $u = 1$ - $u = v + 1$
- dritten — - $u = 2$ - $u = v + 2$

u. s. w.

erstrecken muss. Betrachtet man den Ausdruck für T näher, so findet man, dass das letzte Glied mit dem ersten, das vorletzte mit dem zweiten, u. s. w. identisch wird, wenn man in jenen w in v, und τ in σ verwandelt, und es ist leicht einzusehen, dass dieses so sein muss. Man kann daher die Grenzen der Summation auch so ausdrücken. Sie erstreckt sich, wenn

$$\tau < w$$

im letzten Gliede von $u = 0$ bis $u = \tau$
- vorletzten ——— $u = 1$ - $u = \tau + 1$

u. s. w.

und wenn

$$\tau > w$$

im letzten Gliede von $u = 0$ bis $u = w$
- vorletzten ——— $u = 1$ - $u = w + 1$

u. s. w.

In Bezug auf die Summation des Ausdrucks für T' findet ein ganz analoges Verhalten statt.

20.

Um diese Ausdrücke für T und T' näher kennen zu lernen, ist es hinreichend die ersten Glieder derselben für

$$u = 0, \; u = 1, \; u = 2, \text{ etc.}$$

auszuschreiben. Erwägt man dass allgemein

$$\Pi(z + n) = (z + 1)(z + 2)(z + 3) \ldots (z + n) \, \Pi(z)$$

ist, wenn n eine ganze und positive Zahl bezeichnet, so findet man leicht, dass

$$T = 1 + 2\,\frac{v.\sigma}{1.1} + 2^2\,\frac{v.v-1.\sigma.\sigma-1}{1.2.1.2} + 2^3\,\frac{v.v-1.v-2.\sigma.\sigma-1.\sigma-2}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}$$
$$+ 2\,\frac{w.\tau}{1.1} + 2^2\,\frac{w.\tau}{1.1}\cdot\frac{v.\sigma}{1.1} + 2^3\,\frac{w.\tau}{1.1}\cdot\frac{v.v-1.\sigma.\sigma-1}{1.2.1.2} + \text{etc.}$$
$$+ 2^2\,\frac{w.w-1.\tau.\tau-1}{1.2.1.2} + 2^3\,\frac{w.w-1.\tau.\tau-1}{1.2.1.2}\cdot\frac{v.\sigma}{1.1} + 2^4\,\frac{w.w-1.\tau.\tau-1}{1.2.1.2}\cdot\frac{v.v-1.\sigma.\sigma-1}{1.2.1.2} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

$$T' = 2^2 v(\sigma+1) + 2^3 v(\sigma+1)\,\frac{v-1.\sigma}{3.1} + 2^4 v(\sigma+1)\,\frac{v-1.v-2.\sigma.\sigma-1}{3.5.1.2} + 2^5 v(\sigma+1)\,\frac{v-1.v-2.v-3.\sigma.\sigma-1.\sigma-2}{3.5.7.1.2.3} + \text{etc.}$$
$$+ 2^3 v(\sigma+1)\,\frac{w-1.\tau}{3.1} + 2^4 v(\sigma+1)\,\frac{w-1.\tau}{3.1}\cdot\frac{v-1.\sigma}{3.1} + 2^5 v(\sigma+1)\,\frac{w-1.\tau}{3.1}\cdot\frac{v-1.v-2.\sigma.\sigma-1}{3.5.1.2} + \text{etc.}$$
$$+ 2^4 v(\sigma+1)\,\frac{w-1.w-2.\tau.\tau-1}{3.5.1.2} + 2^5 v(\sigma+1)\,\frac{w-1.w-2.\tau.\tau-1}{3.5.1.2}\cdot\frac{v-1.\sigma}{3.1} + 2^6 v(\sigma+1)\,\frac{w-1.w-2.\tau.\tau-1}{3.5.1.2}\cdot\frac{v-1.v-2.\sigma.\sigma-1}{3.5.1.2} + \text{etc.}$$
$$+ \text{etc.}$$

*) wo in beiden Richtungen die Glieder so weit fortgesetzt werden müssen, bis sie Null werden, welches stets der Fall ist, da v, w, τ und σ ganze und positive Zahlen sind. Die vorstehenden Ausdrücke folgen einem einfachen Gesetze, und man erkennt leicht daraus, dass T wie T' aus dem Product von zwei Factoren bestehen, von welchen der eine blos Function von v und σ, und der andere blos Function von w und τ ist. Der erste dieser Factoren in T' lässt sich überdies noch in zwei Factoren zerlegen. Setzt man nämlich

$$V = 1 + 2\,\frac{v.\sigma}{1.1} + 2^2\,\frac{v.v-1.\sigma.\sigma-1}{1.2.1.2} + 2^3\,\frac{v.v-1.v-2.\sigma.\sigma-1.\sigma-2}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}$$
$$W = 1 + 2\,\frac{w.\tau}{1.1} + 2^2\,\frac{w.w-1.\tau.\tau-1}{1.2.1.2} + 2^3\,\frac{w.w-1.w-2.\tau.\tau-1.\tau-2}{1.2.3.1.2.3} + \text{etc.}$$

so ist
$$T = VW$$
und setzt man ferner
$$V' = 1 + 2\,\frac{v-1.\sigma}{3.1} + 2^2\,\frac{v-1.v-2.\sigma.\sigma-1}{3.5.1.2} + 2^3\,\frac{v-1.v-2.v-3.\sigma.\sigma-1.\sigma-2}{3.5.7.1.2.3} + \text{etc.}$$
$$W' = 1 + 2\,\frac{w-1.\tau}{3.1} + 2^2\,\frac{w-1.w-2.\tau.\tau-1}{3.5.1.2} + 2^3\,\frac{w-1.w-2.w-3.\tau.\tau-1.\tau-2}{3.5.7.1.2.3} + \text{etc.}$$
so wird
$$T' = 4v(\sigma+1)\,V'W'$$

---

*) Ich bemerke hiezu, dass wenn man statt dieser die letzten Glieder von T und T' für $u = 0$, $u = 1$, etc. ausschreibt, man dieselben Ausdrücke bekommt, welches auch nicht anders sein kann.

21.

Die eben gefundenen Functionen V, W, V' und W' sind Gaussische hypergeometrische Reihen, in welchen das vierte Element gleich Eins ist. Vergleicht man sie nemlich mit der im § I. angeführten allgemeinen Form dieser Reihen, so findet man

in V

$$\alpha = -v, \quad \beta = -\sigma, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}, \quad x = 1$$

in W

$$\alpha = -w, \quad \beta = -\tau, \quad \gamma = \tfrac{1}{2}, \quad x = 1$$

in V'

$$\alpha = -v+1, \quad \beta = -\sigma, \quad \gamma = \tfrac{3}{2}, \quad x = 1$$

in W'

$$\alpha = -w+1, \quad \beta = -\tau, \quad \gamma = \tfrac{3}{2}, \quad x = 1$$

Da die beiden ersten Elemente dieser Reihen ganze und negative Zahlen sind, so kann man sie durch die Summationsformel (E) des Art. 7. summiren, und erhält dadurch unmittelbar

$$V = \frac{\Pi(-\frac{1}{2})\,\Pi(v+\sigma-\frac{1}{2})}{\Pi(v-\frac{1}{2})\,\Pi(\sigma-\frac{1}{2})}$$

$$W = \frac{\Pi(-\frac{1}{2})\,\Pi(w+\tau-\frac{1}{2})}{\Pi(w-\frac{1}{2})\,\Pi(\tau-\frac{1}{2})}$$

$$V' = \frac{\Pi(\frac{1}{2})\,\Pi(v+\sigma-\frac{1}{2})}{\Pi(v-\frac{1}{2})\,\Pi(\sigma+\frac{1}{2})}$$

$$W' = \frac{\Pi(\frac{1}{2})\,\Pi(w+\tau-\frac{1}{2})}{\Pi(w-\frac{1}{2})\,\Pi(\tau+\frac{1}{2})}$$

wo die Π Functionen in ihrer allgemeinen Bedeutung genommen werden müssen, aber durch die Reductionsformel

$$\Pi(z-\tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{-2z}\, \frac{\Pi(2z)}{\Pi(z)}$$

wo π das Verhältniss des Kreisumfanges zum Durchmesser bezeichnet, in solche verwandelt werden können, deren Argumente ganze und positive Zahlen, die Null eingeschlossen, sind. Es wird dadurch

$$V = \frac{\Pi(2v+2\sigma)\,\Pi(v)\,\Pi(\sigma)}{\Pi(v+\sigma)\,\Pi(2v)\,\Pi(2\sigma)}$$

$$W = \frac{\Pi(2w+2\tau)\,\Pi(w)\,\Pi(\tau)}{\Pi(w+\tau)\,\Pi(2w)\,\Pi(2\tau)}$$

$$V' = 2\,\frac{\Pi(2v+2\sigma)\,\Pi(v)\,\Pi(\sigma+1)}{\Pi(v+\sigma)\,\Pi(2w)\,\Pi(2\sigma+2)}$$

$$W' = 2\,\frac{\Pi(2w+2\tau)\,\Pi(w)\,\Pi(\tau+1)}{\Pi(w+\tau)\,\Pi(2w)\,\Pi(2\tau+2)}$$

Man kann diese Ausdrücke, so wie die des vorvor. Art. für K und K' noch vereinfachen. Aus der für ganze und positive Zahlen stattfindenden Formel

$$\Pi(z) = 1.2.3\ldots z$$

folgt leicht die Reductionsformel

$$\frac{\Pi(2z)}{\Pi(z)} = 2^z.\,1.3.5\ldots 2z-1$$

Setzt man daher allgemein

$$\varrho(z, z') = \frac{1.3.5\ldots\ldots 2(z+z')-1}{2.4.6\ldots 2z.\,2.4.6\ldots 2z'}$$

$$\pi(z, z') = \frac{2z+1}{1}\cdot\frac{2z+3}{3}\cdot\frac{2z+5}{5}\cdots\frac{2(z+z')-1}{2z'-1}$$

und wegen $\Pi(0) = 1$ ins Besondere

$$\varrho(0,0) = 1,\quad \varrho(0,z) = \frac{1.3.5\ldots 2z-1}{2.4.6\ldots 2z}$$

$$\pi(0,0) = 1.\quad \pi(0,z) = 1$$

so wird

$$K = \varrho(v, w).\,\varrho(\tau, \sigma),\quad K' = \varrho(v, w-1).\,\varrho(\tau, \sigma+1)$$

$$V = \pi(v, \sigma)\quad,\quad V' = \frac{\pi(v, \sigma)}{2\sigma+1}$$

$$W = \pi(w, \tau)\quad,\quad W' = \frac{\pi(w, \tau)}{2\tau+1}$$

also

$$T = \pi(v, \sigma).\,\pi(w, \tau),\quad T' = \frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)}\,\pi(v, \sigma).\,\pi(w, \tau)$$

und wenn man diese in die (25) substituirt,

$$G(\tau, \sigma) = \varrho(v, w).\,\varrho(\tau, \sigma).\,\pi(w, \tau).\,\pi(v, \sigma)$$

$$H(\tau, \sigma) = \frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)}\,\varrho(v, w-1).\,\varrho(\tau, \sigma+1).\,\pi(w, \tau).\,\pi(v, \sigma)$$

womit die im Art. 18 angekündigte Aufgabe gelöst ist. In Bezug auf die ϱ und π Functionen bemerke ich noch Folgendes. Dass

$$\varrho(z, z') = \varrho(z', z)$$

ist, oder dass man die beiden Argumente der ϱ Functionen mit einander verwechseln darf, ist aus dem obigen Ausdruck dieser Function ohne Weiteres sichtbar, aber es ist auch stets

$$\pi(z, z') = \pi(z', z)$$

welches durch nähere Betrachtung des obigen Ausdrucks für diese Function leicht zu finden ist.

22.

Durch Hülfe der eben gefundenen Ausdrücke für die G und H Coefficienten giebt die Gleichung (21) sogleich

$$E(k, l) = \Sigma \varrho(v, w) \cdot \varrho(\tau, \sigma) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma)\, p^{k-2\tau}\, q^{l-2\sigma} \tag{26}$$
$$- \Sigma \frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)} \varrho(v, w-1) \cdot \varrho(\tau, \sigma+1) \cdot \pi(w, \tau) \cdot \pi(v, \sigma)\, p^{k-2\tau-1}\, q^{l-2\sigma-1}$$

Dieses ist der einfache und allgemeine analytische Ausdruck der Coefficienten der Entwickelung des Ausdrucks (15) von $\frac{r'}{\Delta}$ nach den Potenzen von α und β, und es lassen sich in demselben überdies noch die beiden Glieder in Eines zusammen ziehen, wie weiter unten gezeigt werden wird. Fürs Erste werde ich aber dieselben von einander abgesondert stehen lassen, weil ihre numerische Berechnung in dieser Gestalt Vortheile darbietet, die ich weiter unten näher erörtern werde. Für jedes paar gegebene Werthe von k und l müssen im ersten Gliede des vorstehenden Ausdrucks die Summationen sich

$$\text{von } \tau = 0 \text{ bis } \tau = k$$
$$\text{und von } \sigma = 0 \text{ bis } \sigma = l$$

hingegen im zweiten Gliede sich

$$\text{von } \tau = 0 \text{ bis } \tau = k - 1$$
$$\text{und von } \sigma = 0 \text{ bis } \sigma = l - 1$$

erstrecken. Die Summe der Glieder, die mit $\alpha^k \beta^l$ multiplicirt sind, ist also

$$= (k+1)(l+1) + kl$$

und das erste Glied dieses Ausdrucks giebt die Summe der positiven, das zweite Glied dagegen die Summe der negativen Glieder an. Ich bemerke noch, dass in Folge des Art. 17 stets

$$v = k - \tau, \; w = l - \sigma$$

ist.

Ehe ich weiter gehe, wird es wohl nicht undienlich sein zur Erläuterung des obigen Ausdrucks ihn für ein paar bestimmte Werthe von k und l vollständig auszuschreiben. Sei $k = 2$ und $l = 3$, dann wird zufolge desselben der Coefficient von $\alpha^2 \beta^3$ in $\frac{r'}{\Delta} =$

$$
\begin{aligned}
E(2,3) = {} & \varrho(2,3).\varrho(0,0).\pi(2,0).\pi(3,0)p^2q^3 && - 4\tfrac{2.1}{1.1}\varrho(2,2).\varrho(0,1).\pi(3,0).\pi(2,0)pq^2 \\
& + \varrho(2,2).\varrho(0,1).\pi(2,1).\pi(2,0)p^2q && - 4\tfrac{2.2}{3.1}\varrho(2,1).\varrho(0,2).\pi(2,0).\pi(2,1)pq^0 \\
& + \varrho(2,1).\varrho(0,2).\pi(2,2).\pi(1,0)p^2q^{-1} && - 4\tfrac{2.3}{5.1}\varrho(2,0).\varrho(0,3).\pi(1,0).\pi(2,2)pq^{-2} \\
& + \varrho(2,0).\varrho(0,3).\pi(2,3).\pi(0,0)p^2q^{-3} && - 4\tfrac{1.1}{1.3}\varrho(1,2).\varrho(1,1).\pi(3,1).\pi(1,0)p^{-1}q^2 \\
& + \varrho(1,3).\varrho(1,0).\pi(1,0).\pi(3,1)p^0q^3 && - 4\tfrac{1.2}{3.3}\varrho(1,1).\varrho(1,2).\pi(2,1).\pi(1,1)p^{-1}q^0 \\
& + \varrho(1,2).\varrho(1,1).\pi(1,1).\pi(2,1)p^0q && - 4\tfrac{1.3}{5.3}\varrho(1,0).\varrho(1,3).\pi(1,1).\pi(1,2)p^{-1}q^{-2} \\
& + \varrho(1,1).\varrho(2,1).\pi(1,2).\pi(1,1)p^0q^{-1} \\
& + \varrho(1,0).\varrho(1,3).\pi(1,3).\pi(1,0)p^0q^{-3} \\
& + \varrho(0,3).\varrho(2,0).\pi(0,0).\pi(3,2)p^{-2}q^3 \\
& + \varrho(0,2).\varrho(2,1).\pi(0,1).\pi(2,2)p^{-2}q \\
& + \varrho(0,1).\varrho(2,2).\pi(0,2).\pi(1,2)p^{-2}q^{-1} \\
& + \varrho(0,0).\varrho(2,3).\pi(0,3).\pi(0,2)p^{-2}q^{-3}
\end{aligned}
$$

In den positiven Gliedern dieses Ausdrucks erkennt man sogleich, dass die Coefficienten der negativen Potenzen von p und q denen der bezüglichen positiven gleich sind, aber in den negativen Gliedern tritt diese Eigenschaft erst nach der Substitution der numerischen Werthe der Coefficienten hervor. Es wird dadurch

$$
\begin{aligned}
E(2,3) = {} & \frac{1.3.5.7.9}{2.4.2.4.6}p^2q^3 && - 4\,\frac{2.1.1.3.5.7.1}{1.1.2.4.2.4.2}pq^2 \\
& + \frac{1.3.5.7.1.5}{2.4.2.4.2.1}p^2q && - 4\,\frac{2.2.1.3.5.1.3.5}{3.1.2.4.2.2.4.1}pq^0 \\
& + \frac{1.3.5.1.3.5.7}{2.4.2.2.4.1.3}p^2q^{-1} && - 4\,\frac{2.3.1.3.1.3.5.5.7}{5.1.2.4.2.4.6.1.3}pq^{-2} \\
& + \frac{1.3.1.3.5.5.7.9}{2.4.2.4.6.1.3.5}p^2q^{-3} && - 4\,\frac{1.1.1.3.5.1.3.7}{1.3.2.2.4.2.2.1}p^{-1}q^2 \\
& + \frac{1.3.5.7.1.7}{2.2.4.6.2.1}p^0q^3 && - 4\,\frac{1.2.1.3.1.3.5.5.3}{3.3.2.2.2.2.4.1.1}p^{-1}q^0 \\
& + \frac{1.3.5.1.3.3.5}{2.2.4.2.2.1.1}p^0q && - 4\,\frac{1.3.1.1.3.5.7.3.3.5}{5.3.2.2.2.4.6.1.1.3}p^{-1}q^{-2} \\
& + \frac{1.3.1.3.5.5.3}{2.2.2.2.4.1.1}p^0q^{-1} \\
& + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

wo in den negativen Gliedern die eben genannte Eigenschaft leicht zu erkennen ist. Der Uebergang zum Reellen kostet keine Mühe, wenn man sich erinnert, dass

$$p^m q^{m'} + \frac{1}{p^m q^{m'}} = 2 \cos \{m (U' - U) + m' (U' + U)\}$$

ist. Man braucht also nur, ohne Rücksicht auf die entgegengesetzten Glieder zu nehmen,

$$2 \cos \{(m + m') U' - (m - m') U\} \text{ für } p^m q^{m'}$$

zu setzen; bei den mit $p^0 q^0$ multiplicirten Gliedern, oder mit andern Worten bei den Gliedern, welche die imaginären Exponentialfunctionen nicht enthalten, fällt die Multiplication mit 2 weg. Der obige Ausdruck wird daher, wenn man zum Reellen übergeht,

$$\begin{aligned} E(2,3) = & \, 2 \frac{1.3.5.7.9}{2.4.2.4.6} \cos (5U' + U) && - 8 \frac{2.3.5.7.1}{2.4.2.4.2} \cos (3U' + U) \\ & + 2 \frac{1.3.5.7.5}{2.4.2.4.2} \cos (3U' - U) && - 8 \frac{2.2.3.5.3.5}{3.2.4.2.2.4} \cos (U' - U) \\ & + 2 \frac{1.3.5.3.5.7}{2.4.2.2.4.3} \cos (U' - 3U) && - 8 \frac{2.3.3.3.5.5.7}{5.2.4.2.4.6.3} \cos (U' + 3U) \\ & + 2 \frac{1.3.3.5.5.7.9}{2.4.2.4.6.3.5} \cos (U' + 5U) \\ & + 2 \frac{1.3.5.7.7}{2.2.4.6.2} \cos (3U' + 3U) \\ & + 2 \frac{3.5.3.3.5}{2.2.4.2.2} \cos (U' + U) \end{aligned}$$

23.

Bevor ich zu den Coefficienten der Potenzen von r und r' übergehe, will ich statt der zu $U' - U$ und $U' + U$ gehörigen, imaginären Exponentialfunctionen die zu U' und U gehörigen einführen. Sei

$$2 \cos U = u + \frac{1}{u}, \quad 2 \cos U' = u' + \frac{1}{u'}$$

dann erhalten wir folgende Relationen

$$p = \frac{u'}{u}, \quad q = uu'$$

hieraus, und wenn wir wie oben $k + l = n$ setzen, ergiebt sich

$$p^{k-2\tau} q^{l-2\sigma} = u'^{n-2\tau-2\sigma} u^{-(n-2l-2\tau+2\sigma)}$$

$$p^{k-2\tau-1} q^{l-2\sigma-1} = u'^{n-2\tau-2\sigma-2} u^{-(n-2l-2\tau+2\sigma)}$$

Setzen wir nun

$$\tau + \sigma = f, \quad l + \tau - \sigma = f + g$$

so gehen in den Ausdruck (26) die Exponentialfunctionen über in

$$u'^{n-2f} u^{-(n-2f-2g)} \text{ und } u'^{n-2f-2} u^{-(n-2f-2g)}$$

aber da dieser Ausdruck reel sein muss, so darf man dafür auch

$$u'^{-(n-2f)} u^{n-2f-2g} \text{ und } u'^{-(n-2f-2)} u^{n-2f-2g}$$

schreiben. Da ferner $\triangle^2$ eine symmetrische Function von U und U' ist, so darf man auch in diesen Exponentialfunctionen u' und u mit einander verwechseln, und also

$$u^{n-2f}\,u'^{-(n-2f-2g)} \text{ und } u^{n-2f-2}\,u'^{-(n-2f-2g)}$$

in dem Ausdruck (26) schreiben, ohne in den Coefficienten derselben eine Aenderung vornehmen zu müssen. Es wird daher, wenn man auch k eliminirt,

$$(27)\quad E(n-l,l) = \Sigma\rho(v,w)\,.\,\rho(\tau,\sigma)\,.\,\pi(w,\tau)\,.\,\pi(v,\sigma)\,u^{n-2f}u'^{-(n-2f-2g)}$$
$$-\Sigma\frac{4v(\sigma+1)}{(2\sigma+1)(2\tau+1)}\rho(v,w-1)\,.\,\rho(\tau,\sigma+1)\,.\,\pi(w,\tau)\,.\,\pi(v,\sigma)\,u^{n-2f-2}u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo

$$f = \tau + \sigma, \qquad g = l - 2\sigma$$
$$v = n - l - \tau, \quad w = l - \sigma$$

gesetzt werden muss.

24.

Es ist schon im Art. 16. gezeigt worden, dass man den Coefficienten von $\left(\frac{r}{r'}\right)^n$ durch die Summation der Coefficienten von $\alpha^{n-l}\beta^l$, deren Ausdruck eben ermittelt worden ist, erhält; wenn man bei dieser Summation n unveränderlich annimmt. Diese Summation soll jetzt ausgeführt werden. Setzt man

$$\frac{r'}{\triangle} = \Sigma_{n=0}^{n=\infty}\, D_n\left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

so ist D_n der Coefficient, dessen Ausdruck durch die bez. Summation der E Coefficienten ermittelt werden muss. Der Ausdruck (27) dieser Coefficienten giebt aber leicht zu erkennen, dass D_n folgende Form haben muss,

$$D_n = \Sigma\, C\,(n-2f,\ -(n-2f-2g))\,.\,u^{n-2f}u'^{-(n-2f-2g)}$$

wo die eine Summation sich

$$\text{von } f = 0 \text{ bis } f = n$$

und die andere sich

$$\text{von } g = -f \text{ bis } g = n - f$$

erstrecken muss. Aber da $\triangle$ reel ist, so ist nothwendig, wenn m und m' irgend zwei Indices bezeichnen,

$$C\,(m, m') = C\,(-m, -m')$$

und da $\triangle$ in Bezug auf U und U' symmetrisch ist, so muss auch

$$C\,(m, m') = C\,(m', m)$$

sein. Man braucht also in der That die Summation,

wenn n eine grade Zahl ist,

nur von $f = 0$ bis $f = \frac{1}{2}n$

und von $g = 0$ bis $g = n - 2f$,

und wenn n eine ungrade Zahl ist,

nur von $f = 0$ bis $f = \frac{n-1}{2}$

und von $g = 0$ bis $g = n - 2f$

auszudehnen, um alle Glieder von D_n zu erhalten, deren Coefficienten einander nicht gleich sein müssen.

Es ist nun zunächst der Ausdruck der C Coefficienten zu entwickeln. Da einestheils

$$\frac{r'}{\triangle} = \Sigma E\,(n - l,\, l)\; \alpha^{n-l} \beta^{l}$$

und anderntheils

$$\frac{r'}{\triangle} = \Sigma\, D_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

ist, so ergiebt sich, wenn man die Werthe

$$\alpha = \frac{r}{r'} \cos^2 \tfrac{1}{2} J, \quad \beta = \frac{r}{r'} \sin^2 \tfrac{1}{2} J$$

substituirt,

$$D_n = \Sigma E\,(n - l,\, l) \,.\, \cos^{2n} \tfrac{1}{2} J \operatorname{tg}^{2l} \tfrac{1}{2} J$$

und wenn man (27) substituirt,

$$D_n = \cos^{2n} \tfrac{1}{2} J\; \Sigma \operatorname{tg}^{2l} \tfrac{1}{2} J \left\{ P u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)} - P' u^{n-2f-2} u'^{-(n-2f-2g)} \right\}$$

wo zur Abkürzung

$$P = \varrho\,(v, w) \,.\, \varrho\,(\tau, \sigma) \,.\, \pi\,(w, \tau) \,.\, \pi\,(v, \sigma)$$

$$P' = \frac{4v\,(\sigma + 1)}{(2\sigma + 1)\,(2\tau + 1)}\; \varrho\,(v, w - 1) \,.\, \varrho\,(\tau, \sigma + 1) \,.\, \pi\,(w, \tau) \,.\, \pi\,(v, \sigma)$$

geschrieben ist. Um hieraus den Ausdruck der C Coefficienten zu erhalten, ist nichts weiter zu thun, wie den Exponenten von u im zweiten Gliede dem im ersten Gliede gleich zu machen. Dieses bewirkt man, indem man im zweiten Gliede $f - 1$ statt f, und $g + 1$ statt g schreibt. Erwägt man dass hieraus vermöge der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} f &= \tau + \sigma, & g &= l - 2\sigma \\ v &= n - l - \tau, & w &= l - \sigma \end{aligned}\right\} \qquad (28)$$

die gleichzeitige Verwandelung von

l in $l + 1$

τ in $\tau - 1$

w in $w + 1$

bedingt wird, während v und σ unverändert bleiben, so bekommt man sogleich

$$C(n-2f,\ -(n-2f-2g)) = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\,\Sigma\,\mathrm{tg}^{2l}\tfrac{1}{2}J\,\{P - Q\,\mathrm{tg}^{2}\tfrac{1}{2}J\}$$

wo P denselben Werth wie oben hat, aber

$$Q = \frac{4v\,(\sigma+1)}{(2\sigma+1)\,(2\tau-1)}\,\varrho\,(v, w)\,.\,\varrho\,(\tau-1,\ \sigma+1)\,.\,\pi\,(w+1,\ \tau-1)\,.\,\pi\,(v, \sigma)$$

ist. Da in jedem CCoefficienten ausser n auch f und g feste und unveränderliche Werthe haben, so hängt der vorstehende Ausdruck nur von einer einfachen Summation in Bezug auf σ ab. Um dieses hervorzuheben ziehe ich aus den Gleichungen (28) durch die Elimination die folgenden

$$\begin{aligned} v &= n-f-g-\sigma \\ w &= g+\sigma \\ \tau &= f-\sigma \\ l &= g+2\sigma \end{aligned}$$

substituirt man diese, so ergiebt sich schliesslich

$$C(n-2f,\ -(n-2f-2g)) = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\,\Sigma\,\{P\,\mathrm{tg}^{4\sigma}\tfrac{1}{2}J - Q\,\mathrm{tg}^{4\sigma+2}\tfrac{1}{2}J\} \tag{29}$$

wo

$$P = \varrho\,(n-f-g-\sigma,\ g+\sigma)\,.\,\varrho\,(f-\sigma,\ \sigma)\,.\,\pi\,(n-f-g-\sigma,\ \sigma)\,.\,\pi\,(g+\sigma,\ f-\sigma)$$

$$Q = \frac{4\,(n-f-g-\sigma)\,(\sigma+1)}{(2f-2\sigma-1)\,(2\sigma+1)}\,\varrho\,(n-f-g-\sigma,\ g+\sigma)\,.\,\varrho\,(f-\sigma-1,\ \sigma+1)\,.\,\pi\,(n-f-g-\sigma,\ \sigma)\,.\,\pi\,(g+\sigma+1,\ f-\sigma-1)$$

ist, und die Summation im ersten Gliede

von $\sigma = 0$ bis $\sigma = f$

hingegen im zweiten Gliede

von $\sigma = 0$ bis $\sigma = f-1$

ausgedehnt werden muss.

25.

Die Coefficienten in der Gruppe der CCoefficienten, die denselben Werthen von n und f angehören, besitzen die Eigenschaft, dass sie sich wiederholen, so dass der erste dem letzten, der zweite dem vorletzten, u. s. w. gleich ist. Um dieses zu beweisen schreibe ich den eben gefundenen Ausdruck wie folgt.

$$C\,(n-2f,\ -(n-2f-2g)) =$$

$$\cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J \left\{ \begin{array}{l} a\,(g, 0) + a\,(g, 1)\,\mathrm{tg}^{4}\tfrac{1}{2}J + a\,(g, 2)\,\mathrm{tg}^{8}\tfrac{1}{2}J + \ldots + a\,(g, f)\,\mathrm{tg}^{4f}\tfrac{1}{2}J \\ -\,b\,(g, 0)\,\mathrm{tg}^{2}\tfrac{1}{2}J - b\,(g, 1)\,\mathrm{tg}^{6}\tfrac{1}{2}J - \ldots - b\,(g, f-1)\,\mathrm{tg}^{4f-2}\tfrac{1}{2}J \end{array} \right\}$$

wo also $a(g, 0)$, $a(g, 1)$, etc. $b(g, 0)$, etc. positive Zahlen, und specielle Werthe der oben mit P und Q bezeichneten Coefficienten sind. Ich mache nun darauf aufmerksam, dass der ursprüngliche Ausdruck für Δ^2 seinen Werth nicht ändert, wenn man darin $180^0 - J$ für J, und $-U'$ für U' schreibt, und dass daher dieselbe Eigenschaft auch in der Entwickelung von $\frac{1}{\Delta}$ statt finden muss. Setzt man daher in dem vorstehenden Ausdruck der C Coefficienten

$$180^0 - J \text{ statt } J, \text{ und } n - 2f - g \text{ statt } g$$

so darf er seinen Werth nicht ändern, denn vermöge der zweiten Substitution geht $-(n - 2f - 2g)$ in $+(n - 2f - 2g)$ über. Es entsteht hiedurch

$$C(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) =$$

$$^{2n}\tfrac{1}{2}J \operatorname{cotg}^{2(n-2f-g)}\tfrac{1}{2}J \left\{ \begin{array}{l} a(n-2f-g, 0) + a(n-2f-g, 1) \operatorname{cotg}^4 \tfrac{1}{2}J + \ldots + a(n-2f-g, f) \operatorname{cotg}^{4f}\tfrac{1}{2}J \\ - b(n-2f-g, 0) \operatorname{cotg}^2\tfrac{1}{2}J - b(n-2f-g, 1) \operatorname{cotg}^6\tfrac{1}{2}J - \ldots - b(n-2f-g, f-1) \operatorname{cotg}^{4f-2}\tfrac{1}{2}J \end{array} \right\}$$

Vergleicht man die gleichartigen Glieder dieser beiden Ausdrücke der C Coefficienten mit einander, so erhält man

$$\begin{array}{llll} a(n-2f-g, f) & = a(g, 0) & , \; b(n-2f-g, f-1) & = b(g, 0) \\ a(n-2f-g, f-1) & = a(g, 1) & , \; b(n-2f-g, f-2) & = b(g, 1) \\ \quad \text{etc.} & & \quad \text{etc.} & \\ a(n-2f-g, 1) & = a(g, f-1), & b(n-2f-g, 1) & = b(g, f-2) \\ a(n-2f-g, 0) & = a(g, f) & , \; b(n-2f-g, 0) & = b(g, f-1) \end{array}$$

Jeder a und b Coefficient kommt also zweimal vor, wenn nicht die Anzahl der einen oder andern derselben ungrade ist, in welchem Falle der mittlere derselben nur Einmal vorhanden ist. Man kann, wie ich gleich zeigen werde, durch diese Eigenschaft bei der numerischen Berechnung dieser Coefficienten eine vollständige Controlle ihrer Richtigkeit erhalten.

26.

Da die a und b Coefficienten unabhängig von den Elementen der Bahnen der Himmelskörper sind, und daher in jedem Falle dieselben bleiben, so habe ich sie bis zu $n = 20$ berechnet, und in der Tafel IV dieser Abhandlung angehängt. Ich habe bis zu dieser Grenze alle Coefficienten berechnet, obgleich man meistentheils nicht alle einer jeden Abtheilung braucht. Ich meine dass man für die neuen Planeten hiemit

ausreichen wird, und sollten einzelne Fälle vorkommen, in welchen man sie für einige Werthe mehr von n bedürfte, so habe ich die weitere Berechnung derselben dadurch zu erleichtern gesucht, dass ich die Tafeln I und II für $\varrho\,(z, z')$ und $\pi\,(z, z')$ etwas weiter ausgedehnt habe.

Nicht alle Coefficienten sind nach den obigen Formeln direct berechnet worden, sondern dieses hat nur für die positiven Glieder statt gefunden. In so weit nämlich diese, dem eben bewiesenen Satze zufolge, einander nicht gleich sein müssen, wurde der Ausdruck für P oder

$$(30)\quad a(g,\sigma)=\varrho(n-f-g-\sigma, g+\sigma)\,.\,\varrho(f-\sigma,\sigma)\,.\,\pi(n-f-g-\sigma,\sigma)\,.\,\pi(g+\sigma, f-\sigma)$$

angewandt. Die Berechnung der negativen Glieder oder der b Coefficienten wurde dadurch bewerkstelligt, dass ich den Factor suchte, mit welchem man den nächstvorhergehenden a Coefficienten multipliciren muss, um den b Coefficienten zu erhalten. Es ist dem Vorhergehenden zufolge Q oder

$$b(g,\sigma)=\frac{4\,(n-f-g-\sigma)\,(\sigma+1)}{(2f-2\sigma-1)\,(2\sigma+1)}\,\varrho(n-f-g-\sigma, g+\sigma)\,.\,\varrho(f-\sigma-1,\sigma+1)\,.\,\pi(n-f-g-\sigma,\sigma)\,.\,\pi(g+\sigma+1, f-\sigma-1)$$

Aber aus den Ausdrücken des Art. 21 für die ϱ und π Functionen findet man leicht die Relationen

$$\varrho\,(z-1, z'+1) = \frac{z}{z'+1}\,\varrho\,(z, z')$$

$$\pi\,(z+1, z'-1) = \frac{2z'-1}{2z+1}\,\pi\,(z, z')$$

Wendet man diese auf den vorstehenden Ausdruck an, so findet man

$$(31)\qquad b\,(g,\sigma) = (n-f-g-\sigma)\,.\,\lambda\,(g,\sigma)\,.\,a\,(g,\sigma)$$

wo

$$(32)\qquad \lambda\,(g,\sigma) = \frac{4\,(f-\sigma)}{(2g+2\sigma+1)\,(2\sigma+1)}$$

und also von n unabhängig ist. Diese Art der Berechnung der b Coefficienten ist nicht nur einfacher wie die directe, sondern sie bietet auch eine vollständige Controlle über die Richtigkeit aller berechneten Coefficienten dar. Schreibt man nemlich

$$n-2f-g \text{ statt } g, \text{ und } f-\sigma-1 \text{ statt } \sigma$$

in (31), so entsteht

$$b\,(n-2f-g, f-\sigma-1) = (g+\sigma+1)\,.\,\lambda\,(n-2f-g, f-\sigma-1)\,.\,a\,(n-2f-g, f-\sigma-1)$$

aber die im vor. Art. zwischen den a und b Coefficienten entwickelten Relationen haben den allgemeinen Ausdruck

$$(33)\qquad \begin{cases} a\,(g,\sigma) = a\,(n-2f-g, f-\sigma) \\ b\,(g,\sigma) = b\,(n-2f-g, f-\sigma-1) \end{cases}$$

die vorhergehende Gleichung wird dadurch

$$b\,(g,\sigma) = (g + \sigma + 1)\,.\,\lambda\,(g',\sigma')\,.\,a\,(g,\sigma + 1) \tag{34}$$

wo

$$g' = n - 2f - g,\quad \sigma' = f - \sigma - 1$$

ist. Dieser Ausdruck macht jeden b Coefficienten von dem zunächst nachfolgenden a Coefficienten abhängig, während (31) denselben aus dem zunächst vorhergehenden giebt.

Der Coefficient $\lambda\,(g',\sigma')$ wird aus (32) berechnet, nachdem man darin die numerischen Werthe von g' und σ' statt der von g und σ substituirt hat.

Hat man nun einmal alle a Coefficienten, die einander nicht gleich sind, durch (30) berechnet, und rechnet dann die b Coefficienten erst durch (31), und dann durch (34), dann ist die Berechnung aller Coefficienten controllirt. Man braucht sich bei der Anwendung dieser Controlle nicht speciel um (34) zu bekümmern, denn wenn man bei gegebenen Werthen von n und f durch successive Veränderung der Werthe von g und σ fortfährt alle Coefficienten zu berechnen, so wird man von selbst auf (34) hingeführt. Z. B. für $n = 9$ und $f = 2$ bekommt man, wenn man $g = 1$ und $\sigma = 0$ setzt,

$$b\,(1,0) = 6\,.\,\lambda\,(1,0)\,.\,a\,(1,0);\quad \lambda\,(1,0) = \frac{4.2}{1.3}$$

woraus der Werth von $b\,(1,0)$ folgt, nachdem $a\,(1,0)$ aus (30) berechnet worden ist. Im weiteren Verlaufe der Berechnung der Coefficienten für $n = 9$ und $f = 2$ kommt man auch auf die Werthe $g = 4$ und $\sigma = 1$, und hiemit geben (31) und (32)

$$b\,(4,1) = 2\,.\,\lambda\,(4,1)\,.\,a\,(4,1);\quad \lambda\,(4,1) = \frac{4.1}{11.3}$$

Für dieselben Werthe von n und f zeigen (33) aber, dass

$$b\,(4,1) = b\,(1,0)$$

$$a\,(4,1) = a\,(1,1)$$

es wird also

$$b\,(1,0) = 2\,.\,\lambda\,(4,1)\,.\,a\,(1,1)$$

welche Gleichung den Werth von $b\,(1,0)$ durch $a\,(1,1)$ giebt, und mit (34) offenbar übereinstimmt, wenn man darin ausser den obigen Werthen von n und f, $g = 1$ und $\sigma = 0$ setzt. Aus (30) ergiebt sich für unser Beispiel

$$a\,(1,0) = \frac{1.3.5.\ldots\ldots.13}{2.4.6.\ldots.12.2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{5}{1}$$

$$a\,(1,1) = \frac{1.3.5.\ldots\ldots.13}{2.4.6\ldots10.2.4}\cdot\frac{1.3}{2.2}\cdot\frac{11}{1}\cdot\frac{5}{1}\,.$$

Wenn man nun bei der Berechnung des Logarithmus eines dieser Coefficienten, oder bei der Berechnung des von $\lambda(1,0)$ oder $\lambda(1,1)$ Fehler gemacht hat, so zeigen diese sich durch die Nichtübereinstimmung des durch die beiden vorstehenden Gleichungen doppelt berechneten Werthes von $b(1,0)$.

27.

Der im Vorhergehenden für die C Coefficienten gefundene, allgemeine Ausdruck (29) gilt für jeden Werth der Neigung J, und da man diese immer so wählen kann, dass sie nicht grösser wie 90^0 ist, so folgt, dass $\operatorname{tg} \frac{1}{2} J$ nie grösser wie Eins werden kann. Wenn aber J eine gewisse Grösse übersteigt, dann wird die Berechnung der C Coefficienten durch diesen Ausdruck sehr beschwerlich, weil für grosse Werthe von n die Coefficienten der verschiedenen Potenzen von $\operatorname{tg} \frac{1}{2} J$ sehr gross werden, und die C Coefficienten schliesslich von kleinen Differenzen grosser Zahlen abhängen. Ich habe mich durch Versuche davon überzeugt, dass man für eine Neigung wie die der Pallasbahn — ungefähr 35^0 — sich noch immer des genannten Ausdrucks bedienen kann, wenn man nur die Coefficienten für die grössten Werthe von n mit Logarithmen von sieben Stellen berechnet, und da in unserm Planetensystem bis jetzt keine grösseren Neigungen bekannt sind, so könnte ich es bei dem Ausdruck (29) bewenden lassen. Allein da man nicht wissen kann, welche Neigungen uns noch in der Folge bekannt werden, so will ich dem genannten Ausdruck auch andere Formen geben, die bei grösseren Neigungen besser zur Anwendung dienen können.

Führt man statt der ϱ und π Functionen die Π Functionen wieder ein, so wird der Theil des Ausdrucks (29) von $C(n-2f, -(n-2f-2g))$, welcher innerhalb der Klammern steht =

$$\frac{\Pi(2n-2f)\,\Pi(2f)\,\Pi(2n-2f-2g)\,\Pi(2f+2g)}{2^{2n}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)}$$

$$\times \Sigma' \left\{ \frac{\operatorname{tg}^{4\sigma} \frac{1}{2} J}{\Pi(2n-2f-2g-2\sigma)\,\Pi(2\sigma)\,\Pi(2g+2\sigma)\,\Pi(2f-2\sigma)} - \frac{\operatorname{tg}^{4\sigma+2} \frac{1}{2} J}{\Pi(2n-2f-2g-2\sigma-1)\,\Pi(2\sigma+1)\,\Pi(2g+2\sigma+1)\,\Pi(2f-2\sigma-1)} \right\}$$

Wenn man hierin σ statt 2σ schreibt, so bekommt man

$$C\,(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) = \frac{\Pi\,(2n - 2f)\,\Pi\,(2f)\,\Pi\,(2n - 2f - 2g)\,\Pi\,(2f + 2g)}{2^{2n}\,\Pi\,(n - f)\,\Pi\,(f)\,\Pi\,(n - f - g)\,\Pi\,(f + g)}$$

$$\times \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\,\operatorname{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\,\Sigma_{\sigma=0}^{\sigma=2f}\,(-1)^{\sigma}\,\frac{\operatorname{tg}^{2\sigma}\frac{1}{2}J}{\Pi\,(2n - 2f - 2g - \sigma)\,\Pi\,(\sigma)\,\Pi\,(2g + \sigma)\,\Pi\,(2f - \sigma)}$$

Die Grösse unter dem Summenzeichen in diesem Ausdruck ist wieder eine hypergeometrische Reihe von der Gattung, die im § I. betrachtet wurde. Schreibt man nemlich die ersten Glieder derselben aus, so findet sich

$$\Sigma\,(-1)^{\sigma}\,\frac{\operatorname{tg}^{2\sigma}\frac{1}{2}J}{\Pi\,(2n - 2f - 2g - \sigma)\,\Pi\,(\sigma)\,\Pi\,(2g + \sigma)\,\Pi\,(2f - \sigma)} =$$

$$\frac{1}{\Pi(2n - 2f - 2g)\,\Pi\,(2g)\,\Pi\,(2f)}\left\{1 - \frac{2n-2f-2g\,.\,2f}{1\,.\,2g+1}\operatorname{tg}^{2}\tfrac{1}{2}J + \frac{2n-2f-2g\,.\,2n-2f-2g-1\,.\,2f\,.\,2f-1}{1\,.\,2\,.\,2g+1\,.\,2g+2}\operatorname{tg}^{4}\tfrac{1}{2}J \mp \text{etc.}\right\}$$

Es wird daher

$$C\,(n - 2f, -(n - 2f - 2g)) =$$

$$H\cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\operatorname{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\,.\,F(-(2n - 2f - 2g), -2f, 2g+1, -\operatorname{tg}^{2}\tfrac{1}{2}J) \quad (36)$$

wenn man zur Abkürzung

$$H = \frac{\Pi\,(2n - 2f)\,\Pi\,(2f + 2g)}{2^{2n}\,\Pi\,(n - f)\,\Pi\,(f)\,\Pi\,(n - f - g)\,\Pi\,(f + g)\,\Pi\,(2g)}$$

setzt. Mit dieser FFunction kann man viele Verwandelungen vornehmen.

28.

Setzt man

$$\frac{\cos J}{\cos^{2}\frac{1}{2}J} = z$$

so ist z eine Function, deren Maximum $= 1$ für $J = 0$ wird, und die Null wird, wenn $J = 90^{0}$ ist. Sie ist wegen dieser Eigenschaften in den Fällen, wo J gross ist, zur Anwendung geeignet. Es ist nun

$$\operatorname{tg}^{2}\tfrac{1}{2}J = 1 - z$$

also

$$\operatorname{tg}^{2\sigma}\tfrac{1}{2}J = (1 - z)^{\sigma} = \Sigma_{p=0}^{p=\sigma}\,(-1)^{p}\,\frac{\Pi\,(\sigma)}{\Pi\,(p)\,\Pi\,(\sigma - p)}\,z^{p}$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (35), so wird

$$(-1)^{\sigma}\,\frac{\operatorname{tg}^{2\sigma}\frac{1}{2}J}{\Pi\,(2n - 2f - 2g - \sigma)\,\Pi\,(\sigma)\,\Pi\,(2g + \sigma)\,\Pi\,(2f - \sigma)} =$$

$$\Sigma_{\sigma=p}^{\sigma=2f}\,(-1)^{\sigma+p}\,\frac{z^{p}}{\Pi\,(2n - 2f - 2g - \sigma)\,\Pi\,(2g + \sigma)\,\Pi\,(2f - \sigma)\,\Pi\,(p)\,\Pi\,(\sigma - p)}$$

$$= \frac{z^{p}}{\Pi\,(2n - 2f - 2g - p)\,\Pi\,(2g + p)\,\Pi\,(2f - p)\,\Pi\,(p)}$$

$$\times\left\{1 - \frac{2n - 2f - 2g - p\,.\,2f - p}{1\,.\,2g + p + 1} + \frac{2n - 2f - 2g - p\,.\,2n - 2f - 2g - p - 1\,.\,2f - p\,.\,2f - p - 1}{1\,.\,2\,.\,2g + p + 1\,.\,2g + p + 2} \mp \text{etc.}\right\}$$

$$= \frac{z^{p}}{\Pi\,(2n - 2f - 2g - p)\,\Pi\,(2g + p)\,\Pi\,(2f - p)\,\Pi\,(p)}\,.\,F(-(2n - 2f - 2g - p), -(2f - p), 2g + p + 1, -1)$$

Diese FFunction gehört der Gattung an, deren Summe unter andern im § I. gegeben wurde. Durch die Ausdrücke (11) und (12) ergiebt sich

$$F(-(2n-2f-2g-p), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = (-1)^p \frac{\Pi(2g+p)\,\Pi(2f-p)}{\Pi(2f+2g)} a_{2f-p}$$

wo

$$a_0 = 1$$
$$a_1 = (2n-4f-4g-p)$$
$$a_2 = \tfrac{1}{2}(2n-4f-4g-p)\,a_1 - \tfrac{1}{2}(2n-p)\,a_0$$
etc.

oder, wenn man die Elemente α und β der FFunction mit einander vertauscht,

$$F(-(2n-2f-2g-p), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = (-1)^p \frac{\Pi(2g+p)\,\Pi(2n-2f-2g-p)}{\Pi(2n-2f)} a'_{2n-2f-2g-p}$$

wo

$$a'_0 = 1$$
$$a'_1 = -(2n-4f+p)$$
$$a'_2 = -\tfrac{1}{2}(2n-4f+p)\,a'_1 - \tfrac{1}{2}(2n-p)\,a'_0$$
etc.

ist. Substituirt man diese Ausdrücke in (35), so entsteht

$$C(n-2f, -(n-2f-2g)) = \frac{\Pi(2n-2f)\,\Pi(2f)}{2^{2n}\,\Pi(n-f)\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)} \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J$$
$$\times \Sigma_{p=0}^{p=2f} (-1)^p B(2n-2f-2g, p)\,a_{2f-p}\,z^p$$
$$= \frac{\Pi(2n-2f-2g)\,\Pi(2f+2g)}{2^{2n}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)} \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\,\mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J$$
$$\times \Sigma_{p=0}^{p=2f} (-1)^p B(2f, p)\,a'_{2n-2f-2g-p}\,z^p$$

wo $B(m, p)$ den p^{ten} Binomialcoefficienten der m^{ten} Potenz bedeutet. Diese Ausdrücke geben die CCoefficienten nach den Potenzen von z geordnet, allein man kann noch andere geben, die deshalb zweckmässiger sind wie die vorstehenden, weil sie auf kleinere Coefficienten der Potenzen der Function von J, die sie enthalten, hinführen.

29.

Wenden wir zuerst die Verwandelungsformel

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\alpha} F\left(\alpha, \gamma-\beta, \gamma, \frac{x}{x-1}\right)$$

auf (36) an, dann wird

(37) $F(-(2n-2f-2g), -2f, 2g+1, -\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J) =$
$\cos^{-4n+4f+4g}\tfrac{1}{2}J.\; F(-(2n-2f-2g), 2f+2g+1, 2g+1, \sin^2\tfrac{1}{2}J)$

und wenn man die FFunction rechter Hand als eine Summe von $2n - 2f - 2g$ Gliedern darstellt, so erhält man

$$F(-(2n - 2f - 2g), 2f + 2g + 1, 2g + 1, \sin^2 \tfrac{1}{2} J) =$$
$$\frac{\Pi(2n-2f-2g)\,\Pi(2g)}{\Pi(2f+2g)} \Sigma (-1)^\sigma \frac{\Pi(2f+2g+\sigma)\sin^{2\sigma}\tfrac{1}{2}J}{\Pi(2n-2f-2g-\sigma)\,\Pi(2g+\sigma)\,\Pi(\sigma)}$$

wo σ von Null bis $2n - 2f - 2g$ ausgedehnt werden muss. Es ist aber

$$\sin^{2\sigma}\tfrac{1}{2}J = \Sigma_{p=0}^{p=\sigma} \frac{(-1)^p}{2^\sigma} \frac{\Pi(\sigma)}{\Pi(\sigma-p)\,\Pi(p)} \cos^p J \tag{38}$$

und wenn man diesen Ausdruck substituirt, wird

$$\Sigma (-1)^\sigma \frac{\Pi(2f+2g+\sigma)\sin^{2\sigma}\tfrac{1}{2}J}{\Pi(2n-2f-2g-\sigma)\,\Pi(2g+\sigma)\,\Pi(\sigma)} =$$
$$\Sigma_{p=0}^{p=2n-2f-2g} \frac{\Pi(2f+2g+p)\cos^p J}{2^p\,\Pi(2n-2f-2g-p)\,\Pi(2g+p)\,\Pi(p)} F(-(2n-2f-2g-p), 2f+2g+p+1, 2g+p+1, \tfrac{1}{2})$$

Durch Hülfe der oben angeführten Verwandelungsformel ergiebt sich aber folgende Gleichung

$$F(-(2n - 2f - 2g - p), 2f + 2g + p + 1, 2g + p + 1, \tfrac{1}{2}) =$$
$$\frac{1}{2^{2n-2f-2g-p}} F(-(2n - 2f - 2g - p), -2f, 2g + p + 1, -1)$$

und die FFunction rechter Hand kann wieder durch die Ausdrücke (11) und (12) summirt werden. Es wird durch diese

$$F(-(2n-2f-2g-p), -2f, 2g+p+1, -1) = \frac{\Pi(2g+p)\,\Pi(2f)}{\Pi(2f+2g+p)} a_{2f}$$

wo
$$a_0 = 1$$
$$a_1 = (2n - 4f - 4g - 2p)$$
$$a_2 = \tfrac{1}{2}(2n - 4f - 4g - 2p)\,a_1 - \tfrac{1}{2}\,2n$$
etc.

oder

$$F(-(2n-2f-2g-p), -2f, 2g+p+1, -1) = (-1)^p \frac{\Pi(2g+p)\,\Pi(2n-2f-2g-p)}{\Pi(2n-2f)} a'_{2n-2f-2g-p}$$

wo
$$a'_0 = 1$$
$$a'_1 = -(2n - 4f)$$
$$a'_2 = -\tfrac{1}{2}(2n - 4f)\,a'_1 - \tfrac{1}{2}\,2n$$
$$a'_3 = -\tfrac{1}{3}(2n - 4f)\,a'_2 - \tfrac{1}{3}(2n - 1)\,a'_1$$
etc.

ist. Substituirt man diese Ausdrücke in (36), so erhält man

$$C(n-2f, -(n-2f-2g)) = \frac{\Pi(2n-2f)\,\Pi(2f)}{2^{4n-2f-2g}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)}\,\frac{\sin^{2g}\frac{1}{2}J}{\cos^{2n-4f-2g}\frac{1}{2}J}$$

$$\times \Sigma_{p=0}^{p=2n-2f-2g} B(2n-2f-2g, p)\, a_{2f} \cos^p J$$

$$= \frac{\Pi(2n-2f-2g)\,\Pi(2f+2g)}{2^{4n-2f-2g}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)}\,\frac{\sin^{2g}\frac{1}{2}J}{\cos^{2n-4f-2g}\frac{1}{2}J}$$

$$\times \Sigma_{p=0}^{p=2n-2f-2g} (-1)^p B(2f+2g+p, p)\, a'_{2n-2f-2g-p} \cos^p J$$

Es lässt sich zeigen, dass in diesen Ausdrücken die numerischen Coefficienten der Potenzen von cos J im Allgemeinen weit kleiner sind, wie in den Ausdrücken des vor. Art. Die Vorstehenden bestehen aber im Allgemeinen aus mehr Gliedern wie jene, da, einzelne Fälle ausgenommen, $2n - 2f - 2g > 2f$ ist. Man kann aber noch andere nach den Potenzen von cos J fortschreitende Ausdrücke erhalten, die aus derselben Anzahl von Gliedern bestehen, wie die früheren. Diese bekommt man durch das folgende Verfahren.

30.

Stellt man die im vor. Art. angewandte Verwandelungsformel so,

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = (1-x)^{-\beta} F(\gamma - \alpha, \beta, \gamma, \frac{x}{x-1})$$

und wendet diese auf die FFunction des Ausdrucks (36) an, so bekommt man

$$(39)\quad F(-(2n-2f-2g), -2f, 2g+1, -\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J) = \cos^{-4f}\tfrac{1}{2}J.\ F(2n-2f+1, -2f, 2g+1, \sin^2\tfrac{1}{2}J)$$

Auf dieselbe Weise wie im vor. Art. wird hier

$$(40)\quad F(2n-2f+1, -2f, 2g+1, \sin^2\tfrac{1}{2}J) = \frac{\Pi(2f)\,\Pi(2g)}{\Pi(2n-2f)} \Sigma_{\sigma=0}^{\sigma=2f} (-1)^\sigma \frac{\Pi(2n-2f+\sigma) \sin^{2\sigma}\frac{1}{2}J}{\Pi(2f-\sigma)\,\Pi(2g+\sigma)\,\Pi(\sigma)}$$

und durch die Substitution des Ausdrucks (38) wird

$$\Sigma (-1)^\sigma \frac{\Pi(2n-2f+\sigma)\sin^{2\sigma}\frac{1}{2}J}{\Pi(2f-\sigma)\,\Pi(2g+\sigma)\,\Pi(\sigma)} =$$

$$\Sigma_{p=0}^{p=2f} \frac{\Pi(2n-2f+p)\cos^p J}{2^p\,\Pi(2f-p)\,\Pi(2g+p)\,\Pi(p)} F(2n-2f+p+1, -2f+p, 2g+p+1, \tfrac{1}{2})$$

Die obige Verwandelungsformel giebt nun

$$F(2n-2f+p+1, -2f+p, 2g+p+1, \tfrac{1}{2}) = \frac{1}{2^{2f-p}} F(-(2n-2f-2g), -(2f-p), 2g+p+1, -1)$$

und durch Anwendung der Summenformeln (11) und (12) erhält man

$$F(-(2n-2f-2g), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = \frac{\Pi(2g+p)\,\Pi(2n-2f-2g)}{\Pi(2n-2f+p)}\, a'_{2n-2f-2g}$$

wo

$$\begin{aligned} a'_0 &= 1 \\ a'_1 &= -(2n-4f-2p) \\ a'_2 &= -\tfrac{1}{2}(2n-4f-2p)\,a'_1 - \tfrac{1}{2}\,2n \\ a'_3 &= -\tfrac{1}{3}(2n-4f-2p)\,a'_2 - \tfrac{1}{3}(2n-1)\,a'_1 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

und

$$F(-(2n-2f-2g), -(2f-p), 2g+p+1, -1) = (-1)^p\,\frac{\Pi(2g+p)\,\Pi(2f-p)}{\Pi(2f+2g)}\, a_{2f-p}$$

wo

$$\begin{aligned} a_0 &= 1 \\ a_1 &= (2n-4f-4g) \\ a_2 &= \tfrac{1}{2}(2n-4f-4g)\,a_1 - \tfrac{1}{2}\,2n \\ a_3 &= \tfrac{1}{3}(2n-4f-4g)\,a_2 - \tfrac{1}{3}(2n-1)\,a_1 \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Die Substitution dieser Ausdrücke in (36) giebt schliesslich

$$\begin{aligned} C(n-2f, -(n-2f-2g)) &= \frac{\Pi(2n-2f-2g)\,\Pi(2f+2g)}{2^{2n+2f}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)} \cos^{2n-4f-2g}\tfrac{1}{2}J.\,\sin^{2g}\tfrac{1}{2}J \\ &\quad\times \Sigma_{p=0}^{p=2f}\, B(2f,p)\, a'_{2n-2f-2g} \cos^p J \\ &= \frac{\Pi(2n-2f)\,\Pi(2f)}{2^{2n+2f}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)} \cos^{2n-4f-2g}\tfrac{1}{2}J.\,\sin^{2g}\tfrac{1}{2}J \\ &\quad\times \Sigma_{p=0}^{p=2f}\,(-1)^p\, B(2n-2f+p,p)\, a_{2f-p} \cos^p J \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke bestehen aus derselben Anzahl von Gliedern wie die nach den Potenzen von $\mathrm{tg}^2\tfrac{1}{2}J$, und die nach den von $\frac{\cos J}{\cos^2\frac{1}{2}J}$ fortschreitenden, es sind aber in den vorstehenden die numerischen Coefficienten im Allgemeinen weit kleiner wie in jenen.

31.

Es lassen sich ausserdem noch Ausdrücke für die C Coefficienten geben, in welchen die Coefficienten noch weit kleiner werden wie in den vorhergehenden. Diese erhält man, wenn man statt der Potenzen von $\sin^2\tfrac{1}{2}J$ die Cosinusse der Vielfachen von J einführt. Ich werde zuerst zeigen wie der analytische Ausdruck der Coefficienten für diese Form beschaffen ist. Substituirt man den Ausdruck

$$\sin^{2\sigma}\tfrac{1}{2}J = \Sigma_{i=-\sigma}^{i=+\sigma}\,\frac{(-1)^i}{2^{2\sigma}}\,\frac{\Pi(2\sigma)}{\Pi(\sigma+i)\,\Pi(\sigma-i)}\cos iJ$$

in (40), so bekommt man

$$(41)\ F(2n-2f+1,\ -2f,\ 2g+1,\ \sin^2\tfrac{1}{2}J) =$$

$$\frac{\Pi(2f)\,\Pi(2g)}{\Pi(2n-2f)}\sum_{i=-\sigma}^{i=+\sigma}\sum_{\sigma=i}^{\sigma=2f}\frac{(-1)^{\sigma+i}}{2^{2\sigma}}\,\frac{\Pi(2n-2f+\sigma)\,\Pi(2\sigma)\cos iJ}{\Pi(2f-\sigma)\,\Pi(2g+\sigma)\,\Pi(\sigma)\,\Pi(\sigma+i)\,\Pi(\sigma-i)}$$

Dieser Ausdruck zeigt, dass der Coefficient von cos iJ keine FFunction, sondern eine hypergeometrische Reihe ist, in welcher in jedem Gliede drei Factoren im Zähler, und eben so viele im Nenner mehr als im nächst vorhergehenden enthalten sind, während in den FFunctionen die Vermehrung der Factoren von Glied zu Glied nur zwei im Zähler und eben so viele im Nenner beträgt. Hier sind wir also über die Grenzen des weiten Gebiets der FFunctionen hinaus gekommen. Ich werde aber zeigen, dass sich im gegenwärtigen Falle die Coefficienten von cos iJ durch Kettenbrüche leicht und sicher berechnen lassen.

32.

Sei

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\sin^2\tfrac{1}{2}J) = H_0 + H_1 z + H_2 z^2 + \ldots$$
$$+ H_1\frac{1}{z} + H_2\frac{1}{z^2} + \ldots$$

welche Gleichung dadurch möglich wird, dass man

$$2\cos J = z + \frac{1}{z}$$

setzt, indem daraus schliesslich

$$F(\alpha,\beta,\gamma,\sin^2\tfrac{1}{2}J) = H_0 + 2H_1\cos J + 2H_2\cos 2J + \text{etc.}$$

hervorgeht. Nehmen wir nun die bekannte Differentialgleichung vor, welcher durch $F(\alpha,\beta,\gamma,x)$ Genüge geleistet wird, nemlich

$$\frac{d^2F}{dx^2}(x-x^2) + [\gamma-(\alpha+\beta+1)\,x]\,\frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0$$

und machen darin vermittelst der Gleichung

$$-4x = z + \frac{1}{z} - 2$$

z zur unabhängigen Veränderlichen. Dadurch wird sie

$$\frac{d^2F}{dz^2}(z^2-z^4)+\frac{dF}{dz}[(1-\alpha-\beta)z+2(1+\alpha+\beta-2\gamma)z^2-(1+\alpha+\beta)z^3]+\alpha\beta(1-z^2)F=0$$

Substituirt man hierin die Reihe

$$F = H_{i+1}z^{i+1} + H_i z^i + H_{i-1}z^{i-1} + \ldots$$

so bekommt man folgende Bedingungsgleichung zwischen den HCoefficienten

$$0=(i+1-\alpha)(i+1-\beta)H_{i+1}+2i(1+\alpha+\beta-2\gamma)H_i-(i-1+\alpha)(i-1+\beta)H_{i-1}$$

welche schon von Kummer entwickelt und benutzt worden ist.

33.

Wenden wir die eben abgeleitete Bedingungsgleichung zuerst auf die Function

$$F(2n - 2f + 1, \; -2f, \; 2g + 1, \; \sin^2 \tfrac{1}{2} J)$$

an, dann wird sie

$$(2n-2f-i)(2f+1+i)\, H_{i+1} - 4i(n-2f-2g) H_i - (2n-2f+i)(2f+1-i) H_{i-1} = 0 \quad (12)$$

Auf diese Gleichung kann man die Methode anwenden, die ich in meiner vorigen Abhandlung erklärt habe. Setzt man

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} = p_i, \; p_i = - F_i \gamma_i \; .$$

$$F_i = \frac{(2n - 2f + i)\,(2f + 1 - i)}{4\,(n - 2f - 2g)\,i}$$

$$\lambda_i = F_i \frac{(2n - 2f + 1 - i)\,(2f + i)}{4\,(n - 2f - 2g)\,(i - 1)}$$

so wird zufolge der vorstehenden Bedingungsgleichung

$$\gamma_i = \frac{1}{1 + \lambda_{i+1} \gamma_{i+1}}$$

woraus nach und nach in umgekehrter Ordnung alle γ_i sicher berechnet werden können, wenn der letzte derselben gegeben ist. Aber die obige FFunction ist eine endliche Reihe, die aus $2f$Gliedern besteht, der letzte der γ_i ist daher γ_{2f}. Setzt man daher

$$i = 2f + 1$$

in die vorstehenden Ausdrücke, so bekommt man

$$F_{2f+1} = 0, \; \lambda_{2f+1} = 0, \; p_{2f+1} = 0$$

und

$$\gamma_{2f} = 1$$

Dieser bildet also den Anfangswerth, durch welchen nach und nach $\gamma_{2f-1}, \gamma_{2f-2}, \ldots \gamma_1$ erhalten werden. Es wird nun schliesslich

$$H_i = H_0 \, p_1 \, p_2 \ldots p_i$$

woraus alle HCoefficienten hervorgehen, wenn H_0 anderweitig gefunden worden ist. In unserm Falle hat aber H_0 einen zusammengesetzten Ausdruck, und dahingegen H_{2f} einen einfachen, es ist daher zweckmässiger, diesen der Berechnung der übrigen HCoefficienten zu Grunde zu legen. Der vorstehende Ausdruck giebt

$$H_{2f} = H_0 \, p_1 \, . \, p_2 \ldots p_{2f}$$

und hieraus erhält man durch die Division

$$H_i = \frac{H_{2f}}{p_{2f} \cdot p_{2f-1} \cdots p_{i+1}}$$

Den Ausdruck für H_{2f} bekommt man auf einfache Weise aus (41), wenn man darin $i = 2f$ macht, denn man sieht, dass in diesem Falle $\sigma = 2f$ der einzige Werth ist, den σ annehmen kann. Es ergiebt sich auf diese Art

$$H_{2f} = \frac{\Pi(2n)\,\Pi(2g)}{2^{4f}\,\Pi(2n-2f)\,\Pi(2f+2g)}$$

Substituirt man die hier gefundenen Ausdrücke in (39) und (36), so bekommt man

$$C\left(n-2f,\; -(n-2f-2g)\right) =$$

$$\frac{\Pi(2n)\cos^{2n-4f-2g}\tfrac{1}{2}J.\sin^{2g}\tfrac{1}{2}J}{2^{2n+4f-1}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)}\;\Sigma_{i=0}^{i=2f}\frac{\cos iJ}{p_{2f}.p_{2f-1}\cdots p_{i+1}}$$

welcher Ausdruck aber mit 2 dividirt werden muss, wenn $i = 0$ ist.

34.

Es giebt einen Fall, in welchem der eben entwickelte Ausdruck unbestimmt wird, nemlich wenn

$$n - 2f - 2g = 0$$

wird. Es werden dann F_i und λ_i unendlich, und können nicht mehr angewandt werden. In diesem Falle fällt aber in der Gleichung (42) das mittlere Glied weg, weshalb

$$(2n-2f-i)\,(2f+1+i)\,H_{i+1} - (2n-2f+i)\,(2f+1-i)\,H_{i-1} = 0$$

wird. Im C Coefficienten werden nun die Coefficienten aller von den ungraden Vielfachen von J abhängigen Glieder gleich Null, und die Coefficienten der von den graden Vielfachen von J abhängigen Glieder können leicht vermittelst der vorstehenden Gleichungen erhalten werden. Diese giebt allgemein

$$H_{i-1} = \frac{(2n-2f-i)\,(2f+1+i)}{(2n-2f+i)\,(2f+1-i)}\,H_{i+1}$$

also, wenn man zugleich n durch die Gleichung

$$n = 2f + 2g$$

eliminirt,

$$H_{2f-2} = \frac{2f\,(4g+1)}{(4f+4g-1)}\,H_{2f}$$

$$H_{2f-4} = \frac{(2f-1)\,(4g+3)}{2\,(4f+4g-3)}\,H_{2f-2}$$

etc.

Setzt man daher

$$q_i = \frac{(f+i)\,(2f+4g+1-2i)}{(f+1-i)\,(2f+4g-1+2i)}$$

so wird

$$C\,(n-2f,0) = \frac{\Pi\,(2n)\cos^{2g}\tfrac{1}{2}J\,\sin^{2g}\tfrac{1}{2}J}{2^{2n+4f-1}\,\Pi\,(n-f)\,\Pi\,(f)\,\Pi\,(n-f-g)\,\Pi\,(f+g)}\,\Sigma_{i=f}^{i=0}\,q_f\cdot q_{f-1}\ldots q_{i+1}\cos 2iJ$$

wo wieder der Coefficient des Gliedes, für welches $i = 0$ ist, mit 2 dividirt werden muss.

35.

Die Anwendung der Methode der beiden vor. Artt. auf die FFunction des Art. 29, nemlich auf

$$F\,(-(2n-2f-2g),\,2f+2g+1,\,2g+1,\,\sin^2\tfrac{1}{2}J)$$

giebt zwar eine Reihe, die mit wenigen Ausnahmen aus mehreren Gliedern besteht wie die eben erhaltene, dafür aber noch kleinere Coefficienten hat. Diese Reihe will ich kurz angeben. Die Bedingungsgleichung zwischen den HCoefficienten wird

$$= (2n-2f-2g+1+i)\,(2f+2g-i)\,H_{i+1} + 4i\,(n-2f)\,H_i - (2n-2f-2g+1-i)\,(2f+2g+i)\,H_{i-1}$$

Setzt man daher jetzt

$$\frac{H_i}{H_{i-1}} = r_i\,;\;\; r_i = K_i\,\theta_i$$

$$K_i = \frac{(2n-2f-2g+1-i)\,(2f+2g+i)}{4\,(n-2f)\,i}$$

$$\lambda_i = K_i\,\frac{(2n-2f-2g+i)\,(2f+2g+1-i)}{4\,(n-2f)\,(i-1)}$$

so wird

$$\theta_i = \frac{1}{1+\lambda_{i+1}\,\theta_{i+1}}$$

die Gleichung, aus welcher nach und nach alle θ_i berechnet werden müssen. Die Reihe besteht jetzt aus $2n-2f-2g$ Gliedern, denn substituirt man

$$i = 2n - 2f - 2g + 1$$

so wird

$$K_{2n-2f-2g+1} = 0,\;\; \lambda_{2n-2f-2g+1} = 0,\;\; r_{2n-2f-2g+1} = 0$$

und

$$\theta_{2n-2f-2g} = 1$$

welches der Anfangswerth der θ_i ist. Zu bemerken ist, dass die θ_i hier einen Cyclus bilden, welcher mit

$$\theta_{2f+2g} = 1$$

endigt, ohne dass r_{2f+2g} verschwindet. Denn substituirt man den Werth

$$i = 2f + 2g + 1$$

so wird

$$\lambda_{2f+2g+1} = 0$$

ohne dass $K_{2f+2g+1}$ verschwindet. Innerhalb dieses Cyclus ist

$$-\frac{K_i}{\lambda_i}$$

ein Näherungswerth von θ_i, wenn n eine grosse Zahl ist. Mit diesem Näherungswerthe kann man in den Fällen, wo man nicht alle θ_i nöthig hat, die Rechnung anfangen. Es wird nun wie oben

$$H_i = \frac{H_{2n-2f-2g}}{r_{2n-2f-2g} \cdot r_{2n-2f-2g-1} \cdots r_{i+1}}$$

und man findet

$$H_{2n-2f-2g} = \frac{\Pi(2g)\,\Pi(2n)}{2^{4n-4f-4g}\,\Pi(2f+2g)\,\Pi(2n-2f)}$$

Man erhält daher schliesslich

$$C(n-2f, -(n-2f-2g)) =$$

$$\frac{\Pi(2n)\cos^{-2n+4f+2g}\tfrac{1}{2}J.\,\sin^{2g}\tfrac{1}{2}J}{2^{6n-4f-4g}\,\Pi(n-f)\,\Pi(f)\,\Pi(n-f-g)\,\Pi(f+g)}\,\Sigma_{i=0}^{i=2n-2f-2g}\frac{\cos iJ}{r_{2n-2f-2g}\cdots r_{i+1}}$$

Wenn $n = 2f$ ist, so hören diese Formeln auf brauchbar zu sein, aber dieser Fall ist stets mit $n = 2f + 2g$, oder mit $g = 0$ verbunden, d. h. er kommt nur in $C(0,0)$ vor, und in diesem Falle wird man auf Ausdrücke hingeführt, die mit denen des vor. Art. völlig identisch sind. Es braucht daher dieser Fall hier nicht besonders berücksichtigt zu werden.

36.

Seien f und f' die wahren Anomalien der Himmelskörper m und m', so wie Π und Π' die in der Richtung der Bewegung gezählten Entfernungen der Perihelien von dem gegenseitigen Knoten, in welchem U und U' ihren Anfang nehmen. Dann ist

$$U = f + \Pi;\; U' = f' + \Pi'$$

und wenn man mit x und x' die zu f und f' gehörigen imaginären Exponentialfunctionen bezeichnet,

$$u = xc^{\Pi\sqrt{-1}};\; u' = x'c^{\Pi'\sqrt{-1}}$$

Hieraus ergiebt sich, wenn μ und μ' irgend welche Exponenten bezeichnen,

$$u^{\mu}u'^{-\mu'} = x^{\mu}x'^{-\mu}\left\{\cos(\mu\Pi - \mu'\Pi') + i\sin(\mu\Pi - \mu'\Pi')\right\}$$

wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Setzt man daher

$$A(n, -n) = C(n, -n) \cos(n\Pi - n\Pi')$$
$$A(n, -(n-2)) = C(n, -(n-2)) \cos(n\Pi - (n-2)\Pi')$$
$$A(n, -(n-4)) = C(n, -(n-4)) \cos(n\Pi - (n-4)\Pi')$$
etc.
$$B(n, -n) = C(n, -n) \sin(n\Pi - n\Pi')$$
$$B(n, -(n-2)) = C(n, -(n-2)) \sin(n\Pi - (n-2)\Pi')$$
$$B(n, -(n-4)) = C(n, -(n-4)) \sin(n\Pi - (n-4)\Pi')$$
etc.
$$A(n-2, -n) = C(n, -(n-2)) \cos((n-2)\Pi - n\Pi')$$
$$A(n-2, -(n-2)) = C(n-2, -(n-2)) \cos((n-2)\Pi - (n-2)\Pi')$$
$$A(n-2, -(n-4)) = C(n-2, -(n-4)) \cos((n-2)\Pi - (n-4)\Pi')$$
etc.
$$B(n-2, -n) = C(n, -(n-2)) \sin((n-2)\Pi - n\Pi')$$
$$B(n-2, -(n-2)) = C(n-2, -(n-2)) \sin((n-2)\Pi - (n-2)\Pi')$$
$$B(n-2, -(n-4)) = C(n-2, -(n-4)) \sin((n-2)\Pi - (n-4)\Pi')$$
etc.
$$A(n-4, -n) = C(n, -(n-4)) \cos((n-4)\Pi - n\Pi')$$
$$A(n-4, -(n-2)) = C(n-2, -(n-4)) \cos((n-4)\Pi - (n-2)\Pi')$$
$$A(n-4, -(n-4)) = C(n-4, -(n-4)) \cos((n-4)\Pi - (n-4)\Pi')$$
etc.
$$B(n-4, -n) = C(n, -(n-4)) \sin((n-4)\Pi - n\Pi')$$
$$B(n-4, -(n-2)) = C(n-2, -(n-4)) \sin((n-4)\Pi - (n-2)\Pi')$$
$$B(n-4, -(n-4)) = C(n-4, -(n-4)) \sin((n-4)\Pi - (n-4)\Pi')$$
etc.

so bekommt man für die D Coefficienten des Ausdrucks

$$\frac{1}{\triangle} = \Sigma_{n=0}^{n=\infty} D_n \frac{r^n}{r'^{n+1}}$$

des Art. 22 den folgenden Ausdruck

$$D_n = \Sigma A(k, k')\, x^k x'^{k'} + i\, \Sigma B(k, k')\, x^k x'^{k'}$$

wo die Summationen von $k = n$

und $k' = -n$

anfangen, und nur bis dahin fortgesetzt zu werden brauchen, wo beide Exponenten anfangen ihr Zeichen umzukehren. Denn da $\triangle$ eine relle Grösse ist, so wird nothwendig

$$A(-k, -k') = A(k, k');\ B(-k, -k') = -B(k, k')$$

Man darf aber in diesen Coefficienten die Indices nicht mit einander vertauschen, wie in den C Coefficienten erlaubt ist, denn man sieht aus den vorstehenden Formeln, dass die einander gleichen $C(k, k')$ und $C(k', k)$ mit den Cosinussen und Sinussen verschiedener Bögen multiplicirt sind. Der Uebergang zum Reellen wird auf ähnliche Weise bewirkt, wie im Art. 22 an den E Coefficienten gezeigt wurde. Man muss nemlich allenthalben

$$2 \cos(kf + k'f') \text{ für } x^k x'^{k'}$$

und

$$-2 \sin(kf + k'f') \text{ für } ix^k x'^{k'}$$

schreiben, und nur in dem mit $x^0 x'^0$ multiplicirten Gliede unterbleibt die Multiplication mit 2. Es wird also mit Rücksicht auf diese Ausnahme

$$D_n = 2\Sigma A(k, k') \cos(kf + k'f') - 2\Sigma B(k, k') \sin(kf + k'f')$$

Es ist übrigens

$$A(0,0) = C(0,0), \quad B(0,0) = 0$$

37.

Ich werde nun von der Function, die der Gegenstand dieser Abhandlung ist, eine specielle Entwickelung geben, deren Anwendung ich aber erst dann zeigen kann, wenn ich zu den Anwendungen dieser Entwickelungen überhaupt komme, welches ich auf eine spätere Zeit verschieben muss, indem sonst diese Abhandlung zu viel Raum einnehmen würde. Setzt man

$$(43) \qquad \begin{cases} \cos J \sin U = \cos B \sin L \\ \cos U = \cos B \cos L \\ \sin J \sin U = \sin B \end{cases}$$

und substituirt diese sowohl wie $U' = f' + \Pi'$ in

$$\frac{\Delta^2}{r'^2} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'}(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$$

so geht diese über in

$$(44) \qquad \frac{\Delta^2}{r'^2} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} - 2\frac{r}{r'} \cos B \cos(f' + \Pi' - L)$$

und man bekommt einen analogen Ausdruck, wenn man U mit U' vertauscht. Giebt man nun U einen bestimmten Werth, so erhalten B und L auch bestimmte Werthe, und die Aufgabe ist $\frac{1}{\Delta}$ in eine Reihe zu entwickeln, die nach den Potenzen von r und r', und nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von f' fortschreitet. Sei

$$2\cos(f' + \Pi' - L) = \gamma + \frac{1}{\gamma}$$

dann wird (44)

$$\frac{\triangle^2}{r'^2} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} - \frac{r}{r'} \cos B . \gamma - \frac{r}{r'} \cos B . \frac{1}{\gamma} .$$

Setzt man ferner zur Abkürzung

$$g = \cos B, \ h = \sin B$$

dann verwandelt man diesen Ausdruck leicht in

$$\frac{\triangle^2}{r'^2} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} - \frac{r}{r'} \left(g\gamma + \frac{1}{g\gamma}\right) + \frac{r}{r'} \frac{h^2}{g\gamma}$$

$$= \left(1 - \frac{r}{r'} g\gamma\right) \left(1 - \frac{r}{r'} \frac{1}{g\gamma}\right) + \frac{r}{r'} \frac{h^2}{g\gamma}$$

welche Form der des Ausdruckes (15) analog ist. Macht man hierin

$$G = 1 - \frac{r}{r'} g\gamma ; \ G' = 1 - \frac{r}{r'} \frac{1}{g\gamma}$$

so bekommt man, dem Ausdruck (18) ähnlich,

$$\frac{r'}{\triangle} = \Sigma_{u=0}^{u=\infty} (-1)^u \left(\frac{r}{r'}\right)^u \frac{h^{2u}}{(g\gamma)^u} \frac{\Pi(2u)}{2^{2u}(\Pi(u))^2} (GG')^{-\frac{2u+1}{2}} \qquad (45)$$

38.

Es findet sich nun leicht

$$G^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma \left(\frac{r}{r'}\right)^m \frac{\Pi(2u+2m)\,\Pi(u)}{2^{2m}\,\Pi(u+m)\,\Pi(2u)\,\Pi(m)} (g\gamma)^m$$

$$G'^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma \left(\frac{r}{r'}\right)^\mu \frac{\Pi(2u+2\mu)\,\Pi(u)}{2^{2\mu}\,\Pi(u+\mu)\,\Pi(2u)\,\Pi(\mu)} (g\gamma)^{-\mu}$$

und wenn man

$$(GG')^{-\frac{2u+1}{2}} = \Sigma H_n \left(\frac{r}{r'}\right)^n$$

und

$$H_n = \Sigma_{\mu=0}^{\mu=n} L(n, \mu)\,\gamma^{n-2\mu}$$

setzt, so geben die vorstehenden Ausdrücke, wenn man
sie mit einander multiplicirt und

$$m + \mu = n$$

macht

$$L(n, \mu) = \frac{\Pi(2n+2u-2\mu)\,\Pi(2u+2\mu)\,(\Pi(u))^2\,g^{n-2\mu}}{2^{2n}\,\Pi(n+u-\mu)\,\Pi(u+\mu)\,\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu)\,(\Pi(2u))^2}$$

welcher Ausdruck dem Ausdrucke (20) analog ist. Sei

$$\frac{1}{\triangle} = \Sigma_{n=0}^{n=\infty} M_n \frac{r^n}{r'^{n+1}}$$

so wird M_n die Form

$$M_n = \Sigma_{\mu=0}^{\mu=n} N(n, \mu) . \gamma^{n-2\mu}$$

haben. Die Substitution der obigen Ausdrücke in (45) giebt

$$M_n = \Sigma (-1)^u \frac{\Pi(2u)}{2^{2u} (\Pi(u))^2} \frac{h^{2u}}{(g\gamma)^u} H_{n-u}$$

$$= \Sigma \Sigma_{\mu=0}^{\mu=n} (-1)^u \frac{\Pi(2u)}{2^{2u} (\Pi(u))^2} \frac{h^{2u}}{g^u} L(n-u, \mu-u) \gamma^{n-2\mu}$$

und hieraus folgt

$$(46) \quad N(n,\mu) = g^{n-2\mu} \Sigma_{u=0}^{u=\mu} (-1)^u \frac{\Pi(2n+2u-2\mu)\, \Pi(2\mu)\, h^{2u}}{2^{2n}\, \Pi(n+u-\mu)\, \Pi(\mu)\, \Pi(n-\mu)\, \Pi(\mu-u)\, \Pi(2u)}$$

welche $N(n, \mu)$ durch bekannte Grössen giebt, und zur Anwendung vorzugsweise geeignet ist, wenn h oder $\sin B$ klein ist.

Setzt man wie oben

$$2 \cos f' = x' + \frac{1}{x'}$$

und allgemein

$$P(n, \mu) = N(n, \mu) \cos(n-2\mu)(\Pi' - L)$$
$$Q(n, \mu) = N(n, \mu) \sin(n-2\mu)(\Pi' - L)$$

so wird

$$M_n = \Sigma_{\mu=0}^{\mu=n} P(n, \mu) . x'^{n-2\mu} + i\, \Sigma_{\mu=0}^{\mu=n} Q(n, \mu) . x'^{n-2\mu}$$

Da hier nothwendig die Gleichungen

$$P(n, n-\mu) = P(n, \mu)$$
$$Q(n, n-\mu) = -Q(n, \mu)$$

statt finden müssen, so braucht man im vorstehenden Ausdruck die Summationen nur bis dahin fortzusetzen, wo der Exponent von x' anfängt negativ zu werden. Man braucht daher auch durch (46) nur die entsprechenden NCoefficienten zu berechnen, das ist

$$\text{von } \mu = 0 \text{ bis } \mu = \frac{n}{2} \text{ oder } \frac{n-1}{2}$$

je nachdem n grade oder ungrade ist. Wenn man weiter rechnet, so erhält man durch (46) die NCoefficienten scheinbar von jenen verschieden, in der That aber denselben gleich. Geht man zum Reellen über, so wird

$$M_n = 2\Sigma P(n, \mu) \cos(n-2\mu) f' - 2\Sigma Q(n, \mu) \sin(n-2\mu) f'$$

wo aber in dem Gliede $P(0,0)$ die Multiplication mit 2 unterbleiben muss. Hiemit ist die Aufgabe gelöst.

39.

Ich werde nun noch den Ausdruck (46) näher untersuchen und umformen. Setzt man

$$N(n, \mu) = \cos^{n-2\mu} B \; \Sigma_{u=0}^{u=\mu} (-1)^u R \sin^{2u} B \qquad (47)$$

und drückt R durch die im Art. 21 eingeführten ϱ und π Functionen aus, so bekommt man

$$R = \varrho(n-\mu, u) \,.\, \varrho(\mu - u, 0) \,.\, \pi(\mu - u, u)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit dem Ausdrucke (29) der C Coefficienten, so erkennt man, dass

$$R = P$$

wird, wenn man in dem Ausdruck für P des Art. 24

$$\sigma = 0, \; f = \mu - u, \; g = u$$

schreibt. Die Zahlenwerthe R der N Coefficienten sind also alle in der ersten Columne der Tafel IV enthalten, und brauchen daher nicht besonders berechnet zu werden. Ich habe sie aus dieser Tafel ausgezogen, und in der Tafel V zusammen gestellt.

40.

Schreibt man die ersten Glieder der Reihe des Ausdrucks (46) aus, so wird

$$N(n, \mu) = \cos^{n-2\mu} B \frac{\Pi(2n-2\mu)\, \Pi(2\mu)}{2^{2n}\, (\Pi(n-\mu))^2\, (\Pi(\mu))^2}$$

$$\times \left\{1 - \frac{2n-2\mu+1 \,.\, \mu}{1 \,.\, 1} \sin^2 B + \frac{2n-2\mu+1 \,.\, 2n-2\mu+3 \,.\, \mu \,.\, \mu-1}{1 \,.\, 2 \,.\, 1 \,.\, 3} \sin^4 B \mp \ldots\right\}$$

also

$$N(n, \mu) = \cos^{n-2\mu} B \frac{\Pi(2n-2\mu)\, \Pi(2\mu)}{2^{2n}\, (\Pi(n-\mu))^2\, (\Pi(\mu))^2} F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, \tfrac{1}{2}, \sin^2 B\right)$$

Die F Function dieses Ausdrucks kann man durch die Gleichung (9) in eine andere verwandeln, deren viertes Element $\cos^2 B$ ist. Diese Gleichung giebt

$$F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, \tfrac{1}{2}, \sin^2 B\right) = (-1)^\mu \frac{\Pi(n-\mu)\, \Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(n-2\mu)\, \Pi\left(\frac{2\mu-1}{2}\right)}$$

$$\times F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, n-2\mu+1, \cos^2 B\right)$$

und durch die Reductionsformel

$$\Pi(z - \tfrac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}}\, 2^{-2z} \frac{\Pi(2z)}{\Pi(z)}$$

die auch im Art 21 angewandt wurde, lässt sich diese Gleichung in die folgende verwandeln,

$$F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, \tfrac{1}{2}, \sin^2 B\right) = (-1)^\mu 2^{2\mu} \frac{\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu)}{\Pi(n-2\mu)\,\Pi(2\mu)} \times F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, n-2\mu+1, \cos^2 B\right)$$

in welcher alle Argumente der ΠFunctionen ganze und positive Zahlen, die Null eingeschlossen, sind, da μ nie grösser wie $\frac{1}{2}n$ angenommen zu werden braucht. Wir erhalten hiemit

$$N(n,\mu) = (-1)^\mu \cos^{n-2\mu} B \frac{\Pi(2n-2\mu)}{2^{2n-2\mu}\,\Pi(n-2\mu)\,\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu)} \times F\left(\frac{2n-2\mu+1}{2}, -\mu, n-2\mu+1, \cos^2 B\right)$$

oder durchweg durch ΠFunctionen ausgedrückt,

$$N(n,\mu) = \Sigma_{p=0}^{p=\mu} (-1)^{\mu+p} \frac{\Pi(2n-2\mu+2p)\cos^{n-2\mu+2p} B}{2^{2n-2\mu+2p}\,\Pi(n-2\mu+p)\,\Pi(n-\mu+p)\,\Pi(\mu-p)\,\Pi(p)}$$

welcher Ausdruck sich in dem Falle, wo $\cos B$ klein ist, vorzugsweise zur Anwendung eignet.

41.

Man kann ausserdem den Ausdruck der NCoefficienten in einen andern verwandeln, dessen Glieder mit den Cosinussen der Vielfachen von B multiplicirt sind. Substituirt man den Werth

$$h^{2u} = \sin^{2u} B = \Sigma_{i=-u}^{i=+u} \frac{(-1)^i}{2^{2u}} \frac{\Pi(2u)}{\Pi(u+i)\,\Pi(u-i)} \cos 2iB$$

für h^{2u} in (46), so wird

$$N(n,\mu) = g^{n-2\mu}\, \Sigma\Sigma (-1)^{u+i} \frac{\Pi(2n+2u-2\mu)\,\Pi(2\mu)\cos 2iB}{2^{2n+2u}\,\Pi(n+u-\mu)\,\Pi(\mu)\,\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu-u)\,\Pi(u+i)\,\Pi(u-i)}$$

oder durch die FFunction, welche implicite darin enthalten ist, ausgedrückt

$$N(n,\mu) = g^{n-2\mu}\, \Sigma_{i=0}^{i=\mu} \frac{\Pi(2n+2i-2\mu)\,\Pi(2\mu)\cos 2iB}{2^{2n+2i-1}\,\Pi(n+i-\mu)\,\Pi(\mu)\,\Pi(n-\mu)\,\Pi(\mu-i)\,\Pi(2i)} \times F\left(\frac{2n+2i-2\mu+1}{2}, -(\mu-i), 2i+1, 1\right)$$

wo aber von dem Gliede, welches $i=0$ entspricht, nur die Hälfte genommen werden darf. Diese FFunction kann durch die im Art. 7 abgeleitete Summenformel (D) summirt werden, welche blos verlangt, dass das erste oder zweite Element eine ganze und negative Zahl sei, wie hier der Fall ist. Diese Summenformel giebt

$$F\left(\frac{2n+2i-2\mu+1}{2}, -(\mu-i), 2i+1, 1\right) = (-1)^{\mu-i}\frac{\Pi\left(\frac{2n-2i-2\mu-1}{2}\right)\Pi(2i)}{\Pi\left(\frac{2n-4\mu-1}{2}\right)\Pi(\mu+i)}$$

$$= (-1)^{\mu-i}\frac{\Pi(2n-2i-2\mu)\,\Pi(n-2\mu)\,\Pi(2i)}{2^{2\mu-2i}\,\Pi(n-i-\mu)\,\Pi(2n-4\mu)\,\Pi(\mu+i)}$$

nach Anwendung der obigen Reductionsformel. Es ergiebt sich also

$$(n, \mu) =$$

$$s^{n-2\mu} B \sum_{i=0}^{i=\mu} (-1)^{\mu-i} \frac{\Pi(2\mu)\,\Pi(n-2\mu)\,\Pi(2n+2i-2\mu)\,\Pi(2n-2i-2\mu)\cos 2iB}{2^{2n+2\mu-1}\,\Pi(\mu)\,\Pi(2n-4\mu)\,\Pi(n-\mu)\,\Pi(n+i-\mu)\,\Pi(n-i-\mu)\,\Pi(\mu+i)\,\Pi(\mu-i)}$$

wo für $i = 0$ dieselbe Bemerkung gilt wie oben.

Ich führe beiläufig an, dass man durch Verwandelung von μ in $n-\mu$ einen zweiten, auch nach den Cosinussen der Vielfachen von B fortschreitenden Ausdruck erhalten kann, welcher aber aus mehr Gliedern besteht wie der vorstehende. Einen dritten Ausdruck erhält man wenn man $\cos^{n-2\mu} B$ mit in die Verwandelung zieht.

42.

Ich werde nun zum Schlusse dieses § zeigen, wie man von den im Vorhergehenden ausgeführten Entwickelungen von $\triangle^{-1}$ zu denen von $\triangle^{-3}$, $\triangle^{-5}$, etc. übergehen kann. Die Gleichung

$$\triangle^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$$

giebt durch die Differentiation nach r

$$r\left(\frac{d\triangle}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}\triangle - \tfrac{1}{2}\frac{r'^2}{\triangle}\left(1 - \frac{r^2}{r'^2}\right)$$

Setzt man daher allgemein

$$Z_p = \left(\frac{r'}{\triangle}\right)^p$$

so wird

$$r\left(\frac{dZ_p}{dr}\right) = -p\frac{r'^p}{\triangle^{p+1}}\,r\left(\frac{d\triangle}{dr}\right)$$

$$= -\tfrac{1}{2}pZ_p + \tfrac{1}{2}pZ_{p+2}\left(1 - \frac{r^2}{r'^2}\right)$$

woraus

$$Z_{p+2} = \frac{1}{p}\left\{pZ_p + 2r\left(\frac{dZ_p}{dr}\right)\right\}\left(1 - \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-1}$$

folgt.

Im Vorhergehenden wurde

$$Z_1 = \Sigma_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n D_n$$

entwickelt, und hieraus folgt

$$Z_1 + 2r\left(\frac{dZ_1}{dr}\right) = \Sigma_0^\infty\,(2n+1)\left(\frac{r}{r'}\right)^n D_n$$

Wenn man diesen Ausdruck mit

$$\left(1 - \frac{r^2}{r'^2}\right)^{-1} = 1 + \frac{r^2}{r'^2} + \frac{r^4}{r'^4} + \ldots$$

multiplicirt, so bekommt man in Folge der vorstehenden allgemeinen Gleichung sogleich

$$Z_3 = \Sigma_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n \left\{(2n+1)D_n + (2n-3)D_{n-2} + (2n-7)D_{n-4} + \ldots\right\}$$

Aus diesem Ausdruck zieht man

$$3Z_3 + 2r\left(\frac{dZ_3}{dr}\right) =$$

$$\Sigma_0^\infty\left(\frac{r}{r'}\right)^n\left\{(2n+3)(2n+1)D_n + (2n+3)(2n-3)D_{n-2} + (2n+3)(2n-7)D_{n-4} + \ldots\right\}$$

und hieraus vermittelst derselben allgemeinen Gleichung

$$Z_5 = \tfrac{1}{3}\Sigma_0^\infty\left(\frac{r}{r'}\right)^n\left\{(2n+3)(2n+1)D_n + (4n+2)(2n-3)D_{n-2} + (6n-3)(2n-7)D_{n-4} \right.$$
$$\left. + (8n-12)(2n-11)D_{n-6} + \ldots\right\}$$

Um das Gesetz des Fortganges der ersten Factoren der D Coefficienten bemerklich zu machen, nehme ich die Differenzen derselben.

Die ersten Differenzen sind . . . $2n-1$, $2n-5$, $2n-9$, . . .
und die zweiten . . . . -4, -4 -4 . . .

woraus hervor geht, dass diese Factoren eine arithmetische Reihe zweiten Ranges bilden. Man kann sie also mittelst ihrer Differenzen so weit festsetzen, wie man will. Eben so findet man

$$Z_7 = \frac{1}{3.5}\Sigma_0^\infty\left(\frac{r}{r'}\right)^n\left\{(2n+5)(2n+3)(2n+1)D_n + (3n+\tfrac{9}{2})(4n+2)(2n-3)D_{n-2}\right.$$
$$+ (4n+2)(6n-3)(2n-7)D_{n-4} + (5n-\tfrac{5}{2})(8n-12)(2n-11)D_{n-6}$$
$$\left. + (6n-9)(10n-25)(2n-15)D_{n-8} + \ldots\right\}$$

wo die ersten Factoren wieder eine arithmetische Reihe zweiten Ranges bilden, u. s. w.

Geht man zu den Potenzen von $\triangle$ über, und schreibt die ersten Glieder der eben entwickelten Ausdrücke aus, so erhält man

$$\frac{1}{\triangle^3} = \frac{1}{r'^3} + 3D_1\frac{r}{r'^4} + (5D_2+1)\frac{r^2}{r'^5} + (7D_3 + 3D_1)\frac{r^3}{r'^6}$$
$$+ (9D_4 + 5D_2 + 1)\frac{r^4}{r'^7} + (11D_5 + 7D_3 + 3D_1)\frac{r^5}{r'^8} + \ldots$$
$$\frac{1}{\triangle^5} = \frac{1}{r'^5} + 5D_1\frac{r}{r'^6} + \left(\frac{35}{3}D_2 + \frac{10}{3}\right)\frac{r^2}{r'^7} + (21D_3 + 14D_1)\frac{r^3}{r'^8}$$
$$+ (33D_4 + 30D_2 + 7)\frac{r^4}{r'^9} + \left(\frac{143}{3}D_5 + \frac{154}{3}D_3 + 27D_1\right)\frac{r^5}{r'^{10}} + \ldots$$
$$\frac{1}{\triangle^7} = \frac{1}{r'^7} + 7D_1\frac{r}{r'^8} + (21D_2 + 7)\frac{r^2}{r'^9} + \left(\frac{231}{5}D_3 + \frac{189}{5}D_1\right)\frac{r^3}{r'^{10}}$$
$$+ \left(\frac{429}{5}D_4 + 99D_2 + \frac{126}{5}\right)\frac{r^4}{r'^{11}} + \left(143D_5 + \frac{1001}{5}D_3 + \frac{594}{5}D_1\right)\frac{r^5}{r'^{12}} + \ldots$$

die man beliebig fortsetzen kann.

Ich bemerke noch, dass man auf ähnliche Art auch die Entwickelung der positiven Potenzen von $\triangle$ erhalten kann, werde mich aber dabei nicht aufhalten, da sie in der Störungstheorie nicht vorkommen.

§ III.

Entwickelung der Grösse $\frac{1}{\triangle}$ in Reihen, die nach den Potenzen von $\frac{rr'}{(r \pm r')^2}$ und $\frac{rr'}{r^2 + r'^2}$ fortschreiten.

43.

In Gauss «*Disquisitiones generales circa seriem infinitam* etc.» ist schon gezeigt, wie die Grösse

$$(r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\varphi)^n$$

in Reihen wie die oben genannten entwickelt werden kann; die Entwickelung des zusammengesetzteren Ausdruckes, welcher hier überhaupt betrachtet wird, ist noch nirgends gegeben, kann aber sehr leicht erhalten werden, wie die folgenden Entwickelungen zeigen werden. Da die Grössen

$$\frac{rr'}{(r + r')^2} \text{ und } \frac{rr'}{r^2 + r'^2}$$

für jeden Werth von r und r' kleiner sind wie $\frac{r}{r'}$, so scheint es, dass die Anordnung der Reihen nach den Potenzen dieser Grössen auf grössere Convergenz führen müsste, wie die im Vorhergehenden

entwickelte, nach den Potenzen von $\frac{r}{r'}$ fortschreitende. Es ist dieses jedoch nicht der Fall, weil die Coefficienten im Allgemeinen weit grösser werden, und um dieses zu zeigen, werde ich die Entwickelungen hier vornehmen, mich jedoch dabei auf die von Δ^{-1} beschränken, da man aus dieser leicht die für die andern negativen und ungraden Potenzen von Δ erhalten kann.

44.

Den Ausdruck

$$\Delta^2 = r^2 + r'^2 - 2rr' \cos^2 \tfrac{1}{2} J \cos(U - U') - 2rr' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \cos(U + U')$$

bringt man leicht auf folgende Formen

$$\begin{aligned}\Delta^2 &= (r+r')^2 - 4rr' \cos^2 \tfrac{1}{2} J \cos^2 \tfrac{1}{2}(U-U') - 4rr' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \cos^2 \tfrac{1}{2}(U+U') \\ &= (r-r')^2 + 4rr' \cos^2 \tfrac{1}{2} J \sin^2 \tfrac{1}{2}(U-U') + 4rr' \sin^2 \tfrac{1}{2} J \sin^2 \tfrac{1}{2}(U+U')\end{aligned}$$

Führt man hierin die schon oben angewandten, imaginären Exponentialfunctionen durch die Gleichungen

$$2 \cos(U - U') = p + \frac{1}{p}, \quad 2 \cos(U + U') = q + \frac{1}{q}$$

ein, so bekommt man

$$\frac{\Delta^2}{(r \pm r')^2} = 1 - \frac{rr' \cos^2 \frac{1}{2} J}{(r \pm r')^2} \left\{ \left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} J \left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2 \right\}$$

welche Formel beide obigen Formen umfasst. Setzt man nun zur Abkürzung

$$P = \left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^2 + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} J \left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^2$$

so wird

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma_0^\infty \frac{\Pi(2n)}{2^{2n} (\Pi(n))^2} \frac{r^n r'^n \cos^{2n} \frac{1}{2} J}{(r \pm r')^{2n+1}} P^n$$

wo nur noch der allgemeine Ausdruck der n^{ten} Potenz von P zu entwickeln ist.

45.

Durch den binomischen Satz bekommt man zuerst

$$P^n = \Sigma \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-l)\, \Pi(l)} \left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{2(n-l)} \left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{2l} \operatorname{tg}^{2l} \tfrac{1}{2} J$$

wo die Summe von $l = 0$ bis $l = n$ ausgedehnt werden muss. Derselbe Satz giebt ferner

$$\left(\sqrt{p} \pm \frac{1}{\sqrt{p}}\right)^{2(n-l)} = \Sigma (\pm 1)^r \frac{\Pi(2n-2l)}{\Pi(2n-2l-r)\,\Pi(r)}\, p^{n-l-r}$$

wo die Summe von $r=0$ bis $r=2\,(n-l)$ genommen werden muss, und

$$\left(\sqrt{q} \pm \frac{1}{\sqrt{q}}\right)^{2l} = \Sigma (\pm 1)^s \frac{\Pi(2l)}{\Pi(2l-s)\,\Pi(s)}\, q^{l-s}$$

wo die Summe von $s=0$ bis $s=2l$ genommen werden muss. Aus diesen drei Ausdrücken folgt sogleich

$$P^n = \Sigma (\pm 1)^{r+s} \operatorname{tg}^{2l} \tfrac{1}{2} J \frac{\Pi(n)\,\Pi(2n-2l)\,\Pi(2l)\, p^{n-l-r}\, q^{l-s}}{\Pi(n-l)\,\Pi(l)\,\Pi(2n-2l-r)\,\Pi(r)\,\Pi(2l-s)\,(s)}.$$

Da P eine reelle Grösse ist, so braucht man die Summationen nur bis dahin auszudehnen, wo beide Exponenten anfangen ihre Zeichen zu wechseln. Führen wir nun in den vorstehenden Ausdruck die zu den Bögen U und U' gehörigen imaginären Exponentialfunctionen ein, und bezeichnen sie wie oben mit u und u'. Aus den Relationen

$$p = \frac{u}{u'}, \quad q = uu'$$

erhalten wir

$$p^{n-l-r}\, q^{l-s} = u^{n-f}\, u'^{-(n-f-2g)}$$

wenn

$$r + s = f$$
$$2l + r - s = f + 2g$$

gesetzt wird. Diese beiden Gleichungen können wir anwenden um entweder r und s oder r und l zu eliminiren. Um r und l zu eliminiren erhält man folgende Gleichungen

$$r = f - s$$
$$l = g + s$$

und es ist auf die im vor. § auseinandergesetzte Art leicht zu finden, dass für jeden Werth von f und g in dem Ausdruck, der durch die genannten Eliminationen hervorgeht, die Summation in Bezug auf s von $s=0$ bis $s=f$ ausgedehnt werden muss. Führt man nun die oben genannten Substitutionen aus, so wird

$$P^n = \Sigma (\pm 1)^f \operatorname{tg}^{2(g+s)} \tfrac{1}{2} J \frac{\Pi(n)\,\Pi(2n-2g-2s)\,\Pi(2g+2s)\, u^{n-f}\, u'^{-(n-f-2g)}}{\Pi(n-g-s)\,\Pi(g+s)\,\Pi(2n-f-2g-s)\,\Pi(f-s)\,\Pi(2g+s)\,\Pi(s)}$$

46.

Substituirt man den eben gefundenen Ausdruck in den im Art. 44 abgeleiteten, und setzt

$$\frac{1}{\triangle} = \Sigma\,(\pm 1)^f\, T\,(n,\, f,\, g)\; u^{n-f}\, u'^{-(n-f-2g)}\, \frac{r^n\, r'^n}{(r \pm r')^{2n+1}}$$

so wird

$$T\,(n, f, g) = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\; \mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\; \Sigma_{s=0}^{s=f}\, \frac{\Pi\,(2n)\; \Pi\,(2n-2g-2s)\; \Pi\,(2g+2s)\; \mathrm{tg}^{2s}\tfrac{1}{2}J}{2^{2n}\, \Pi\,(n)\, \Pi\,(n-g-s)\, \Pi\,(g+s)\, \Pi\,(2n-f-2g-s)\, \Pi\,(f-s)\, \Pi\,(2g+s)\, \Pi\,(s)}$$

Für die numerische Berechnung lässt sich dieser Ausdruck auf bekannte Gruppen von ΠFunctionen hinführen und dadurch vereinfachen. Zufolge des vor. § ist

$$\varrho\,(n-g-s,\, g+s) = \frac{\Pi\,(2n)}{2^{2n}\, \Pi\,(n)\; \Pi\,(n-g-s)\; \Pi\,(g+s)}$$

und wenn wir den h^{ten} Binomialcoefficienten der l^{ten} Potenz mit $B\,(l,\, h)$ bezeichnen, so ist

$$B\,(l,\, h) = \frac{\Pi\,(l)}{\Pi\,(l-h)\; \Pi\,(h)}.$$

Hiemit wird

$$T\,(n, f, g) = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\, \mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\;\; \Sigma_0^f\, \varrho\,(n-g-s,\, g+s)\,.\, B\,(2n-2g-2s,\, f-s)\,.\, B\,(2g+2s,\, s)\,.\, \mathrm{tg}^{2s}\tfrac{1}{2}J$$

Um zu zeigen, wie die numerischen Werthe dieser Coefficienten beschaffen sind, und um eine unmittelbare Vergleichung derselben mit den aus den Entwickelungen des vor. § folgenden, und in Tafel IV zusammen gestellten, zu bewirken, habe ich dieselben, aber nur bis $n = 6$ in Tafel VI zusammengestellt. Man sieht, dass in beiden Tafeln die Coefficienten für die erste Abtheilung eines jeden Werthes von n, oder für $f = 0$, einander gleich sind, dass aber in den andern Abtheilungen die Coefficienten der Tafel VI bedeutend und zunehmend grösser sind wie die correspondirenden der Tafel IV.

47.

Die Entwickelung von $\triangle^{-1}$ nach den Potenzen von $\frac{rr'}{r^2 + r'^2}$ kann auf ähnliche Art wie die eben ausgeführte bewirkt werden. Der Ausdruck

$$\triangle^2 = r^2 + r'^2 - 2rr'\cos^2\tfrac{1}{2}J\, \cos\,(U - U') - 2rr'\sin^2\tfrac{1}{2}J\, \cos\,(U + U')$$

giebt zuerst

$$\frac{\Delta^2}{r^2+r'^2} = 1 - \frac{r r' \cos^2 \frac{1}{2} J}{r^2+r'^2} \left\{ \left(p + \frac{1}{p}\right) + \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} J \left(q + \frac{1}{q}\right) \right\}$$

und hieraus folgt

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma_0^\infty \frac{\Pi(2n)}{2^{2n}(\Pi(n))^2} \frac{r^n r'^n \cos^{2n} \frac{1}{2} J}{(r^2+r'^2)^{\frac{2n+1}{2}}} Q^n$$

nachdem

$$Q = p + \frac{1}{p} + \left(q + \frac{1}{q}\right) \operatorname{tg}^2 \tfrac{1}{2} J$$

gesetzt worden ist.

48.

Wendet man nun auf die Entwickelung von Q^n den binomischen Satz auf ähnliche Art wie im Art. 45 an, so bekommt man zuerst die drei Ausdrücke

$$Q^n = \Sigma \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-l)\,\Pi(l)} \left(p + \frac{1}{p}\right)^{n-l} \left(q + \frac{1}{q}\right)^l \operatorname{tg}^{2l} \tfrac{1}{2} J$$

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)^{n-l} = \Sigma \frac{\Pi(n-l)}{\Pi(n-l-r)\,\Pi(r)} p^{n-l-2r}$$

$$\left(q + \frac{1}{q}\right)^l = \Sigma \frac{\Pi(l)}{\Pi(l-s)\,\Pi(s)} q^{l-2s}$$

wo die Summationen bez.

$$\text{von } l = 0 \text{ bis } l = n$$
$$\text{von } r = 0 \text{ bis } r = n - l$$
$$\text{und von } s = 0 \text{ bis } s = l$$

ausgedehnt werden müssen. Aus diesen drei Ausdrücken folgt

$$Q^n = \Sigma \frac{\Pi(n) \operatorname{tg}^{2l} \frac{1}{2} J}{\Pi(n-l-r)\,\Pi(l-s)\,\Pi(r)\,\Pi(s)} p^{n-l-2r} q^{l-2s} .$$

Führen wir nun u und u' statt p und q ein, so bekommen wir

$$p^{n-l-2r} q^{l-2s} = u^{n-2f} u'^{-(n-2f-2g)}$$

wenn wir jetzt

$$r + s = f$$
$$l + r - s = f + g$$

setzen. Für die Elimination von r und l ergeben sich hieraus die Gleichungen

$$r = f - s$$
$$l = g + 2s$$

und es muss schliesslich wieder für jeden Werth von f und g die Summation in Bezug auf s von $s = 0$ bis $s = f$ ausgedehnt werden. Die Substitution dieser Ausdrücke giebt nun

$$Q^n = \Sigma \frac{\Pi(n)\ \mathrm{tg}^{2g+4s}\tfrac{1}{2}J}{\Pi(n-f-g-s)\ \Pi(g+s)\ \Pi(f-s)\ \Pi(s)}\ u^{n-2f}\ u'^{-(n-2f-2g)}$$

49.

Durch die Substitution des eben gefundenen Ausdrucks für Q^n in die Formel des Art. 47 erhält man

$$\frac{1}{\Delta} = \Sigma\, S(n, f, g)\ u^{n-2f}\ u'^{-(n-2f-2g)}\ \frac{r^n r'^n}{(r^2+r'^2)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

wo

$$S(n, f, g) = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\ \mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\ \Sigma_{s=0}^{s=f} \frac{\Pi(2n)\ \mathrm{tg}^{4s}\tfrac{1}{2}J}{2^{2n}\ \Pi(n)\ \Pi(n-f-g-s)\ \Pi(g+s)\ \Pi(f-s)\ \Pi(s)}$$

ist. Zum Zweck der einfacheren numerischen Berechnung kann man diesen Ausdruck auch durch die ϱ und B Functionen zusammenziehen. Man findet

$$(n, f, g) = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\ \mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\ \Sigma_{s=0}^{s=f}\ \varrho(n-f-g-s, f+g+s) \,.\, B(f+g+s, f) \,.\, B(f, s)\ \mathrm{tg}^{4s}\tfrac{1}{2}J$$

Man kann denselben Ausdruck auch durch eine F Function darstellen, es wird nemlich auch

$$n, f, g) = \cos^{2n}\tfrac{1}{2}J\ \mathrm{tg}^{2g}\tfrac{1}{2}J\ \varrho(n-f-g, f+g) \,.\, B(f+g, f) \,.\, F(-f, -(n-f-g), g+1, \mathrm{tg}^{4}\tfrac{1}{2}J)$$

Von dieser Function habe ich der leichteren Vergleichung mit den vorhergehenden wegen die numerischen Coefficienten bis $n = 6$ berechnet, und in Tafel VII angeführt.

Tafel I. $\log \varrho(z, z')$

Argg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	0.												
1	9.6989700	9.8750613											
2	9.5740313	9.9719713	0.2150093										
3	9.4948500	0.0389181	0.3911006	0.6543420									
4	9.4368580	0.0900706	0.5294033	0.8651954	1.1381967								
5	9.3911006	0.1314633	0.6433466	1.0412866	1.3686456	1.6473992							
6	9.3533120	0.1662254	0.7402566	1.1925543	1.5682179	1.8904372	2.1729838						
7	9.3211273	0.1961886	0.8245775	1.3251799	1.7443092	2.1060370	2.4247958	2.7100315					
8	9.2930986	0.2225175	0.8992112	1.4432792	1.9019170	2.2998571	2.6520396	2.9683095	3.2555512				
9	9.2682750	0.2459986	0.9661579	1.5497345	2.0445845	2.4759483	2.8591651	3.2043987	3.5187927	3.8075882			
10	9.2459986	0.2671879	1.0268558	1.6466445	2.1749183	2.6373163	3.0494968	3.4218827	3.7618307	4.0747599	4.3647946		
11	9.2257953	0.2864931	1.0823731	1.7355856	2.2948936	2.7862553	3.2255880	3.6235280	3.9876098	4.3234019	4.6351557	4.9262015	
12	9.2073118	0.3042219	1.1335256	1.8177724	2.4060441	2.9245580	3.3894448	3.8115185	4.1984631	4.5559745	4.8884129	5.1992028	5.4910894
13	9.1902785	0.3206123	1.1809503	1.8941607	2.5095847	3.0536527	3.5426732	3.9876098	4.3962736	4.7744696	5.1266521	5.4563273	5.7663121
14	9.1744842	0.3358522	1.2251539	1.9655166	2.6064947	3.1746964	3.6865798	4.1532356	4.5825841	4.9805241	5.3515919	5.6993653	
15	9.1597610	0.3500927	1.2665466	2.0324634	2.6975752	3.2886398	3.8222424	4.3095828	4.7586753	5.1755007	5.5646668		
16	9.1459727	0.3634566	1.3054647	2.0955152	2.7834898	3.3962736	3.9505609	4.4576453	4.9256232	5.3605468			
17	9.1330077	0.3760458	1.3421875	2.1551009	2.8647947	3.4982632	4.0722945	4.5982643	5.0843404				
18	9.1207733	0.3879450	1.3769496	2.2115822	2.9419607	3.5951732	4.1880898	4.7321579					
19	9.1091914	0.3992260	1.4099499	2.2652671	3.0153896	3.6874875	4.2985023						
20	9.0981960	0.4099499	1.4413583	2.3164196	3.0854275	3.7756235							
21	9.0877306	0.4201690	1.4713216	2.3652682	3.1523743								
22	9.0777464	0.4299289	1.4999667	2.4120116									
23	9.0682010	0.4392689	1.5274050										
24	9.0590577	0.4482237											
25	9.0502837												

Tafel II. $\log \pi (z, z')$

Argg.	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0								
1	0	0.4771213							
2	0	0.6989700	1.0669468						
3	0	0.8450980	1.3222193	1.6646420					
4	0	0.9542425	1.5185139	1.9334873	2.2644805				
5	0	1.0413927	1.6782148	2.1553360	2.5406869	2.8651980			
6	0	1.1139434	1.8129134	2.3443923	2.7780478	3.1460246	3.4663598		
7	0	1.1760913	1.9294189	2.5092025	2.9863238	3.3938091	3.7503564	4.0677768	
8	0	1.2304489	2.0320813	2.6553306	3.1719604	3.6156579	4.0056289	4.3540836	4.6693540
9	0	1.2787536	2.1238516	2.7866095	3.3394514	3.8165727	4.2375780	4.6149964	4.9574190
10	0	1.3222193	2.2068259	2.9057959	3.4920616	4.0002171	4.4501861	4.8547567	
11	0	1.3617278	2.2825466	3.0149404	3.6322403	4.1693595	4.6464807	5.0766054	
12	0	1.3979400	2.3521825	3.1156105	3.7618742	4.3261456	4.8288210		
13	0	1.4313638	2.4166405	3.2090322	3.8824481	4.4722736	4.9990827		
14	0	1.4623980	2.4766384	3.2961824	3.9951524	4.6091116			
15	0	1.4913617	2.5327544	3.3778524	4.1009561	4.7377782			
16	0	1.5185139	2.5854607	3.4546924	4.2006590				
17	0	1.5440680	2.6351485	3.5272431	4.2949289				
18	0	1.5682017	2.6821451	3.5959589					
19	0	1.5910646	2.7267272	3.6612257					
20	0	1.6127839	2.7691311						
21	0	1.6334685	2.8095597						
22	0	1.6532125							
23	0	1.6720979							
24	0								
25	0								

Tafel III. $\log \lambda(g, \sigma)$

g	$\log \lambda(g, 0)$	$\log \lambda(g, 1)$	$\log \lambda(g, 2)$
	$f = 1$		
0	0.6020600		
1	0.1249387		
2	9.9030900		
3	9.7569620		
4	9.6478175		
5	9.5606673		
6	9.4881167		
7	9.4259687		
8	9.3716111		
9	9.3233064		
10	9.2798407		
11	9.24033		
12	9.20412		
13	9.17070		
14	9.13966		
15	9.11070		
16	9.08355		
17	9.05799		
18	9.03386		
	$f = 2$		
0	0.9030900	9.6478175	
1	0.4259687	9.4259687	
2	0.2041200	9.2798407	
3	0.0579920	9.1706962	
4	9.9488475	9.0835460	
5	9.8616973	9.0109954	
6	9.7891467	8.9488475	
7	9.7269987	8.8944898	
8	9.6726411	8.8461851	
9	9.6243364	8.8027194	
10	9.58087	8.76321	
11	9.54136	8.72700	
12	9.50515	8.69357	
13	9.47173	8.66254	
14	9.44069	8.63358	
15	9.41173	8.60643	
16	9.38458	8.58087	
	$f = 3$		
0	1.0791813	9.9488475	9.2041200
1	0.6020600	9.7269987	9.0579919
2	0.3802112	9.5808707	8.9488475
3	0.2340832	9.4717262	8.8616973
4	0.1249387	9.3845760	8.7891466
5	0.0377886	9.3120254	8.7269987
6	9.9652379	9.2498775	8.6726411
7	9.9030900	9.1955198	8.6243364
8	9.8487323	9.1472151	8.5808707
9	9.80043	9.10375	8.54136
10	9.75696	9.06424	8.50515
11	9.71745	9.02803	8.47173
12	9.68124	8.99460	8.44069
13	9.64782	8.96357	8.41173
14	9.61678	8.93461	8.38458

Tafel III. $\log \lambda (g, \sigma)$

g	$\log \lambda (g, 0)$	$\log \lambda (g, 1)$	$\log \lambda (g, 2)$	$\log \lambda (g, 3)$	$\log \lambda (g, 4)$	$\log \lambda (g, 5)$	$\log \lambda (g, 6)$	$\log \lambda (g, 7)$	$\log \lambda (g, 8)$	$\log \lambda (g, 9)$
	$f = 4$									
0	1.2041200	0.1249387	9.5051500	8.9118639						
1	0.7269987	9.9030900	9.3590219	8.8027194						
2	0.5051500	9.7569620	9.2498775	8.7155693						
3	0.3590219	9.6478175	9.1627273	8.6430186						
4	0.2498775	9.5606673	9.0901766	8.5808707						
5	0.1627273	9.4881166	9.0280287	8.5265130						
6	0.0901766	9.4259687	8.9736711	8.4782084						
7	0.0280287	9.3716111	8.9253664	8.4347427						
8	9.97367	9.32331	8.88190	8.39523						
9	9.92537	9.27984	8.84239	8.35902						
10	9.88190	9.24033	8.80618	8.32560						
11	9.84239	9.20412	8.77276	8.29456						
12	9.80618	9.17070	8.74172	8.26560						
	$f = 5$									
0	1.30103	0.24988	9.68124	9.21289	8.69358					
1	0.82391	0.02803	9.53511	9.10375	8.60642					
2	0.60206	9.88190	9.42597	9.01660	8.53387					
3	0.45593	9.77276	9.33882	8.94405	8.47173					
4	0.34679	9.68561	9.26627	8.88190	8.41737					
5	0.25964	9.61306	9.20412	8.82754	8.36906					
6	0.18709	9.55091	9.14976	8.77924	8.32560					
7	0.12494	9.49655	9.10146	8.73577	8.28609					
8	0.07058	9.44825	9.05799	8.69626	8.24988					
9	0.02228	9.40478	9.01848	8.66005	8.21646					
10	9.97881	9.36527	8.98227	8.62663	8.18542					
	$f = 6$									
0	1.38021	0.34679	9.80618	9.38899	8.99461	8.51927				
1	0.90309	0.12494	9.66005	9.27984	8.90745	8.44672				
2	0.68124	9.97881	9.55091	9.19269	8.83490	8.38458				
3	0.53511	9.86967	9.46376	9.12014	8.77276	8.33022				
4	0.42597	9.78252	9.39121	9.05799	8.71840	8.28191				
5	0.33882	9.70997	9.32906	9.00363	8.67009	8.23845				
6	0.26627	9.64782	9.27470	8.95533	8.62663	8.19894				
7	0.20412	9.59346	9.22640	8.91186	8.58712	8.16273				
8	0.14976	9.54516	9.18293	8.87235	8.55091	8.12931				
	$f = 7$									
0	1.44716	0.42597	9.90309	9.51392.	9.17070	8.82030	8.37417			
1	0.97004	0.20412	9.75696	9.40478	9.08355	8.74775	8.31203			
2	0.74819	0.05799	9.64782	9.31763	9.01100	8.68561	8.25767			
3	0.60206	9.94885	9.56067	9.24508	8.94885	8.63125	8.20936			
4	0.49292	9.86170	9.48812	9.18293	8.89449	8.58294	8.16590			
5	0.40577	9.78915	9.42597	9.12857	8.84619	8.53948	8.12639			
6	0.33322	9.72700	9.37161	9.08027	8.80272	8.49997	8.09018			
	$f = 8$									
0	1.50515	0.49292	9.98227	9.61083	9.29564	8.99640	8.67520	8.24988		
1	1.02803	0.27107	9.83614	9.50169	9.20848	8.92385	8.61306	8.19552		
2	0.80618	0.12494	9.72700	9.41454	9.13593	8.86170	8.55870	8.14722		
3	0.66005	0.01579	9.63985	9.34199	9.07379	8.80734	8.51039	8.10375		
4	0.55091	9.92865	9.56730	9.27984	9.01943	8.75904	8.46693	8.06424		
	$f = 9$									
0	1.55630	0.55091	0.04922	9.69002	9.39255	9.12133	8.85129	8.55091	8.14116	
1	1.07918	0.32906	9.90309	9.58087	9.30539	9.04878	8.78915	8.49655	8.09286	
2	0.85733	0.18293	9.79395	9.49372	9.23284	8.98664	8.73479	8.44825	8.04939	
	$f = 10$									
0	1.60206	0.60206	0.10721	9.75696	9.47173	9.21824	8.97623	8.72700	8.44219	8.04455

Tafel IV. Logg. der allgemeinen Coefficienten von $\frac{1}{\Delta}$

Exp.	$+\operatorname{tg}^0 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^6 \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}J$
	D_0				
0, 0	0.				
	D_1				
1, −1	9.6989700				
1, +1	9.6989700				
	D_2				
2, −2	9.5740313				
2, 0	9.8750613				
2, +2	9.5740313				
0, 0	9.3979400	0.	9.3979400		
	D_3				
3, −3	9.4948500				
3, −1	9.9719713				
3, +1	9.9719713				
3, +3	9.4948500				
1, −1	9.2730013	0.1760913	0.0511525		
1, +1	0.0511525	0.1760913	9.2730013		
	D_4				
4, −4	9.4368580				
4, −2	0.0389181				
4, 0	0.2150093				
4, +2	0.0389181				
4, +4	9.4368580				
2, −2	9.1938200	0.2730013	0.3699113		
2, 0	0.1480626	0.5740313	0.1480626		
2, +2	0.3699113	0.2730013	9.1938200		
0, 0	9.1480626	0.3521826	0.7043652	0.3521826	9.1480626
	D_5				
5, −5	9.3911006				
5, −3	0.0900706				
5, −1	0.3911006				
5, +1	0.3911006				
5, +3	0.0900706				
5, +5	9.3911006				
3, −3	9.1358280	0.3399480	0.5829861		
3, −1	0.2150094	0.8170694	0.6129493		
3, +1	0.6129493	0.8170694	0.2150094		
3, +3	0.5829861	0.3399480	9.1358280		
1, −1	9.0688813	0.4490926	1.0231239	0.9719713	0.2449726
1, +1	0.2449726	0.9719713	1.0231239	0.4490926	9.0688813
	D_6				
6, −6	9.3533120				
6, −4	0.1314633				
6, −2	0.5294033				
6, 0	0.6543420				
6, +2	0.5294033				
etc.					

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^{0\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{2\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{4\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{6\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{8\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{10\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{12\frac{1}{2}}J$
	D_6						
4, −4	9.0900706	0.3911006	0.7432831				
4, −2	0.2661619	0.9931606	0.9351686				
4, 0	0.7890406	1.1692519	0.7890406				
4, +2	0.9351686	0.9931606	0.2661619				
4, +4	0.7432831	0.3911006	9.0900706				
2, −2	9.0108893	0.5160393	1.2361987	1.3611373	0.8559874		
2, 0	0.3119194	1.2150094	1.4880106	1.2150094	0.3119194		
2, +2	0.8559874	1.3611373	1.2361987	0.5160393	9.0108893		
0, 0	8.9897000	0.5460026	1.3418826	1.5917601	1.3418826	0.5460026	8.9897000
	D_7						
7, −7	9.3211273						
7, −5	0.1662254						
7, −3	0.6433466						
7, −1	0.8651954						
7, +1	0.8651954						
etc.							
5, −5	9.0522820	0.4324933	0.8718260				
5, −3	0.3075546	1.1314633	1.1826158				
5, −1	0.9273433	1.4324933	1.1984100				
5, +1	1.1984100	1.4324933	0.9273433				
5, +3	1.1826158	1.1314633	0.3075546				
5, +5	0.8718260	0.4324933	9.0522820				
3, −3	8.9651319	0.5671919	1.3964957	1.6463731	1.2873512		
3, −1	0.3630719	1.3911006	1.8102299	1.7133199	1.0320787		
3, +1	1.0320787	1.7133199	1.8102299	1.3911006	0.3630719		
3, +3	1.2873512	1.6463731	1.3964957	0.5671919	8.9651319		
1, −1	8.9317080	0.6129493	1.5549574	1.9809262	1.9528974	1.4580474	0.3788661
1, +1	0.3788661	1.4580474	1.9528974	1.9809262	1.5549574	0.6129493	8.9317080
	D_8						
8, −8	9.2930986						
8, −6	0.1961886						
8, −4	0.7402566						
8, −2	1.0412866						
8, 0	1.1381967						
8, +2	1.0412866						
etc.							
6, −6	9.0200973	0.4672555	0.9791388				
6, −4	0.3423167	1.2454066	1.3837093				
6, −2	1.0412866	1.6433466	1.5184079				
6, 0	1.4092634	1.7682854	1.4092634				
6, +2	1.5184079	1.6433466	1.0412866				
etc.							
4, −4	8.9273433	0.6085845	1.5250386	1.8718260	1.6219485		
4, −2	0.4044646	1.5294033	2.0576771	2.0857058	1.5505926		
4, 0	1.1703814	1.9765613	2.2195993	1.9765613	1.1703814		
4, +2	1.5505926	2.0857058	2.0576771	1.5294033	0.4044646		
4, +4	1.6219485	1.8718260	1.5250386	0.6085845	8.9273433		
2, −2	8.8859506	0.6641019	1.7152544	2.2661619	2.3842612	2.0655025	1.2081699
2, 0	0.4300186	1.6341387	2.2751167	2.4792367	2.2751167	1.6341387	0.4300186
2, +2	1.2081699	2.0655025	2.3842612	2.2661619	1.7152544	0.6641019	8.8859506
0, 0	8.7737160	0.6798961	1.7680322	2.3700922	2.5639122	2.3700922	etc.

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^{0}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{2}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{4}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{6}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{8}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{10}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{12}\frac{1}{2}J$
	D_9						
9, −9	9.2682750						
9, −7	0.2225175						
9, −5	0.8245775						
9, −3	1.1925543						
9, −1	1.3686456						
etc.							
7, −7	8.9920686	0.4972186	1.0712499				
7, −5	0.3722799	1.3423166	1.5531700				
7, −3	1.1381966	1.8194378	1.7816493				
7, −1	1.5853546	2.0412866	1.7914092				
7, +1	1.7914092	2.0412866	1.5853546				
etc.							
5, −5	8.8951586	0.6433468	1.6323514	2.0583201	1.8955927		
5, −3	0.4392267	1.6433468	2.2587706	2.3837093	1.9577406		
5, −1	1.2843247	2.1874146	2.5395972	2.4214979	1.7614460		
5, +1	1.7614460	2.4214979	2.5395972	2.1874146	1.2843247		
etc.							
3, −3	8.8481620	0.7054946	1.8437973	2.4916148			
3, −1	0.4714113	1.7724414	2.5225639	2.8516226	etc.		
3, +1	1.3464726	2.3287439	2.7936306	2.8516226			
3, +3	1.8138340	2.5250385	2.7188585	2.4916148			
1, −1	8.8279586	0.7310487	1.9283292	2.6553279	2.9952760	etc.	
1, +1	0.4811711	1.8102300	2.5973360	2.9775472	2.9952760		
	D_{10}						
10, −10	9.24600						
10, −8	0.24600						
10, −6	0.89921						
10, −4	1.32518						
10, −2	1.56822						
10, 0	1.64740						
etc.							
8, −8	8.96725	0.52355	1.15194				
8, −6	0.39861	1.42664	1.69964				
8, −4	1.22252	1.97071	2.00546				
8, −2	1.73662	2.27173	2.10901				
8, 0	2.02186	2.36865	2.02186				
etc.							
6, −6	8.86713	0.67331	1.72446	2.21738	2.12720		
6, −4	0.46919	1.74026	2.42823	2.63235	2.29353		
6, −2	1.38124	2.36351	2.80284	2.78165	2.23074		
6, 0	1.93754	2.69450	2.92174	2.69450	1.93754		
etc.							
4, −4	8.81599	0.74027	1.95111	2.67811			
4, −2	0.50618	1.88639	2.72366	3.14963			
4, 0	1.46042	2.53960	3.11363	3.29656	etc.		
4, +2	2.02469	2.86083	3.20078	3.14963			
4, +4	2.29354	2.89559	2.99250	2.67811			
2, −2	8.79017	0.77244	2.05687	2.88078	3.32987		
2, 0	0.52256	1.94853	2.84478	3.34993	3.51379	etc.	
2, +2	1.48477	2.59198	3.20300	3.43708	3.32987		
0, 0	8.78220	0.78220	2.08862	2.94056	3.42664	3.58500	etc.

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^{0\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{2\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{4\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{6\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{8\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{10\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{12\frac{1}{2}}J$
	D_{11}						
11, — 11	9.22580						
11, — 9	0.26719						
11, — 7	0.96616						
11, — 5	1.44328						
11, — 3	1.74431						
11, — 1	1.89044						
etc.							
9, — 9	8.94497	0.54703	1.22372				
9, — 7	0.42209	1.50127	1.82863				
9, — 5	1.29715	2.10333	2.20024				
9, — 3	1.86925	2.47131	2.38113				
9, — 1	2.22143	2.64740	2.38776				
etc.							
7, — 7	8.84231	0.69964	1.80515	2.35606	2.32803		
7, — 5	0.49552	1.82458	2.57470	2.84577	2.57949		
7, — 3	1.46556	2.51478	3.02665	3.08464	2.62089		
7, — 1	2.08880	2.92494	3.23934	3.10901	2.46119		
etc.							
5, — 5	8.78795	0.77022	2.04322	2.83717	3.22411	3.20638	2.69148
5, — 3	0.53614	1.98330	2.89312	3.39827	3.53657	3.29353	2.56654
5, — 1	1.55733	2.71569	3.37687	3.65671	3.58292	3.13383	2.20078
etc.							
3, — 3	8.75800	0.80722	2.16419	3.06728	3.60352		
3, — 1	0.55733	2.06248	3.04588	3.64794	3.92094	etc.	
3, + 1	1.59872	2.80284	3.52300	3.88202	3.92094		
3, + 3	2.23555	3.19663	3.68271	3.80764	3.60352		
1, — 1	8.74441	0.82359	2.21716	3.16601	3.76123	4.04453	etc.
1, + 1	0.56395	2.08683	3.09222	3.72231	4.03230	4.04453	
	D_{12}						
12, — 12	9.20731						
12, — 10	0.28649						
12, — 8	1.02686						
12, — 6	1.54973						
12, — 4	1.90192						
12, — 2	2.10604						
12, 0	2.17298						
etc.							
10, — 10	8.92477	0.56822	1.28838				
10, — 8	0.44328	1.56822	1.94388				
10, — 6	1.36410	2.22143	2.37270				
10, — 4	1.98735	2.64740	2.61937				
10, — 2	2.39752	2.89044	2.70335				
10, 0	2.63080	2.96962	2.63080				
etc.							
8, — 8	8.82003	0.72312	1.87693	2.47899	2.50532		
8, — 6	0.51900	1.89921	2.70369	3.03275	2.82863		
8, — 4	1.54019	2.64740	3.22143	3.34637	2.95516		
8, — 2	2.22143	3.12452	3.51146	3.46031	2.89964		
8, 0	2.66076	3.38776	3.60524	3.38776	2.66076		
etc.							

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^{0\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{2\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{4\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{6\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{8\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{10\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{12\frac{1}{2}}J$	$-\operatorname{tg}^{14\frac{1}{2}}J$	$+\operatorname{tg}^{16\frac{1}{2}}J$
	D_{12}								
6, −6	8.76313	0.79655	2.12391	2.97585	3.42494	3.47416	3.03179		
6, −4	0.56247	2.06762	3.03959	3.61169	3.82253	3.65869	3.01884		
6, −2	1.64165	2.86696	3.60068	3.95970	3.97307	3.62090	2.79699		
6, 0	2.35204	3.36427	3.90052	4.07123	3.90052	3.36427	2.35204		
etc.									
4, −4	8.72996	0.83717	2.25630	3.22634	3.83513	4.11843	4.08064	3.69148	2.83954
4, −2	0.58729	2.15939	3.21534	3.89658	4.25673	4.31473	4.06485	3.46963	2.41164
4, 0	1.69563	2.97893	3.78624	4.24217	4.39023	4.24217	3.78624	2.97893	1.69563
etc.									
2, −2	8.71224	0.85837	2.32448	3.35251	4.03488	4.41509			
2, 0	0.59872	2.20078	3.29332	4.02032	4.43945	4.57662	etc.		
2, +2	1.71266	3.01369	3.84300	4.32696	4.51201	4.41509			
0, 0	8.70662	0.86498	2.34570	3.39146	4.09582	4.50406	4.63796	etc.	
	D_{13}								
13, −13	9.19028								
13, −11	0.30422								
13, −9	1.08237								
13, −7	1.64664								
13, −5	2.04458								
13, −3	2.29986								
13, −1	2.42480								
etc.									
11, −11	8.90628	0.58752	1.34719						
11, −9	0.46258	1.62891	2.04805						
11, −7	1.42480	2.32789	2.52745						
11, −5	2.09380	2.80500	2.83134						
11, −3	2.55513	3.10604	2.98110						
11, −1	2.84640	3.25217	2.98589						
etc.									
9, −9	8.79983	0.74431	1.94159	2.58941	2.66404				
9, −7	0.54019	1.96616	2.81894	3.19915	3.04939				
9, −5	1.60714	2.76550	3.39389	3.57682	3.24776				
9, −3	2.33953	3.30061	3.74970	3.76550	3.27738				
9, −1	2.83685	3.63080	3.92083	3.78253	3.14268				
etc.									
7, −7	8.74085	0.82003	2.19569	3.09878	3.60223	3.70944	3.32923		
7, −5	0.58595	2.14225	3.16858	3.79867	4.07167	3.97476	3.40746		
7, −3	1.71628	2.99958	3.79546	4.22143	4.30734	4.03434	3.29759		
7, −1	2.48467	3.56385	4.17264	4.42252	4.33897	3.89965	2.99656		
etc.									
5, −5	8.70514	0.86350	2.33699	3.36502	4.03596	4.38621	4.42096	4.11097	3.34620
5, −3	0.61362	2.24371	3.36181	4.11000	4.54269	4.67986	4.51715	4.01884	3.06999
5, −1	1.77995	3.13020	4.01005	4.54516	4.78038	4.72924	4.38245	3.70007	2.56290
etc.									
3, −3	8.68420	0.88832	2.41659	3.51157	4.26649	4.72588			
3, −1	0.62868	2.29769	3.46278	4.26896	4.77524	5.00932	etc.		
3, +1	1.80957	3.18978	4.10624	4.68711	4.98130	5.00932			
3, +3	2.58773	3.74263	4.44699	4.82181	4.90995	4.72588			
1, −1	8.67445	0.89976	2.45302	3.57796	4.36947	4.87462	5.11767	etc.	
1, +1	0.63348	2.31472	3.49441	4.31832	4.84660	5.10871	5.11767		

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^{0}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{2}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{4}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{6}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{8}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{10}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{12}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{14}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{16}\frac{1}{2}J$
	D_{14}								
14, — 14	9.17448								
14, — 12	0.32061								
14, — 10	1.13353								
14, — 8	1.73559								
14, — 6	2.17492								
14, — 4	2.47595								
14, — 2	2.65204								
14, 0	2.71003								
etc.									
12, — 12	8.88925	0.60525	1.40113						
12, — 10	0.48031	1.68443	2.14307						
12, — 8	1.48031	2.42479	2.66783						
12, — 6	2.19071	2.94767	3.02230						
12, — 4	2.69779	3.29985	3.22928						
12, — 2	3.04022	3.50398	3.29986						
12, 0	3.23771	3.57093	3.23771						
etc.									
10, — 10	8.78134	0.76361	2.00040	2.68961	2.80772				
10, — 8	0.55949	2.02685	2.92311	3.34908	3.24761				
10, — 6	1.66784	2.87196	3.54864	3.78272	3.50803				
10, — 4	2.44598	3.43821	3.96167	4.03546	3.60949				
10, — 2	2.99446	3.84640	4.19838	4.12722	3.55992				
10, 0	3.35828	4.06508	4.27592	4.06508	3.35828				
etc.									
8, — 8	8.72065	0.84122	2.26035	3.20920	3.76095	3.91931	3.39346		
8, — 6	0.60714	2.20920	3.28383	3.96307	4.29243	4.25352	3.74836		
8, — 4	1.78323	3.11768	3.96792	4.45188	4.59994	4.39389	3.72968		
8, — 2	2.60277	3.73994	4.41088	4.72771	4.71671	4.35637	3.54063		
8, 0	3.17265	4.14269	4.63456	4.81729	4.63456	4.14269	3.17265		
etc.									
6, — 6	8.68286	0.88698	2.40877	3.48795	4.21325	4.62149	4.71840	4.47536	3.78313
6, — 4	0.63710	2.31834	3.49080	4.29698	4.79183	4.99595	4.90577	4.48664	3.62495
6, — 2	1.83438	3.26282	4.20483	4.80689	5.11463	5.14269	4.88305	4.29759	3.26956
6, 0	2.69333	3.89963	4.63457	5.08034	5.21883	5.08034	4.63457	3.89963	2.69333
etc.									
4, — 4	8.65938	0.91463	2.49728	3.65023	4.46732	4.99366			
4, — 2	0.65301	2.38201	3.60923	4.48238	5.06120	5.37446			
4, 0	1.89389	3.34105	4.33003	4.99010	5.37143	5.49639	etc.		
4, + 2	2.73899	3.97307	4.76439	5.23632	5.43360	5.37446			
4, + 4	3.30044	4.34620	4.93363	5.24132	5.23026	4.99366			
2, — 2	8.64641	0.92971	2.34313	3.73702	4.60108	5.18341	5.31361		
2, 0	0.66344	2.41163	3.66387	4.36696	5.18239	5.34141	5.65032	etc.	
2, + 2	1.90648	3.36387	4.36948	5.04726	5.43039	5.62336	5.31561		
0, 0	8.64223	0.93131	2.36034	3.76446	4.64312	5.24318	5.39738	5.71336	etc.
	D_{13}								
13, — 15	[illegible].13476								
13, — 13	[illegible].33383								
13, — 1[illegible]	[illegible]								
13, — [illegible]	1.81[illegible]								
13, — 7	2.24[illegible]								
13, — 5	2.53[illegible]								
13, — 3	2.53917								
13, — 1	2.[illegible]								
etc.									

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^0 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^6 \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{10} \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{12} \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{14} \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{16} \frac{1}{2}J$
	D_{15}								
13, − 13	8.87345	0.62164	1.45094						
13, − 11	0.49670	1.73558	2.23044						
13, − 9	1.53147	2.51374	2.79629						
13, − 7	2.27966	3.07801	3.19611						
13, − 5	2.82813	3.47595	3.45367						
13, − 3	3.21631	3.73122	3.58146						
13, − 1	3.46495	3.85616	3.58509						
etc.									
11, − 11	8.76431	0.78134	2.05434	2.78134	2.93895				
11, − 9	0.57722	2.08237	3.01813	3.48549	3.42750				
11, − 7	1.72335	2.96886	3.68902	3.96886	3.74246				
11, − 5	2.54289	3.60088	4.15263	4.27757	3.90597				
11, − 3	3.13712	4.04021	4.44676	4.43340	3.92825				
11, − 1	3.55210	4.31689	4.58989	4.44599	3.81174				
etc.									
9, − 9	8.70216	0.86052	2.31916	3.30940	3.90463	4.10875	3.83119		
9, − 7	0.62644	2.26989	3.38800	4.11500	4.49065	4.50288	4.05210		
9, − 5	1.84393	3.22414	4.12267	4.65778	4.86021	4.71215	4.11009		
9, − 3	2.70922	3.89754	4.62285	4.99767	5.04882	4.75562	4.01222		
9, − 1	3.33026	4.35829	4.93231	5.16199	5.07180	4.63912	3.75623		
etc.									
7, − 7	8.66266	0.90817	2.47343	3.59837	4.37197	4.83136	4.98263	4.79758	4.16749
7, − 5	0.65829	2.38529	3.60605	4.46338	5.01259	5.27470	5.24667	4.89449	4.10535
7, − 3	1.92153	3.38092	4.37729	5.03734	5.40725	5.50223	5.31514	4.80886	3.86799
7, − 1	2.81363	4.07574	4.89281	5.38573	5.59657	5.53745	5.19864	4.54063	3.44565
etc.									
5, − 5	8.63710	0.93813	2.56906	3.77318	4.64461	5.22894			
5, − 3	0.67849	2.45664	3.73824	4.66936	5.31034	5.69055			
5, − 1	1.96852	3.47367	4.52483	5.25183	5.70572	5.90984	etc.		
5, + 1	2.87162	4.17265	5.03671	5.58762	5.87205	5.90984			
5, + 3	3.50001	4.62495	5.31955	5.70413	5.82222	5.69055			
5, + 5	3.90370	4.86231	5.39058	5.60570	5.54770	5.22894			
3, − 3	8.62159	0.95604	2.62582	3.87570	4.80191	5.45319	5.85592		
3, − 1	0.68977	2.49595	3.81034	4.78038	5.46835	5.90655	6.11182	etc.	
3, + 1	1.99080	3.51714	4.59329	5.35025	5.84074	6.09062	6.11182		
3, + 3	2.89025	4.20351	5.08219	5.65083	5.95725	6.02307	5.85592		
1, − 1	8.61424	0.96449	2.65245	3.92352	4.87473	5.55597	5.99532	6.20821	etc.
1, + 1	0.69342	2.50856	3.83334	4.81561	5.51819	5.97412	6.20137	6.20821	
	D_{16}								
16, − 16	9.14597								
16, − 14	0.35009								
16, − 12	1.22515								
16, − 10	1.89416								
16, − 8	2.40604								
16, − 6	2.78626								
16, − 4	3.04950								
16, − 2	3.20440								
16, 0	3.25555								
etc.									

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\mathrm{tg}^{0}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{2}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{4}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{6}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{8}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{10}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{12}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{14}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{16}\frac{1}{2}J$
	D_{16}								
14, −14	8.85873	0.63688	1.49722						
14, −12	0.51194	1.78301	2.31129						
14, −10	1.57889	2.59592	2.91468						
14, − 8	2.36184	3.19798	3.35559						
14, − 6	2.94810	3.63731	3.65851						
14, − 4	3.37768	3.93835	3.83689						
14, − 2	3.67208	4.11444	3.89773						
14, 0	3.84337	4.17243	3.84337						
etc.									
12, −12	8.74851	0.79773	2.10415	2.86591	3.05974				
12, −10	0.59361	2.13352	3.10550	3.61065	3.59217				
12, − 8	1.77451	3.05781	3.81748	4.13871	3.95578				
12, − 6	2.63184	3.73122	4.32644	4.49714	4.17383				
12, − 4	3.26746	4.21631	4.67115	4.70894	4.25815				
12, − 2	3.72819	4.54414	4.87149	4.78558	4.21348				
12, 0	4.03898	4.73222	4.93727	4.73122	4.03898				
etc.									
10, −10	8.68513	0.87825	2.37310	3.40113	4.03586	4.28137	4.04729		
10, − 8	0.64417	2.32541	3.48302	4.25141	4.67054	4.72854	4.32604		
10, − 6	1.89944	3.32104	4.26305	4.84392	5.09464	4.99773	4.45004		
10, − 4	2.80613	4.04021	4.81383	5.23979	5.34530	5.11009	4.42885		
10, − 2	3.47292	4.55210	5.18049	5.46816	5.44013	5.07438	4.26404		
10, 0	3.95005	4.89093	5.38577	5.54290	5.38577	4.89092	3.95005		
etc.									
8, −8	8.64417	0.92747	2.53224	3.69857	4.51565	5.02080	5.22036	5.08646	4.51074
8, −6	0.67759	2.44598	3.71022	4.61331	5.21081	5.52407	5.55041	5.25622	4.52922
8, −4	1.98223	3.48738	4.53204	5.24324	5.66752	5.82049	5.69555	5.25622	4.38789
8, −2	2.92008	4.23334	5.10478	5.65569	5.92868	5.93651	5.67023	5.09140	4.08359
8, 0	3.60326	4.75623	5.47639	5.88216	6.01381	5.88215	5.47639	4.75623	3.60326
etc.									
6, −6	8.61690	0.95932	2.63372	3.88360	4.80333	5.43881			
6, −4	0.69968	2.52359	3.85349	4.83576	5.53110	5.96930			
6, −2	2.03547	3.59177	4.69729	5.48228	5.99832	6.26939			
6, 0	2.98972	4.34874	5.27495	5.89281	6.24979	6.36676	etc.		
6, +2	3.67610	4.86799	5.63514	6.09890	6.30414	6.26939			
6, +4	4.14674	5.18453	5.79995	6.11198	6.16312	5.96930			
6, +6	4.42756	5.31362	5.77494	5.92791	5.81193	5.43881			
4, −4	8.59931	0.97952	2.69760	3.99863	4.97920	5.68847	6.15336		
4, −2	0.71325	2.57058	3.93933	4.96736	5.71749	6.22264	6.50044		
4, 0	2.06543	3.64976	4.78807	5.61198	6.17501	6.50407	6.61242	etc.	
4, +2	3.02288	4.40309	5.35431	6.00213	6.39570	6.55843	6.50044		
4, +4	3.69958	4.90370	5.68545	6.16694	6.39418	6.38745	6.15336		
2, −2	8.58940	0.99080	2.73314	4.06220	5.07556	5.82375	6.33563	6.62770	
2, 0	0.71975	2.59288	3.97981	5.02903	5.80415	6.33926	6.65367	6.75742	etc.
2, +2	2.07512	3.66941	4.81711	5.65325	6.23090	6.57769	6.70803	6.62770	
0, 0	8.58620	0.99444	2.74456	4.08258	5.10634	5.86676	6.39326	6.70306	6.80536

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^{0}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{2}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{4}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{6}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{8}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{10}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{12}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{14}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{16}\frac{1}{2}J$
	D_{17}								
17, — 17	9.13301								
17, — 15	0.36346								
17, — 13	1.26655								
17, — 11	1.96552								
17, — 9	2.50958								
17, — 7	2.92456								
17, — 5	3.22559								
17, — 3	3.42188								
17, — 1	3.51879								
etc.									
15, — 15	8.84494	0.65112	1.54042						
15, — 13	0.52618	1.82721	2.38652						
15, — 11	1.62309	2.67231	3.02449						
15, — 9	2.43823	3.30913	3.50295						
15, — 7	3.05925	3.78625	3.84696						
15, — 5	3.52662	4.12868	4.07069						
15, — 3	3.86241	4.35053	4.18212						
15, — 1	4.07946	4.45967	4.18497						
etc.									
13, — 13	8.73379	0.81297	2.15043	2.94438	3.17162				
13, — 11	0.60885	2.18095	3.18634	3.72625	3.74398				
13, — 9	1.82193	3.13999	3.93587	4.29489	4.15147				
13, — 7	2.71402	3.85119	4.48592	4.69801	4.41818				
13, — 5	3.38743	4.37767	4.87599	4.95954	4.55705				
13, — 3	3.88956	4.75126	5.12692	5.09216	4.57442				
13, — 1	4.24611	4.98950	5.24991	5.10185	4.47176				
etc.									
11, — 11	8.66933	0.89464	2.42291	3.48570	4.15665	4.43995	4.24538		
11, — 9	0.66056	2.37656	3.57039	4.37657	4.83521	4.93459	4.57557		
11, — 7	1.95060	3.40999	4.39151	5.01377	5.30796	5.25681	4.75741		
11, — 5	2.89508	4.17055	4.98762	5.45935	5.61316	5.42910	4.80222		
11, — 3	3.60326	4.72820	5.40488	5.74370	5.77003	5.46227	4.71408		
11, — 1	4.12614	5.11817	5.66737	5.88249	5.78751	5.35961	4.49128		
etc.									
9, — 9	8.62714	0.94520	2.58618	3.79030	4.64688	5.19342	4.43645	4.34831	4.82089
9, — 7	0.69532	2.50150	3.80524	4.74972	5.39070	5.74972	5.82435	5.58131	4.90868
9, — 5	2.03774	3.58428	4.67242	5.42938	5.90195	6.10607	6.03550	5.65416	4.84798
9, — 3	3.01699	4.37601	5.29574	5.89780	6.22516	6.29098	6.08686	5.57498	4.63971
9, — 1	3.74592	4.95004	5.72457	6.18833	6.38214	6.31742	5.98420	5.34322	4.27741
etc.									
7, — 7	8.59841	0.97862	2.69253	3.98380	4.94700	5.62824			
7, — 5	0.71898	2.58428	3.95766	4.98569	5.72932	6.21867			
7, — 3	2.09617	3.69823	4.85204	5.68818	6.25859	6.58765			
7, — 1	3.09617	4.50634	5.48692	6.16277	6.58190	6.76582	etc.		
7, + 1	3.83371	5.08359	5.91289	6.44360	6.72138	6.76582			
7, + 3	4.36234	5.46708	6.15504	6.54625	6.68455	6.58765			
7, + 5	4.71010	5.67534	6.22382	6.47370	6.46686	6.21867			
7, + 7	4.89095	5.71486	6.11819	6.21681	6.04966	5.62824			
5, — 5	8.57911	1.00071	2.76226	4.10905	5.13792	5.89834	6.41759		
5, — 3	0.73444	2.63753	4.05458	5.13376	5.93825	6.50139	6.84134		
5, — 1	2.13238	3.76786	4.96053	5.84243	6.46761	6.86362	7.04451	etc.	
5, + 1	3.14098	4.57918	5.59255	6.30732	6.77344	7.01535	7.04451		
5, + 3	3.87567	5.14674	6.00104	6.56171	6.87610	6.96628	6.84134		
5, + 5	4.38977	5.50674	6.20931	6.61825	6.77855	6.70967	6.41759		

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^{0}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{2}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{4}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{6}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{8}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{10}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{12}\frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{14}\frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{16}\frac{1}{2}J$
	D_{17}								
3, −3	8.56714	1.01428	2.80492	4.18513	5.25285	6.05903	6.63307	6.99209	etc.
3, −1	0.74323	2.66751	4.10880	5.21601	6.05329	6.65535	7.04229	7.22522	
3, +1	2.14977	3.80105	5.01189	5.91498	6.56517	6.99115	7.20863	7.22522	
3, +3	3.15552	4.60268	5.62644	6.35344	6.83416	7.09380	7.14496	6.99209	
1, −1	8.56138	1.02077	2.82525	4.22126	5.30717	6.13454	6.73357	7.12255	7.31202
1, +1	0.74607	2.67719	4.12628	5.24245	6.09011	6.70440	7.10597	7.30663	7.31202
	D_{18}								
18, −18	9.1208								
18, −16	0.3761								
18, −14	1.3055								
18, −12	2.0325								
18, −10	2.6065								
18, −8	3.0537								
18, −6	3.3894								
18, −4	3.6235								
18, −2	3.7618								
18, 0	3.8076								
etc.									
16, −16	8.8320	0.6645	1.5809						
16, −14	0.5396	1.8686	2.4569						
16, −12	1.6645	2.7437	3.1269						
16, −10	2.5096	3.4127	3.6399						
16, −8	3.1628	3.9246	4.0215						
16, −6	3.6649	4.3048	4.2863						
16, −4	4.0385	4.5680	4.4431						
16, −2	4.2969	4.7229	4.4965						
16, 0	4.4482	4.7741	4.4482						
etc.									
14, −14	8.7200	0.8272	2.1936	3.0175	3.2758				
14, −12	0.6231	2.2252	3.2616	3.8337	3.8848				
14, −10	1.8661	3.2164	4.0457	4.4395	4.3323				
14, −8	2.7904	3.9624	4.6333	4.8832	4.6428				
14, −6	3.4986	4.5266	5.0644	5.1894	4.8304				
14, −4	4.0385	4.9416	5.3607	5.3717	4.9023				
14, −2	4.4364	5.2256	5.5343	5.4374	4.8617				
14, 0	4.7079	5.3891	5.5915	5.3891	4.7079				
etc.									
12, −12	8.6546	0.9099	2.4692	3.5642	4.2685	4.5866	4.4282		
12, −10	0.6758	2.4240	3.6512	4.4922	4.9870	5.1242	4.8047		
12, −8	1.9980	3.4922	4.5099	5.1700	5.5037	5.4939	5.0380		
12, −6	2.9773	4.2905	5.1471	5.6602	5.8575	5.7192	5.1406		
12, −4	3.7232	4.8896	5.6097	5.9943	6.0689	5.8123	5.1185		
12, −2	4.2875	5.3253	5.9228	6.1891	6.1485	5.7785	4.9724		
12, 0	4.6984	5.6179	6.1002	6.2531	6.1002	5.6179	4.6984		
etc.									
10, −10	8.6113	0.9616	2.6360	3.8749	4.7677	5.3520	5.6346	5.5878	5.1038
10, −8	0.7117	2.5527	3.8926	4.8749	5.5554	5.9558	6.0739	5.8766	5.2523
10, −6	2.0889	3.6732	4.8009	5.5992	6.1153	6.3652	6.3429	6.0127	5.2609
10, −4	3.1059	4.5064	5.4696	6.1174	6.4930	6.6100	6.4602	6.0063	5.1332
10, −2	3.8763	5.1261	5.9490	6.4639	6.7120	6.7053	6.4342	5.8602	4.8670
10, 0	4.4535	5.5705	6.2658	6.6570	6.7839	6.6570	6.2658	5.5705	4.4535
etc.									

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\mathrm{tg}^0\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^2\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^4\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^6\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^8\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{10}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{12}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{14}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{16}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{18}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{20}\frac{1}{2}J$
	D_{18}										
8, −8	8.5814	0.9964	2.7465	4.0755	5.0782	5.8009	5.2658	5.4787	6.4283	6.0762	5.3066
8, −6	0.7367	2.6398	4.0527	5.1221	5.9092	6.4443	6.7408	6.7988	6.6033	6.1128	5.2097
8, −4	2.1517	3.7951	4.9924	5.8743	6.4930	6.8732	7.0245	6.9442	6.6151	5.9941	4.9619
8, −2	3.1931	4.6490	5.6779	6.4049	6.8784	7.1203	7.1380	6.9272	6.4690	5.7189	4.5562
8, 0	3.9764	5.2774	6.1611	6.7498	7.0897	7.2011	7.0897	6.7498	6.1611	5.2774	3.9764
etc.											
6, −6	8.5606	1.0200	2.8211	4.2093	5.2816	6.0878	6.6553				
6, −4	0.7537	2.6982	4.1588	5.2837	6.1365	6.7508	7.1451				
6, −2	2.1931	3.8743	5.1153	6.0483	6.7279	7.1819	7.4249				
6, 0	3.2474	4.7368	5.8045	6.5773	7.1056	7.4144	7.5161	etc.			
6, +2	4.0333	5.3623	6.2788	6.9064	7.2933	7.4627	7.4249				
6, +4	4.6054	5.7893	6.5644	7.0525	7.3000	7.3280	7.1451				
6, +6	4.9927	6.0371	6.6727	7.0195	7.1218	6.9986	6.6553				
4, −4	8.5469	1.0355	2.8696	4.2956	5.4116	6.2689	6.8973	7.3143			
4, −2	0.7644	2.7345	4.2241	5.3824	6.2741	6.9341	7.3832	7.6331			
4, 0	2.2167	3.9191	5.1844	6.1454	6.8578	7.3507	7.6407	7.7365	etc.		
4, +2	3.2736	4.7788	5.8647	6.6586	7.2119	7.5507	7.6890	7.6331			
4, +4	4.0518	5.3898	6.3166	6.9565	7.3580	7.5451	7.5293	7.3143			
2, −2	8.5391	1.0443	2.8970	4.3442	5.4845	6.3698	7.0310	7.4869	7.7490		
2, 0	0.7696	2.7518	4.2553	5.4294	6.3393	7.0205	7.4946	7.7744	7.8670	etc.	
2, +2	2.2244	3.9337	5.2067	6.1767	6.8994	7.4046	7.7092	7.8227	7.7490		
0, 0	8.5366	1.0471	2.9059	4.3599	5.5080	6.4023	7.0739	7.5421	7.8187	7.9102	etc.
	D_{19}										
19, −19	9.1092										
19, −17	0.3879										
19, −15	1.3422										
19, −13	2.0955										
19, −11	2.6976										
19, −9	3.1747										
19, −7	3.5427										
19, −5	3.8115										
19, −3	3.9876										
19, −1	4.0748										
etc.											
17, −17	8.8197	0.6771	1.6191								
17, −15	0.5521	1.9075	2.5229								
17, −13	1.7034	2.8106	3.2228								
17, −11	2.5765	3.5096	3.7679								
17, −9	3.2597	4.0537	4.1840								
17, −7	3.7940	4.4686	4.4864								
17, −5	4.2024	4.7697	4.6842								
17, −3	4.4986	4.9660	4.7830								
17, −1	4.6913	5.0629	4.7853								
etc.											
15, −15	8.7070	0.8406	2.2342	3.0861	3.3733						
15, −13	0.6365	2.2666	3.3319	3.9340	4.0162						
15, −11	1.9075	3.2877	4.1481	4.5741	4.5003						
15, −9	2.8618	4.0659	4.7702	5.0549	4.8508						
15, −7	3.6021	4.6649	5.2390	5.4017	5.0822						
15, −5	4.1768	5.1177	5.5763	5.6287	5.2027						
15, −3	4.6125	5.4431	5.7953	5.7441	5.2167						
15, −1	4.9253	5.6523	5.9031	5.7518	5.1249						
etc.											

Tafel V. (Fortsetzung.)

u'	h^0	$-h^2$	h^4	$-h^6$	h^8	$-h^{10}$	h^{12}	$-h^{14}$	h^{16}	$-h^{18}$
13	9.19028									
11	8.90628	0.30422								
9	8.79983	0.46258	1.08237							
7	8.74085	0.54019	1.42480	1.64664						
5	8.70514	0.58595	1.60714	2.09380	2.04458					
3	8.68420	0.61362	1.71628	2.33953	2.55513	2.29986				
1	8.67445	0.62868	1.77995	2.48467	2.83685	2.84640	2.42480			
14	9.17448									
12	8.88925	0.32061								
10	8.78134	0.48031	1.13353							
8	8.72065	0.55949	1.48031	1.73559						
6	8.68286	0.60714	1.66784	2.19071	2.17492					
4	8.65938	0.63710	1.78323	2.44598	2.69779	2.47595				
2	8.64641	0.65501	1.85458	2.60277	2.99446	3.04022	2.65202			
0	8.64225	0.66344	1.89398	2.69553	3.17265	3.35828	3.23771	2.71003		
15	9.15976									
13	8.87345	0.33585								
11	8.76431	0.49670	1.18095							
9	8.70216	0.57722	1.53147	1.81777						
7	8.66266	0.62644	1.72335	2.27966	2.29490					
5	8.63710	0.65829	1.84393	2.54289	2.82813	2.63732				
3	8.62159	0.67849	1.92153	2.70922	3.13712	3.21631	2.85917			
1	8.61424	0.68977	1.96852	2.81363	3.33026	3.55210	3.46495	2.96831		
16	9.14597									
14	8.85873	0.35009								
12	8.74851	0.51194	1.22515							
10	8.68513	0.59361	1.57889	1.89416						
8	8.64417	0.64417	1.77451	2.36184	2.40604					
6	8.61690	0.67759	1.89944	2.63184	2.94810	2.78626				
4	8.59931	0.69968	1.98223	2.80613	3.26746	3.37768	3.04950			
2	8.58940	0.71325	2.03547	2.92008	3.47292	3.72819	3.67208	3.20440		
0	8.58620	0.71975	2.06543	2.98972	3.60326	3.95005	4.03898	3.84337	3.25555	
17	9.13301									
15	8.84494	0.36346								
13	8.73379	0.52618	1.26655							
11	8.66933	0.60885	1.62309	1.96552						
9	8.62714	0.66056	1.82193	2.43823	2.50958					
7	8.59841	0.69532	1.95060	2.71402	3.05925	2.92456				
5	8.57911	0.71898	2.03774	2.89508	3.38743	3.52662	3.22559			
3	8.56714	0.73444	2.09617	3.01699	3.60326	3.88956	3.86241	3.42188		
1	8.56138	0.74323	2.13238	3.09617	3.74592	4.12614	4.24611	4.07946	3.51879	
18	9.12077									
16	8.83198	0.37605								
14	8.72000	0.53955	1.30546							
12	8.65461	0.62309	1.66449	2.03246						
10	8.61134	0.67580	1.86613	2.50959	2.60649					
8	8.58138	0.71171	1.99802	2.79041	3.16279	3.05365				
6	8.56062	0.73671	2.08890	2.97726	3.49858	3.66492	3.38944			
4	8.54692	0.75374	2.15168	3.10594	3.72323	4.03850	4.03850	3.62353		
2	8.53910	0.76442	2.19308	3.19308	3.87626	4.28751	4.43644	4.29694	3.76183	
0	8.53656	0.76955	2.21670	3.24743	3.97637	4.45350	4.69841	4.70785	4.44821	3.80759

Tafel V. (Fortsetzung.)

u'	h^0	$-h^2$	h^4	$-h^6$	h^8	$-h^{10}$	h^{12}	$-h^{14}$	h^{16}	$-h^{18}$	h^{20}
19	9.1092										
17	8.8197	0.3879									
15	8.7070	0.5521	1.3422								
13	8.6408	0.6365	1.7034	2.0955							
11	8.5966	0.6900	1.9075	2.5765	2.6976						
9	8.5656	0.7270	2.0422	2.8618	3.2597	3.1747					
7	8.5436	0.7531	2.1363	3.0537	3.6021	3.7940	3.5427				
5	8.5284	0.7715	2.2028	3.1881	3.8344	4.1768	4.2024	3.8115			
3	8.5189	0.7837	2.2486	3.2820	3.9962	4.4365	4.6125	4.4986	3.9876		
1	8.5143	0.7907	2.2774	3.3443	4.1067	4.6149	4.8887	4.9253	4.6913	4.0748	
20	9.0982										
18	8.8082	0.3992									
16	8.6948	0.5640	1.3769								
14	8.6279	0.6491	1.7401	2.1551							
12	8.5828	0.7034	1.9464	2.6396	2.7835						
10	8.5509	0.7412	2.0836	2.9287	3.3508	3.2886					
8	8.5278	0.7683	2.1805	3.1250	3.6990	3.9151	3.6866				
6	8.5114	0.7879	2.2503	3.2645	3.9379	4.3059	4.3556	3.9876			
4	8.5004	0.8014	2.2998	3.3642	4.1074	4.5748	4.7764	4.6866	4.1985		
2	8.4941	0.8100	2.3329	3.4333	4.2267	4.7638	5.0648	5.1270	4.9170	4.3234	
0	8.4920	0.8142	2.3520	3.4770	4.3063	4.8936	5.2644	5.4259	5.3679	5.0525	4.3648

Tafel VI.

	$\mathrm{tg}^0 \frac{1}{2}J$	$\mathrm{tg}^2 \frac{1}{2}J$	$\mathrm{tg}^4 \frac{1}{2}J$
	$n=0$		
0, 0	0		
	$n=1$		
1, −1	9.69897		
1, +1	9.69897		
0, 0	0.	0.	
	$n=2$		
2, −2	9.57403		
2, 0	9.87506		
2, +2	9.57403		
1, −1	0.17609	0.17609	
1, +1	0.17609	0.17609	
0, 0	0.35218	0.47712	0.35218
	$n=3$		
3, −3	9.49485		
3, −1	9.97197		
3, +1	9.97197		
3, +3	9.49485		

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\mathrm{tg}^{0}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{2}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{4}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{6}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{8}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{10}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{12}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{14}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{16}\frac{1}{2}J$	$-\mathrm{tg}^{18}\frac{1}{2}J$	$+\mathrm{tg}^{20}\frac{1}{2}J$
	D_{19}										
13, −13	8.6408	0.9241	2.5124	3.6373	4.3727	4.7230	4.5980				
13, −11	0.6900	2.4682	3.7265	4.5996	5.1279	5.2998	5.0165				
13, − 9	2.0422	3.5686	4.6197	5.3145	5.6844	5.7125	5.2961				
13, − 7	3.0537	4.4017	5.2945	5.8454	6.0822	5.9853	5.4502				
13, − 5	3.8344	5.0385	5.7982	6.2241	6.3422	6.1314	5.4859				
13, − 3	4.4365	5.5156	6.1566	6.4686	6.4763	6.1576	5.4057				
13, − 1	4.8887	5.8540	6.3845	6.5887	6.4901	6.0658	5.2085				
etc.											
11, −11	8.5966	0.9768	2.6823	3.9533	4.8796	5.4986	5.8174	5.8084	5.3640		
11, − 9	0.7270	2.6001	3.9735	4.9905	5.7072	6.1454	6.3030	6.1471	5.5662		
11, − 7	2.1363	3.7554	4.9193	5.7554	6.3110	6.6022	6.6234	6.3390	5.6355		
11, − 5	3.1881	4.6263	5.6290	6.3182	6.7374	6.9001	6.7986	6.3959	5.5771		
11, − 3	3.9962	5.2875	6.1538	6.7145	7.0109	7.0554	6.8387	6.3226	5.3915		
11, − 1	4.6149	5.7776	6.5212	6.9636	7.1448	7.0759	6.7469	6.1185	5.0741		
etc.											
9, −9	8.5656	1.0127	2.7963	4.1601	5.1990	5.9595	6.4639	6.7181	6.7113	6.4049	5.6836
9, −7	0.7531	2.6910	4.1401	5.2473	6.0739	6.6504	6.9903	7.0941	6.9469	6.5075	5.6588
9, −5	2.2028	3.8841	5.1209	6.0442	6.7063	7.1323	7.3319	7.3027	7.0280	6.4650	5.4949
9, −3	3.2820	4.7794	5.8517	6.6245	7.1462	7.4393	7.5114	7.3585	6.9625	6.2793	5.1892
9, −1	4.1067	5.4535	6.3855	7.0253	7.4196	7.5890	7.5398	7.2668	6.7506	5.9461	4.7323
etc.											
7, −7	8.5436	1.0377	2.8750	4.3010	5.4128	6.2604	6.8714				
7, −5	0.7715	2.7537	4.2538	5.4201	6.3164	6.9764	7.4190				
7, −3	2.2486	3.9712	5.2557	6.2345	6.9623	7.4675	7.7649				
7, −1	3.3443	4.8795	5.9955	6.8194	7.4020	7.7689	7.9327	etc.			
7, +1	4.1759	5.5562	6.5270	7.2126	7.6617	7.8980	7.9327				
7, +3	4.7992	6.0411	6.8784	7.4334	7.7534	7.8606	7.7649				
7, +5	5.2445	6.3558	7.0640	7.4900	7.6794	7.6531	7.4190				
7, +7	5.5285	6.5107	7.0884	7.3808	7.4319	7.2604	6.8714				
5, −5	8.5284	1.0548	2.9284	4.3958	5.5553	6.4583	7.1350	7.6032			
5, −3	0.7837	2.7951	4.3282	5.5323	6.4723	7.1835	7.6869	7.9948			
5, −1	2.2774	4.0256	5.3391	6.3513	7.1180	7.6690	8.0211	8.1839	etc.		
5, +1	3.3801	4.9364	6.0767	6.9286	7.5440	7.9498	8.1606	8.1839			
5, +3	4.2094	5.6054	6.5944	7.3012	7.7753	8.0415	8.1129	7.9948			
5, +5	4.8210	6.0719	6.9195	7.4868	7.8214	7.9464	7.8726	7.6032			
3, −3	8.5189	1.0654	2.9617	4.4546	5.6432	6.5797	7.2952	7.8092	8.1333		
3, −1	0.7907	2.8188	4.3705	5.5958	6.5600	7.2992	7.8355	8.1823	8.3474	etc.	
3, +1	2.2913	4.0518	5.3791	6.4072	7.1920	7.7641	8.1413	8.3340	8.3474		
3, +3	3.3917	4.9549	6.1029	6.9638	7.5896	8.0076	8.2331	8.2741	8.1333		
1, −1	8.5143	1.0706	2.9777	4.4829	5.6853	6.6376	7.3713	7.9064	8.2556	8.4263	etc.
1, +1	0.7930	2.8265	4.3843	5.6164	6.5884	7.3366	7.8832	8.2422	8.4219	8.4263	
	D_{20}										
20, −20	9.0982										
20, −18	0.3992										
20, −16	1.3769										
20, −14	2.1551										
20, −12	2.7835										
20, −10	3.2886										
20, − 8	3.6866										
20, − 6	3.9876										
20, − 4	4.1985										
20, − 2	4.3234										
20, 0	4.3648										
etc.											

Tafel IV. (Fortsetzung.)

Exp.	$+\operatorname{tg}^0 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^4 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^6 \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^8 \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{10} \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{12} \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{14} \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{16} \frac{1}{2}J$	$-\operatorname{tg}^{18} \frac{1}{2}J$	$+\operatorname{tg}^{20} \frac{1}{2}J$
	D_{20}										
18, — 18	8.8082	0.6890	1.6551								
18, — 16	0.5640	1.9443	2.5852								
18, — 14	1.7401	2.8737	3.3130								
18, — 12	2.6396	3.6007	3.8879								
18, — 10	3.3508	4.1747	4.3361								
18, — 8	3.9151	4.6219	4.6730								
18, — 6	4.3556	4.9576	4.9084								
18, — 4	4.6866	5.1917	5.0483								
18, — 2	4.9170	5.3300	5.0960								
18, 0	5.0525	5.3758	5.0525								
etc.											
16, — 16	8.6948	0.8532	2.2723	3.1506	3.4650						
16, — 14	0.6491	2.3055	3.3980	4.0281	4.1392						
16, — 12	1.9464	3.3547	4.2440	4.6999	4.6572						
16, — 10	2.9287	4.1628	4.8982	5.2150	5.0443						
16, — 8	3.6990	4.7940	5.4015	5.5990	5.3157						
16, — 6	4.3059	5.2815	5.7764	5.8666	5.4801						
16, — 4	4.7764	5.6447	6.0364	6.0267	5.5427						
16, — 2	5.1270	5.8954	6.1896	6.0841	5.5055						
16, 0	5.3679	6.0406	6.2402	6.0406	5.3679						
etc.											
14, — 14	8.6279	0.9375	2.5529	3.7059	4.4702	4.8505	4.7566				
14, — 12	0.7034	2.5096	3.7968	4.6999	5.2592	5.4633	5.2135				
14, — 10	2.0836	3.6399	4.7221	5.4491	5.8524	5.9152	5.5350				
14, — 8	3.1250	4.5052	5.4314	6.0171	6.2901	6.2310	5.7354				
14, — 6	3.9379	5.1768	5.9727	6.4364	6.5941	6.4246	5.8225				
14, — 4	4.5748	5.6917	6.3722	6.7256	6.7768	6.5038	5.8003				
14, — 2	5.0648	6.0715	6.6455	6.8954	6.8451	6.4719	5.6690				
14, 0	5.4259	6.3290	6.8016	6.9514	6.8016	6.3290	5.4259				
etc.											
12, — 12	8.5828	0.9911	2.7255	4.0265	4.9838	5.6350	5.9872	6.0130	5.6048		
12, — 10	0.7412	2.6443	4.0487	5.0979	5.8480	6.3210	6.5148	6.3967	5.8554		
12, — 8	2.1805	3.8318	5.0291	5.9000	6.4917	6.8208	6.8815	6.6385	5.9784		
12, — 6	3.2645	4.7375	5.7764	6.5034	6.9620	7.1662	7.1082	6.7512	5.9807		
12, — 4	4.1074	5.4364	6.3423	6.9443	7.2843	7.3744	7.2060	6.7411	5.8644		
12, — 2	4.7638	5.9679	6.7550	7.2432	7.4727	7.4550	7.1803	6.6099	5.6276		
12, 0	5.2644	6.3546	7.0313	7.4115	7.5347	7.4115	7.0313	6.3546	5.2644		
etc.											
10, — 10	8.5509	1.0280	2.8426	4.2386	5.3109	6.1061	6.6467	6.9388	6.9714	6.7064	6.0286
10, — 8	0.7683	2.7384	4.2209	5.3629	6.2257	6.8400	7.2194	7.3646	7.2608	6.8673	6.0668
10, — 6	2.2503	3.9663	5.2393	6.2004	6.9020	7.3694	7.6124	7.6290	7.4026	6.8908	5.9751
10, — 4	3.3642	4.8993	6.0112	6.8253	7.3906	7.7294	7.8498	7.7481	7.4064	6.7813	5.7532
10, — 2	4.2267	5.6149	6.5903	7.2759	7.7185	7.9390	7.9442	7.7292	7.2752	6.5376	5.3963
10, 0	4.8936	6.1533	7.0060	7.5733	7.9007	8.0079	7.9007	7.5733	7.0060	6.1533	4.8936
etc.											
8, — 8	8.5278	1.0541	2.9248	4.3856	5.5336	6.4190	7.0695				
8, — 6	0.7879	2.8049	4.3411	5.5453	6.4810	7.1825	7.6686				
8, — 4	2.2998	4.0602	5.3841	6.4043	7.1756	7.7265	8.0722				
8, — 2	3.4333	5.0098	6.1693	7.0390	7.6699	8.0879	8.3061				
8, 0	4.3063	5.7323	6.7514	7.4881	7.9916	8.2859	8.3828	etc.			
8, + 2	4.9753	6.2683	7.1600	7.7730	8.1552	8.3293	8.3061				
8, + 4	5.4717	6.6411	7.4114	7.9043	8.1663	8.2192	8.0722				
8, + 6	5.8137	6.8629	7.5131	7.8847	8.0230	7.9484	7.6686				
8, + 8	6.0110	6.9389	7.4654	7.7095	7.7149	7.4999	7.0695				

Tafel VII. (Fortsetzung.)

	$\operatorname{tg}^{0}\frac{1}{2}J$	$\operatorname{tg}^{4}\frac{1}{2}J$	$\operatorname{tg}^{8}\frac{1}{2}J$	$\operatorname{tg}^{12}\frac{1}{2}J$
	$n=4$			
4, − 4	9.43686			
4, − 2	0.03892			
4, 0	0.21501			
	etc.			
2, − 2	0.03892	0.51604		
2, 0	0.51604	0.51604		
2, + 2	0.51604	0.03892		
0, 0	0.21501	0.81707	0.21501	
	$n=5$			
5, − 5	9.39110			
5, − 3	0.09007			
5, − 1	0.39110			
	etc.			
3, − 3	0.09007	0.69213		
3, − 1	0.69213	0.86822		
3, + 1	0.86822	0.69213		
3, + 3	0.69213	0.09007		
1, − 1	0.39110	1.16925	0.868[illegible]	
1, + 1	0.86822	1.16925	0.39110	
	$n=6$			
6, − 6	9.35331			
6, − 4	0.13146			
6, − 2	0.52940			
6, 0	0.65434			
	etc.			
4, − 4	0.13146	0.83043		
4, − 2	0.83043	1.13146		
4, 0	1.13146	1.13146		
4, + 2	1.13146	0.83043		
4, + 4	0.83043	0.13146		
2, − 2	0.52940	1.43249	1.30755	
2, 0	1.13146	1.60858	1.13146	
2, + 2	1.30755	1.43249	0.52940	
0, 0	0.65434	1.60858	1.60858	0.65434

ÜBER DIE BESTIMMUNG

DER

MASSEN UND DER TRÄGHEITSMOMENTE

SYMMETRISCHER ROTATIONSKÖRPER VON UNGLEICHFÖRMIGER DICHTIGKEIT.

VON

O. SCHLÖMILCH.



ÜBER DIE BESTIMMUNG DER MASSEN UND DER TRÄGHEITSMOMENTE SYMMETRISCHER ROTATIONSKÖRPER VON UNGLEICHFÖRMIGER DICHTIGKEIT.

Zur Bestimmung der Masse sowie des Trägheitsmomentes eines beliebig gestalteten Körpers bedarf es im Allgemeinen einer dreifachen Integration, welche sich nur in besonderen Fällen auf ein einfaches Integral zurückführen lässt; namentlich ist diese Reduktion dann möglich, wenn der Körper von einer Umdrehungsfläche begränzt wird und durchaus gleiche Dichtigkeit besitzt. So bekannt diess ist, so wenig scheint bemerkt worden zu sein, dass eine ähnliche Reduktion für den allgemeineren Fall gilt, wo die Dichtigkeit im Inneren des Körpers nicht an allen Stellen dieselbe ist, sondern sich vielmehr in einer Weise ändert, welche den Körper als bestehend aus einer stetigen Folge homogener concentrischer Kugelschaalen anzusehen erlaubt. Nicht ohne Interesse dürfte vielleicht das Endresultat dieser Rechnung erscheinen, wenn man es in die dynamische Formel kleidet, dass sich die Massen und Trägheitsmomente von Rotationskörpern der genannten Art auf die Massen resp. Trägheitsmomente von Kugeln und Kugelschaalen von endlicher Dicke zurückführen lassen.

I.

Bezeichnen wir mit x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines im Inneren eines Körpers liegenden Punktes und mit θ die an der Stelle xyz statt findende Dichtigkeit, so ist $\theta\, dx\, dy\, dz$ das Massenelement des Körpers, und mithin die ganze Masse desselben

$$1)\qquad M = \iiint \theta\, dx\, dy\, dz$$

wobei die Integrationen auf alle nicht ausserhalb des fraglichen Volumens befindlichen Elemente zu beziehen und demgemäss die Integrationsgränzen zu bestimmen sind. Nennen wir ferner p den Abstand des

Punktes xyz von einer festen Geraden (der Momentenachse), so würde $p^2 \theta\, dx\, dy\, dz$ das Trägheitsmoment des Massenelementes $\theta\, dx\, dy\, dz$ sein und es ist mithin das Trägheitsmoment des ganzen Körpers:

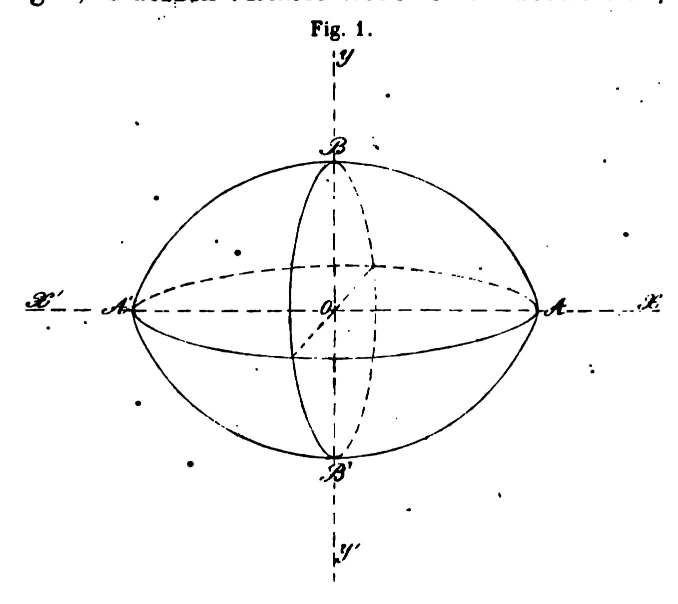
$$2)\qquad T = \iiint p^2\, \theta\, dx\, dy\, dz$$

vorausgesetzt, dass die Integrationen zwischen denselben Gränzen wie vorhin ausgeführt werden. Die obigen allgemeinen Formeln spezialisiren wir nun in so fern, als wir über das Gesetz, nach welchem sich die Dichtigkeit von Punkt zu Punkt ändert, und über die Begränzungsfläche des Körpers nachstehende Voraussetzungen machen.

Für alle vom Anfangspunkte der Coordinaten gleichweit entfernte Punkte möge die Dichtigkeit dieselbe sein und nur von dem Radiusvector eines solchen Punktes abhängen. Bezeichnen wir ihn mit $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = r$, so können wir jetzt θ durch $\theta(r)$ ersetzen, wenn wir in dem letzteren Symbole θ als Funktionszeichen gelten lassen. Zugleich ist klar, dass man sich vermöge dieser Substitution den Körper aus einer stetigen Folge unendlich dünner concentrischer Kugelschaalen zusammengesetzt denkt, wobei jede Schaale für sich homogen ist und nur von einer Schicht zur anderen eine Variation der Dichtigkeit eintritt.

Was ferner die Begränzungsfläche des zu betrachtenden Körpers anlangt, so möge sie auf folgende Weise entstanden sein. Von einer beliebigen ebenen Curve, welche die positiven Seiten der rechtwinkligen Coordinatenachsen schneidet, sei AB (Fig. 1) der zwischen jene Achsen fallende Bogen, in dessen Verlaufe weder eine Discontinuität, noch eine

Fig. 1.



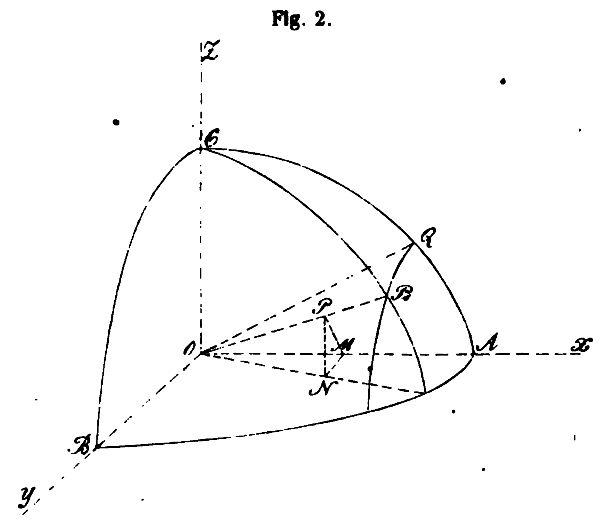
Verschlingung statt finden möge; man denke sich ferner die ebene Fläche AOB um OY herumgedreht, bis sie in die entgegengesetzte Lage $A'OB$ gelangt, und lasse endlich die Fläche $ABA'A$ um XX' rotiren; es entsteht auf diese Weise ein Körper, der symmetrisch um den Mittelpunkt O herum liegt und von einer Rotationsfläche begränzt wird. Er möge desshalb ein symmetrischer Rotationskörper mit der Hauptachse AA' und der Nebenachse BB' heissen.

Nach den obigen Voraussetzungen bemerkt man sogleich, dass die Ausführung der in den Formeln 1) und 2) postulirten Integrationen leichter bei polaren als bei rechtwinkligen Coordinaten sein muss und wir setzen daher

3) $$x = r \cos \tau,\ y = r \sin \tau \cos \omega,\ z = r \sin \tau \sin \omega,$$

wo τ den Winkel POX zwischen Radiusvector und x-Achse bezeichnet und ω der Neigungswinkel NMP zwischen den Ebenen POX und XOY ist (Fig. 2). An die Stelle des früheren Volumenelementes $dx\, dy\, dz$ tritt

Fig. 2.



nunmehr $r^2 \sin \tau\, dr\, d\tau\, d\omega$ und so wird

4) $$M = \iiint r^2\, \theta(r) \sin \tau\, d\omega\, d\tau\, dr,$$

5) $$T = \iiint p^2 r^2\, \theta(r) \sin \tau\, d\omega\, d\tau\, dr.$$

Die Integrationsgränzen für r bestimmen sich dadurch, dass man den Radiusvector $OP = r$ verlängert, bis er die Oberfläche des Körpers in einem Punkte P_1 schneidet (Fig. 2); für $OP_1 = r_1$ sind nämlich $r = 0$ und $r = r_1$ die Gränzen von r. Dabei ist vermöge der Entstehung der

Oberfläche OP_1 gleich dem Radiusvector OQ der erzeugenden Curve, wenn letzterer zu dem Winkel $QOX = \angle P_1OX = \angle POX = \tau$ gehört; denken wir uns daher die Polargleichung der erzeugenden ebenen Curve auf die Form

6) $$r_1 = \varphi(\cos\tau)$$

gebracht, so sind $r = 0$ und $r = \varphi(\cos\tau)$ die Gränzen für r. Da sich ferner leicht genug übersieht, dass τ von 0 bis π und ω von 0 bis 2π auszudehnen ist, so sind die zu entwickelnden Integrale:

7) $$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^2\,\theta(r)\,\sin\tau\,d\omega\,d\tau\,dr,$$

8) $$T = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} p^2 r^2\,\theta(r)\,\sin\tau\,d\omega\,d\tau\,dr.$$

Das erste dieser Integrale wird dadurch etwas einfacher, dass sich die auf ω bezügliche Integration sogleich ausführen lässt, nämlich:

$$M = 2\pi\int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^2\,\theta(r)\,\sin\tau\,d\tau\,dr$$

Denken wir uns das auf τ bezügliche Integral in der Form

$$\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^2\,\theta(r)\,dr\right\}\sin\tau\,d\tau$$

dargestellt und in zwei andere Integrale von $\tau = 0$ bis $\tau = \frac{1}{2}\pi$ und von $\tau = \frac{1}{2}\pi$ bis $\tau = \pi$ zerlegt, so sind diese beiden Theile von gleicher Grösse und gleichem Vorzeichen, weil sowohl $\sin\tau$ als $\varphi(\cos\tau) = r_1$ im zweiten Quadranten dieselben positiven Werthe wieder erhält, die schon im ersten Quadranten durchlaufen wurden; man hat daher

$$M = 4\pi\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^2\,\theta(r)\,\sin\tau\,d\tau\,dr$$

und durch Einführung einer neuen Variabelen $t = \cos\tau$

$$M = 4\pi\int_0^{1}\int_0^{\varphi(t)} r^2\,\theta(r)\,dt\,dr$$

Das noch übrige Doppelintegral bildet einen speziellen Fall des folgenden:

$$9) \qquad S_m = \int_0^1 \int_0^{\varphi(t)} f(r)\, t^{m-1}\, dt\, dr$$

wenn man in diesem $m = 1$, $f(r) = r^2 \theta(r)$ nimmt; es ist folglich

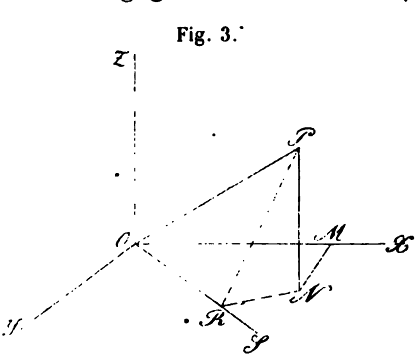
$$10) \qquad M = 4\pi S_1\,, \qquad f(r) = r^2 \theta(r).$$

Eine ähnliche Reduktion gestattet das in No. 8) verzeichnete Integral, sobald man eine bestimmte Momentenachse festgestellt hat. Es ist nun bekannt, dass sich das Trägheitsmoment eines Körpers in Beziehung auf eine beliebige Momentenachse sehr leicht findet, wenn man das Trägheitsmoment kennt, welches einer durch den Schwerpunkt des Körpers parallel zu jener gelegten Momentenachse entspricht; bezeichnen wir nämlich mit ε die Entfernung des Schwerpunktes von jener ersten Achse und mit T_ε das betreffende Trägheitsmoment, endlich mit T_0 das Trägheitsmoment in Beziehung auf die Parallelachse durch den Schwerpunkt, so ist

$$11) \qquad T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon^2 M$$

und es bedarf also nur der Bestimmung von T_0. In unserem Falle ist der Mittelpunkt des symmetrischen Rotationskörpers zugleich der Schwerpunkt; durch diesen legen wir die Momentenachse OS unter einem Winkel $SOX = \alpha$ gegen die Achse der x (Fig. 3) und lassen die Coordinatenebene xy mit der Ebene des Winkels α zusammenfallen, was die Allgemeinheit nicht beeinträchtigt, weil alle die xAchse in sich enthaltenden Schnitte des Körpers congruent sind. Ziehen wir von dem willkührlichen Punkte P, dessen rechtwinklige Coordinaten $OM = x$, $MN = y$, $NP = z$ sein mögen, die Senkrechte PR auf die Momentenachse OS und nachher die Gerade NR, so ist

Fig. 3.



$$\overline{PR}^2 = \overline{NR}^2 + \overline{NP}^2$$

oder aus sehr naheliegenden Gründen

$$p^2 = (x \sin\alpha - y \cos\alpha)^2 + z^2$$

und in Polarcoordinaten

$$p^2 = r^2 \sin^2\alpha \cos^2\tau - 2r^2 \sin\alpha \cos\alpha \sin\tau \cos\tau \cos\omega$$
$$+ r^2 \cos^2\alpha \sin^2\tau \cos^2\omega + r^2 \sin^2\tau \sin^2\omega.$$

Durch Substitution dieses Ausdruckes gestaltet sich die Formel 8) zur folgenden:

$$
\begin{aligned}
T_0 = {} & \sin^2\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \cos^2\tau \sin\tau \, d\omega \, d\tau \, dr \\
& + \cos^2\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \sin^3\tau \cos^2\omega \, d\omega \, dt \, dr \\
& + \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \sin^3\tau \sin^2\omega \, d\omega \, d\tau \, dr \\
& - 2 \sin\alpha \cos\alpha \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \sin^2\tau \cos\tau \cos\omega \, d\omega \, d\tau \, dr.
\end{aligned}
$$

Die auf ω bezügliche Integration lässt sich hier leicht ausführen, indem man der Reihe nach von den folgenden Formeln Gebrauch macht:

$$\int_0^{2\pi} d\omega = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2\omega \, d\omega = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\omega \, d\omega = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin^2\omega \, d\omega = 4\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\omega \, d\omega = \pi,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos\omega \, d\omega = 0.$$

Aus der vorigen Gleichung verschwindet demnach das letzte dreifache Integral, das zweite und dritte Integral werden gleich, und so bleibt

$$
\begin{aligned}
T_0 = {} & 2\pi \sin^2\alpha \int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \cos^2\tau \sin\tau \, d\tau \, dr \\
& + \pi(\cos^2\alpha + 1) \int_0^{\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \sin^3\tau \, d\tau \, dr
\end{aligned}
$$

Zerlegen wir noch das auf τ bezügliche Intervall 0 bis π wie vorhin in 0 bis $\frac{1}{2}\pi$ und $\frac{1}{2}\pi$ bis π, und bemerken, dass die Ausdrücke φ (cos τ), cos $^2\tau$ sin τ und sin $^3\tau$ im zweiten Quadranten dieselben Werthe wie im ersten Quadranten besitzen, so ist auch

$$T_0 = 4\pi \sin^2\alpha \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \cos^2\tau \sin\tau \, d\tau \, dr$$

$$+ 2\pi\,(1+\cos^2\alpha) \int_0^{\frac{1}{2}\pi}\int_0^{\varphi(\cos\tau)} r^4\,\theta(r) \sin^3\tau \, d\tau \, dr$$

und mittelst der Substitution $\cos\tau = t$

$$T_0 = 4\pi \sin^2\alpha \int_0^1\int_0^{\varphi(t)} r^4\,\theta(r)\, t^2 \, dt \, dr$$

$$+ 2\pi\,(1+\cos^2\alpha) \int_0^1\int_0^{\varphi(t)} r^4\,\theta(r)\,(1-t^2) \, dt \, dr$$

Ein Blick auf das mit S_m bezeichnete Doppelintegral giebt zu erkennen, dass man die vorstehende Gleichung durch die folgende ersetzen kann:

$$12) \qquad T_0 = 4\pi \sin^2\alpha.\ S_1 + 2\pi\,(1+\cos^2\alpha)\,(S_1 - S_3)\,,$$
$$f(r) = r^4\,\theta(r)\,.$$

Die Bestimmungen der Masse und des Trägheitsmomentes symmetrischer Rotationskörper hängen demnach von einem und demselben Integrale S_m ab, mit dessen Reduktion wir uns demnächst beschäftigen müssen.

II.

Betrachten wir statt S_m das im Wesentlichen damit übereinstimmende Integral

$$13) \qquad R = \int_0^h\int_0^{\varphi(x)} x^{m-1} f(y)\, dx\, dy$$

und denken uns die auf y bezügliche Integration ausgeführt, indem wir

$$\int f(y)\, dy = F(y) + \text{Const.}, \text{ mithin } F'(y) = f(y)$$

setzen, so nimmt R folgende Form an:

$$R = \int_0^h x^{m-1}\, dx\, [F(\varphi(x)) - F(0)]$$

oder

14) $$R = \int_0^h F(\varphi(x))\, x^{m-1}\, dx - \frac{h^m}{m} F(0),$$

wobei m als positive von Null verschiedene, sonst aber beliebige Zahl vorausgesetzt ist. Auf das noch übrige Integral lässt sich mit Vortheil die partielle Integration anwenden und giebt

15) $$\int F(\varphi(x))\, x^{m-1}\, dx = F(\varphi(x))\, \frac{x^m}{m} - \frac{1}{m} \int x^m\, F'(\varphi(x))\, d\varphi(x)$$

wo statt $F'(\varphi(x))$ wieder $f(\varphi(x))$ gesetzt werden kann. Führt man die Integrationsgränzen $x = h$ und $x = 0$ in die Gleichung 15) ein und nimmt an, dass das Produkt $F(\varphi(x))\, x^m$ mit x gleichzeitig verschwinde, was im Allgemeinen auch der Fall ist, so wird

$$\int_0^h F(\varphi(x))\, x^{m-1}\, dx = \frac{h^m}{m} F(\varphi(h)) - \frac{1}{m} \int_0^h x^m\, f(\varphi(x))\, d\varphi(x)$$

und durch Substitution in die Gleichung 14)

$$R = \frac{h^m}{m} [F(\varphi(h)) - F(0)] - \frac{1}{m} \int_0^h x^m\, f(\varphi(x))\, d\varphi(x).$$

Der vom Integralzeichen freie Theil ist aber nichts Anderes als

$$\frac{h^m}{m} \int_0^{\varphi(h)} f(y)\, dy$$

und man hat daher vermöge der ersten und letzten Form von R die Reduktionsformel

16) $$\int_0^h \int_0^{\varphi(x)} x^{m-1} \cdot f(y)\, dx\, dy = \frac{h^m}{m} \int_0^{\varphi(h)} f(y)\, dy - \frac{1}{m} \int_0^h x^m\, f(\varphi(x))\, d\varphi(x)$$

deren Gültigkeit an die beiden Bedingungen

$$m > 0 \quad \text{und} \quad \text{Lim} \left[\delta^m \int_0^{\varphi(\delta)} f(y)\, dy \right] = 0$$

geknüpft ist, wenn δ eine in Null übergehende Grösse bezeichnet.

Will man in dem zweiten Integrale auf der rechten Seite von No. 15) x als unabhängige Variabele ansehen, so wird man $d\varphi(x)$ durch $\varphi'(x)\,dx$ ersetzen; es liegt aber nahe $\varphi(x)$ selbst als neue Variabele zu betrachten, also etwa $\varphi(x) = y$ zu nehmen und umgekehrt x durch y auszudrücken. Aus der Gleichung $\varphi(x) = y$ erhält man in diesem Falle eine Gleichung von der Form $x = \psi(y)$, den Werthen $x = 0$ und $x = h$ entsprechen die Gränzen $y = \varphi(0)$ und $y = \varphi(h)$, und man gelangt so zu der Formel

$$17)\quad \int_0^h \int_0^{\varphi(x)} x^{m-1} f(y)\, dx\, dy = \frac{h^m}{m}\int_0^{\varphi(h)} f(y)\, dy - \frac{1}{m}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(h)} \psi(y)^m f(y)\, dy,$$

wobei $\psi(y)^m$ zur Abkürzung für $[\psi(y)]^m$ gesetzt worden ist.

In der zuletzt vorgenommenen Transformation liegt jedoch eine stillschweigende Voraussetzung, die um so mehr hervorgehoben werden muss, als ihre Nichterfüllung eine Modification des Calcüls bedingt. Eine Gleichung von der Form $y = \varphi(x)$ kann nämlich, nach x aufgelöst, mehrere Wurzeln liefern und es entsteht daher die Frage, welche von jenen verschiedenen Umkehrungen an die Stelle von $\psi(y)$ in No. 17) zu setzen sei. Diese Frage lässt sich zunächst dahin beantworten, dass negative und complexe Wurzeln auszuschliessen sind, weil x rechter Hand in No. 16) auf das positive Intervall 0 bis h beschränkt war, mithin Dasselbe von seinem nachherigen Werthe $\psi(y)$ gelten muss. Wenn daher die Gleichung $y = \varphi(x)$ nur eine reelle und positive Umkehrung besitzt, so ist diese für $\psi(y)$ zu substituiren und die Formel 17) gilt dann schlechthin.

Ob nun aber eine oder mehrere reelle positive Umkehrungen der Gleichung $y = \varphi(x)$ existiren, hängt von dem Verlaufe der Funktion $\varphi(x)$ innerhalb des Intervalles $x = 0$ bis $x = h$ ab. Wenn sie auf dieser Strecke nur steigt oder nur fällt, so gehört zu jedem y ein einziges x, besitzt sie aber zwischen 0 und h verschiedene Maxima und Minima, so giebt es mehrere positive reelle Umkehrungen und zwar ist die Anzahl derselben im Allgemeinen um eine Einheit grösser als die gesammte Menge jener Maxima und Minima d. h. als die Anzahl der zwischen 0 und h fallenden Wurzeln der Gleichung $\varphi'(x) = 0$. Man wird die Richtigkeit dieser Angabe sogleich bestätigt finden, wenn man sich $y = \varphi(x)$ als Gleichung einer mit verschiedenen Maximis und Minimis ausgestatteten Curve denkt und nachher y als die willkührliche Coordinate an-

sieht. Besitzt nun, um vor der Hand beim einfachsten Falle zu verweilen, $\varphi(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = h$ ein Maximum oder Minimum, welches für $x = \xi$ eintreten möge, so existiren zwei positive Umkehrungen, die wir durch $x_1 = \psi_1(y)$ und $x_2 = \psi_2(y)$ unterscheiden. Die kleinere von ihnen, etwa x_1, ist kleiner als ξ, die grössere $x_2 > \xi$, und daraus geht hervor, dass man von der Gleichung $y = \varphi(x)$ die erste oder die zweite Umkehrung nehmen muss, je nachdem — wenn man diess nämlich im Voraus weiss — x kleiner oder grösser als ξ sein soll. Nach dieser Bemerkung erledigt sich die Transformation des in No. 16) vorkommenden Integrales

$$\int_0^h x^m f(\varphi(x))\, d\varphi(x)$$

sehr einfach dadurch, dass man es in die beiden folgenden Integrale zerlegt

$$\int_0^\xi x^m f(\varphi(x))\, d\varphi(x) \quad + \int_\xi^h x^m f(\varphi(x))\, d\varphi(x),$$

wo nun im ersten Integrale $x < \xi$ und im zweiten $x > \xi$ ist. Setzt man wiederum $\varphi(x) = y$, so hat man im ersten Falle die kleinere Umkehrung $x = \psi_1(y)$, im zweiten die grössere $x = \psi_2(y)$ zu nehmen und erhält so

$$\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\xi)} \psi_1(y)^m f(y)\, dy \quad + \int_{\varphi(\xi)}^{\varphi(h)} \psi_2(y)^m f(y)\, dy$$

An die Stelle der Reduktionsformel 17) tritt jetzt die folgende:

$$18) \qquad \int_0^h \int_0^{\varphi(x)} x^{m-1} f(y)\, dx\, dy$$

$$= \frac{h^m}{m} \int_0^{\varphi(h)} f(y)\, dy - \frac{1}{m} \left[\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\xi)} \psi_1(y)^m f(y)\, dy + \int_{\varphi(\xi)}^{\varphi(h)} \psi_2(y)^m f(y)\, dy \right]$$

Auf ähnliche Weise würde die Transformation in den Fällen geschehen, wo mehrere reelle positive Umkehrungen der Gleichung $y = \varphi(x)$ existiren. Setzen wir voraus, dass die Funktion $\varphi(x)$ an den Stellen $x = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots \xi_{n-1}$ Maxima oder Minima erhalte und dass $0 < \xi_1, < \xi_2 < \xi_3 \ldots < \xi_{n-1} < h$ sei, so würden n verschiedene Umkehrungen statt finden, nämlich

$$x = \psi_1(y)\,, \quad x = \psi_2(y)\,, \ldots \quad x = \psi_n(y)\,,$$

für $\qquad 0 < x < \xi_1\,, \quad \xi_1 < x < \xi_2\,, \ldots \ \xi_{n-1} < x < h\,;$

man zerlegt jetzt das rechter Hand in No. 16) auf x bezügliche Integral in n andere Integrale von 0 bis ξ_1, von ξ_1 bis ξ_2 u. s. w., substituirt die einzelnen Umkehrungen in die zugehörigen Integrale und erhält so

$$19)\qquad \int_0^h\int_0^{\varphi(x)} x^{m-1}\, f(y)\, dx\, dy = \frac{h^m}{m}\int_0^{\varphi(h)} f(y)\, dy$$

$$-\frac{1}{m}\left[\int_{\varphi(0)}^{\varphi(\xi_1)} \psi_1(y)^m\, f(y)\, dy + \int_{\varphi(\xi_1)}^{\varphi(\xi_2)} \psi_2(y)^m\, f(y)\, dy + \ldots + \int_{\varphi(\xi_{n-1})}^{\varphi(h)} \psi_n(y)^m\, f(y)\, dy\right]$$

Das Verfahren, dessen wir uns zur Reduktion des Doppelintegrales R bedient haben, ist übrigens noch mancher weiteren Anwendung auf Integrale von allgemeineren Formen fähig; geht man z. B. von der Gleichung

$$R = \int_0^h\int_0^{\varphi(x)} E'(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

aus, worin $E(x)$ eine beliebige Funktion von x und $E'(x)$ ihre Derivirte bezeichnet, so bleiben die vorigen Schlüsse fast wörtlich dieselben und führen zu der folgenden Reduktionsformel

$$\int_0^h\int_0^{\varphi(x)} E'(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

$$= E(h)\int_0^{\varphi(h)} f(y)\, dy - E(0)\int_0^{\varphi(0)} f(y)\, dy - \int_0^h E(x)\, f(\varphi(x))\, d\varphi(x)\,,$$

welche der Formel 16) entspricht. Unter der Voraussetzung, dass die Gleichung $y = \varphi(x)$ nur eine reelle positive Umkehrung zulässt, erhält man weiter

$$\int_0^h\int_0^{\varphi(x)} E'(x)\, f(y)\, dx\, dy$$

$$= E(h)\int_0^{\varphi(h)} f(y)\, dy - E(0)\int_0^{\varphi(0)} f(y)\, dy - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(h)} E(\psi(y))\, f(y)\, dy\,;$$

ähnliche Formeln würden sich für die Fälle ergeben, wo mehrere reelle positive Umkehrungen der Gleichung $y = \varphi(x)$ existiren.

III.

Mittelst der Formeln 10) und 12) waren die Masse M und das Trägheitsmoment T_0 auf das Doppelintegral S_m zurückgeführt, letzteres reduzirt sich nach den Entwickelungen des vorigen Abschnittes auf zwei oder mehrere einfache Integrale und wir haben daher die folgenden Resultate, in denen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ die zwischen 0 und 1 liegenden nach ihrer Grösse geordneten Wurzeln der Gleichung $\varphi'(t) = 0$ bezeichnen und der Gleichförmigkeit wegen r für y gesetzt worden ist:

$$20)\qquad M = 4\pi \int_0^{\varphi(1)} r^2\theta(r)\,dr$$

$$-4\pi\left[\int_{\varphi(0)}^{\varphi(t_1)} r^2\theta(r)\,\psi_1(r)\,dr + \int_{\varphi(t_1)}^{\varphi(t_2)} r^2\theta(r)\,\psi_2(r)\,dr + \ldots + \int_{\varphi(t_{n-1})}^{\varphi(1)} r^2\theta(r)\,\psi_n(r)\,dr\right]$$

ferner wenn die Gleichung 12) zunächst auf die Form

$$T_0 = 2\pi(2+\sin^2\alpha)S_1 + 2\pi(2-\sin^2\alpha)\,S_3$$

gebracht und dann die Reduktion von S_1 und S_3 vorgenommen wird

$$21)\qquad T_0 = 2\pi(2+\sin^2\alpha)\left[\int_0^{\varphi(1)} r^4\theta(r)\,dr - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t_1)} r^4\theta(r)\,\psi_1(r)\,dr - \ldots\ldots\ldots - \int_{\varphi(t_{n-1})}^{\varphi(1)} r^4\theta(r)\,\psi_n(r)\,dr\right]$$

$$+\tfrac{2}{3}\pi(2-\sin^2\alpha)\left[\int_0^{\varphi(1)} r^4\theta(r)\,dr - \int_{\varphi(0)}^{\varphi(t_1)} r^4\theta(r)\,\psi_1(r)^3\,dr - \ldots\ldots\ldots - \int_{\varphi(t_{n-1})}^{\varphi(1)} r^4\theta(r)\,\psi_n(r)^3\,dr\right]$$

Um die mechanische Bedeutung dieser Gleichungen kennen zu lernen, betrachten wir vorerst die Masse und das Trägheitsmoment einer mit den Halbmessern ϱ_0 und $\varrho_1 > \varrho_0$ beschriebenen Kugelschaale, in welcher die Dichtigkeit sich nach demselben Gesetze $\theta(r)$ wie in dem Rotationskörper ändert. Die Radien ϱ_0 und ϱ_1 sind in diesem Falle unabhängig von dem Winkel τ, und da das Trägheitsmoment einer

Kugelschaale von der genannten Zusammensetzung für alle durch den Mittelpunkt gehende Momentenachsen dasselbe sein muss, so können wir die Achse der x mit der Momentenachse zusammenfallen lassen, wodurch p in $r \sin\tau$ übergeht. Die Formeln 4) und 5) geben jetzt:

$$M = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} r^2 \theta(r) \sin\tau \, d\omega \, d\tau \, dr$$

$$T_0 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{\varrho_0}^{\varrho_1} r^4 \theta(r) \sin^3\tau \, d\omega \, d\tau \, dr$$

d. h. nach Ausführung der auf ω und τ bezüglichen Integrationen

22) $$M = 4\pi \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} r^2 \theta(r) \, dr$$

23) $$T_0 = \tfrac{8}{3}\pi \int_{\varrho_0}^{\varrho_1} r^4 \theta(r) \, dr$$

Der Vergleich zwischen diesen speziellen und den allgemeineren Formeln in 20) und 21) führt nun zu folgendem Theoreme:

Bedeutet $r_1 = \varphi(\cos\tau)$ die Polargleichung der erzeugenden Curve eines symmetrischen Rotationskörpers, innerhalb dessen die Dichtigkeit in der Entfernung r vom Mittelpunkte durch die Funktion $\theta(r)$ bestimmt wird, so bestehen die Masse und das Trägheitsmoment desselben aus den Massen resp. Trägheitsmomenten einer Kugel und einer Reihe von Kugelschaalen. Der Radius der Kugel ist gleich der halben Hauptachse jenes Körpers und die Dichtigkeit in beiden Körpern nach demselben Gesetze veränderlich; die Halbmesser der Kugelschaalen bestehen aus den verschiedenen Maximis und Minimis, welche der Radiusvector der erzeugenden Curve innerhalb des Intervalles $\tau = 0$ bis $\tau = \frac{1}{2}\pi$ erreicht; die in jenen Kugelschaalen statt findenden Dichtigkeiten sind nicht dieselben und zwar abhängig von den verschiedenen reellen und positiven Umkehrungen der Gleichung $r = \varphi(t)$.

Für das gestreckte Rotationsellipsoid hat man z. B.

$$r_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)\cos^2\tau}}$$

oder wenn die numerische Excentricität $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ mit ε bezeichnet $\cos\tau = t$ und r für r_1 gesetzt wird,

$$r = \frac{b}{\sqrt{1-\varepsilon^2 t^2}} = \varphi(t)$$

Von dieser Gleichung giebt es nur eine reelle positive Umkehrung, nämlich

$$t = \frac{\sqrt{r^2-b^2}}{\varepsilon r} = \psi(r)$$

und man erhält daher aus den Formeln 20) und 21), indem man $\psi_1(r) = \psi_2(r) \ldots. = \psi_n(r) = \psi(r)$ setzt und die Integrale wieder zusammenzieht,

$$M = 4\pi \int_0^a r^2 \theta(r)\, dr - 4\pi \int_b^a r^2 \theta(r) \frac{\sqrt{r^2-b^2}}{\varepsilon r}\, dr,$$

$$T_0 = 2\pi(2+\sin^2\alpha) \left[\int_0^a r^4\theta(r)\, dr - \int_b^a r^4 \theta(r) \frac{\sqrt{r^2-b^2}}{\varepsilon r}\, dr\right]$$

$$+ \tfrac{2}{3}\pi(2-\sin^2\alpha) \left[\int_0^a r^4\theta(r)\, dr - \int_b^a r^4 \theta(r) \left(\frac{\sqrt{r^2-b^2}}{\varepsilon r}\right)^3 dr\right].$$

Für das abgeplattete Rotationsellipsoid, dessen Abplattungsmaass durch

$$\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b} = \lambda$$

ausgedrückt werden möge, findet sich in ganz ähnlicher Weise

$$r = \frac{a}{\sqrt{1+\lambda^2 t^2}} = \varphi(t)$$

$$t = \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\lambda r} = \psi(r)$$

und nachher, wenn man in den zwischen den Gränzen a und b genommenen Integralen die Integrationsgränzen vertauscht, um das Intervall von der kleineren Gränze an zu rechnen,

$$M = 4\pi \int_0^b r^2 \theta(r)\, dr + 4\pi \int_b^a r^2 \theta(r) \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\lambda r}\, dr,$$

$$T_0 = 2\pi(2+\sin^2\alpha) \left[\int_0^b r^4\theta(r)\, dr + \int_b^a r^4 \theta(r) \frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\lambda r}\, dr\right]$$

$$+ \tfrac{2}{3}\pi(2-\sin^2\alpha) \left[\int_0^b r^4\theta(r)\, dr + \int_b^a r^4 \theta(r) \left(\frac{\sqrt{a^2-r^2}}{\lambda r}\right)^3 dr\right].$$

Bei einem Doppelkegel ist die erzeugende Linie eine Gerade, die von der Abscissenachse eine Strecke $= a$, von der Ordinatenachse eine Strecke $= b$ abschneidet, deren Polargleichung folglich sein würde

$$r_1 = \frac{1}{\frac{\cos\tau}{a} + \frac{\sin\tau}{b}}$$

oder

$$r = \frac{ab}{bt + a\sqrt{1-t^2}} = \varphi(t)$$

Die Funktion $\varphi(t)$ erlangt zwischen $t = 0$ und $t = 1$ ein Minimum für

$$t_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

und zwar ist das zugehörige r gleich der Senkrechten vom Anfangspunkte der Coordinaten auf die Gerade. Nennen wir c dieses Perpendikel, so existiren zwei Umkehrungen der Gleichung $r = \varphi(t)$, nämlich

$$t = \frac{c}{ab}\,\frac{bc - a\sqrt{r^2 - c^2}}{r} = \psi_1(r)$$

$$t = \frac{c}{ab}\,\frac{bc + a\sqrt{r^2 - c^2}}{r} = \psi_2(r)$$

ausserdem ist $\varphi(0) = b$, $\varphi(t_1) = h$, $\varphi(1) = a$ und es hat demgemäss die Aufstellung der Formeln für M und T_0 keine Schwierigkeit.

UEBER DIE

ENTWICKELUNG DER ELLIPTISCHEN FUNKTIONEN.

Einleitung.

Während Legendre bei allen seinen Untersuchungen über die elliptischen Integrale die oberen Gränzen derselben als unabhängige Variabeln betrachtete, ist bekanntlich von Abel und Jacobi ein gänzlich veränderter Gesichtspunkt geltend gemacht worden; der Werth des elliptischen Integrales erster Gattung

1) $$u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

oder für $z=\sin\varphi$

$$u=\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}=F(\varkappa,\varphi)$$

bildet hier das Argument, nach welchem sowohl φ und z als die übrigen elliptischen Integrale $E(\varkappa,\varphi)$ und $\Pi(\varkappa,\lambda,\varphi)$ entwickelt werden. An die Stelle der Legendre'schen Gleichung $u=F(\varkappa,\varphi)$ tritt die inverse Gleichung $\varphi=\text{am}(u,\varkappa)$ oder kurz $\varphi=\text{am}\,u$, woraus von selbst folgt, dass $z=\sin\varphi$, d. h.

2) $$z=\sin\text{am}\,(u,\varkappa)$$

die Umkehrung von No. 1) bezeichnen muss, wofür kürzer sn am u geschrieben werden kann.*) Zugleich ist

---

*) In seiner an Formeln reichen „Theorie der Modularfunktionen und Modularintegrale" (Berlin 1844) bedient sich Gudermann der Bezeichnung sn u statt sn am u; sie ist aber in so fern nicht empfehlenswerth, als sie erstens den wesentlichen Umstand verwischt, dass z in der That der Sinus einer transcendenten Funktion (am u) ist, und als sie ferner keine consequente Durchführung gestattet, da man z. B. sn (2 am u) und sn am ($2u$) nicht unterscheiden könnte. Ebenso unpassend erscheint die Benennung „Modularsinus" statt „Amplitudensinus"; während nämlich der letztere Ausdruck die sprachrichtige Zusammenziehung von „Sinus der Amplitude" ist, lässt der erste keine bestimmte Deutung zu und stellt die Sache durch Weglassung des Hauptargumentes (der Amplitude) in ein schiefes Licht.

$$\sqrt{1-z^2} = \text{cs am } u, \quad \sqrt{1-\varkappa^2 z^2} = \sqrt{1-\varkappa^2 \text{ sn}^2 \text{ am } u}$$

oder wenn man die Legendre'sche Abkürzung $\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi} = \Delta\,(\varkappa, \varphi)$ beibehält:

$$\sqrt{1-\varkappa^2 z^2} = \Delta \text{ am } (u, \varkappa) = \Delta \text{ am } u.$$

An die Stelle der Differenzialgleichung

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}} = du \text{ oder } d\varphi = \Delta\,(\varphi)\, du$$

tritt nun die folgende

3) $$d \text{ am } u = \Delta \text{ am } u\, du$$

der sich noch die beiden aus den Formeln $d \sin\varphi = \cos\varphi\, d\varphi$ und $d \cos\varphi = -\sin\varphi\, d\varphi$ entspringenden Gleichungen

4) $$d \text{ sn am } u = + \text{ cs am } u\, \Delta \text{ am } u\, du$$

5) $$d \text{ cs am } u = - \text{ sn am } u\, \Delta \text{ am } u\, du$$

beigesellen lassen. Denkt man sich den Werth $\varphi = \text{am } u$ in die übrigen elliptischen Integrale $E\,(\varphi)$ und $\Pi(\varphi)$ substituirt, so werden diese gleichfalls von u abhängig, nämlich E (am u) und Π (am u), und bilden mit den trigonometrischen Funktionen der Amplitude zusammen die elliptischen Funktionen im eigentlichen Sinne, während die früheren Funktionen Legendre's nunmehr elliptische Integrale heissen.

Die Untersuchung richtet sich zunächst auf den Gang der Funktion $z = \text{sn am } u$; das Ergebniss ist, dass diese Funktion eine reelle und eine imaginäre Periode zugleich besitzt. Setzt man nämlich $\sqrt{1-\varkappa^2} = \varkappa'$ und

6) $$K = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$

7) $$K' = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa'^2 z^2)}} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa'^2 \sin^2\varphi}},$$

so ist für beliebige ganze m und m'

$$\text{sn am } (u + 4m\, K) = \text{sn am } u,$$
$$\text{sn am } (u + 2m' K' \sqrt{-1}) = \text{sn am } u.$$

Nach Einführung dieser neuen Bezeichnung und mit Rücksicht auf die genannte Eigenschaft des Amplitudensinus wird es Jacobi möglich seinem allgemeinen Multiplikationstheoreme eine solche Form

zu ertheilen, dass sn am (nu) in ähnlicher Weise durch ein Produkt von n Faktoren dargestellt wird, wie diess bei sin nu längst bekannt ist; für $u = \frac{v}{n}$ und $n = \infty$ folgt daraus ein unendliches Produkt für sn am v, welches sich wieder in Partialbrüche und unendliche Reihen umsetzen lässt. Das Endresultat dieser Untersuchung besteht in dem merkwürdigen Theoreme, dass die hauptsächlichsten elliptischen Funktionen gebrochene Funktionen sind, deren Zähler und Nenner aus unendlichen Reihen von gewaltiger Convergenz bestehen; setzt man nämlich

$$q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}$$

und

$$\Theta(u) = 1 - 2q \cos\frac{2\pi u}{2K} + 2q^4 \cos\frac{4\pi u}{2K} - 2q^9 \cos\frac{6\pi u}{2K} + \ldots..$$

$$H(u) = 2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K} - 2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K} + 2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \ldots..$$

wo $\Theta(u)$ und $H(u)$ elliptische Transcendenten heissen, so gelten die Formeln:

$$\text{sn am } u = \frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad \text{cs am } u = \sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\,\frac{H(u+K)}{\Theta(u)},$$

$$\Delta \text{ am } u = \sqrt{\varkappa'}\,\frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)};$$

in gleich einfacher Weise lassen sich E (am u) und Π (am u) durch die Transcendente Θ ausdrücken.

Den im Vorigen bezeichneten ebenso geistreichen als natürlichen Gedankengang hat Jacobi bei seinen späteren Vorträgen wieder verlassen und das Ende zum Anfang gemacht, indem er von den durch die Gleichungen

$$\vartheta\,(q, x) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots..$$

$$\vartheta_1(q, x) = 2\sqrt[4]{q}\,\sin x - 2\sqrt[4]{q^9}\,\sin 3x + 2\sqrt[4]{q^{25}}\,\sin 5x - \ldots..$$

definirten Funktionen zweier Variabelen ausging, und ihren Zusammenhang mit dem elliptischen Integrale erster Gattung nachwies.*) Der Hauptgrund zu dieser Umgestaltung lag in der eigenthümlichen Schwierigkeit, welche Integrationen zwischen complexen Gränzen verursachen (ein Punkt, auf den wir nachher zurückkommen werden), während dagegen

*) Eine Skizze dieses Verfahrens enthält die Preisschrift von Rosenhain: „*Mémoire sur les fonctions à deux variables et à quatre périodes, qui sont les inverses des intégrales ultra-elliptiques de la première classe;* Paris imprimerie nationale MDCCCL"; die vollständige Darstellung ist aus Jacobi's Nachlass zu erwarten.

die für ϑ und ϑ_1 angegebenen Reihen auch bei complexen x convergiren, wenn q jederzeit als echter Bruch angesehen wird. Jacobi's Schüler sind zum Theil noch weiter gegangen und haben es selbst bei reellen z und u für misslich erklärt, mit der Definition

$$\text{wenn} \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = u, \text{ ist } z = \text{sn am } u$$

auszukommen. Sie sagen nämlich: „wenn eine Funktion $z = f(u)$ Maxima und Minima besitzt, wie diess bei jeder periodischen Funktion der Fall ist, so muss jene Gleichung, nach u aufgelöst, mehrere verschiedene Wurzeln geben, d. h. die umgekehrte Funktion $u = F(z)$ muss mehrdeutig sein; daraus folgt im Hinblick auf die reelle Periodicität von sn am u, dass das obige bestimmte Integral als unendlich vieldeutig zu betrachten ist.“ Obschon dieses Prinzip an sich keinem Zweifel unterliegt, so darf man doch im vorliegenden Falle die Anwendung desselben bestreiten; die Theorie der elliptischen Funktionen geht nicht von der Gleichung $z = \text{sn am } u$ aus um deren Wurzeln aufzusuchen, sie betrachtet im Gegentheil das Integral $u = F(z)$ zuerst und nachher die inverse Funktion $z = \text{sn am } u$; die Entdeckung der Periodicität von sn am u beweist dann weiter nichts, als dass man von einer der Wurzeln der Gleichung $z = \text{sn am } u$ ausgegangen ist und dass es eben noch andere Wurzeln giebt. Uebrigens wird die Sache klar, wenn man zunächst den Modulus $= 0$ nimmt und das trigonometrische Seitenstück zu den elliptischen Funktionen betrachtet. Wir haben dann

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}};$$

nehmen wir die Wurzel absolut, so ist identisch mit der vorstehenden Gleichung

$$u = \frac{z}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{z^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{z^5}{5} + \dots\dots$$

dem Werthe $z=0$ entspricht $u=0$, zu dem Werthe $z=1$, welcher nicht überschritten werden darf ohne auf eine divergente Reihe zu kommen, gehört

$$u = \frac{1}{1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{1}{5} + \dots\dots$$

wo K die Summe der Reihe heissen möge; durch Umkehrung der obigen Gleichung erhält man

$$z = \frac{u}{1} - \frac{u^3}{1.2.3} + \frac{u^5}{1.2.3.4.5} - \ldots\ldots$$

Diese Reihe convergirt nicht nur von $u=0$ bis $u=K$, sondern überhaupt immer, und man kann daher den Gang der Funktion z von $u=0$ bis $u=\infty$ untersuchen. Findet sich dabei $f(2K+u) = -f(u)$, $f(4K+u) = +f(u)$ u. s. w., so beweist diess, dass $u = z + \frac{1}{6}z^3 + \text{etc.}$ nicht die einzige, sondern nur die kleinste Umkehrung der Gleichung $z = u - \frac{1}{6}u^3 + \text{etc.}$ ist, während noch unendlich viel andere Umkehrungen existiren.*) Dem entsprechend werden wir im Folgenden das Integral

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

als eindeutig und identisch mit

$$u = \frac{z}{1} + (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\varkappa^2)\,\frac{z^3}{3} + \left(\frac{1.3}{2.4} + \tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\varkappa^2 + \frac{1.3}{2.4}\varkappa^4\right)\frac{z^5}{5} + \ldots\ldots$$

betrachten d. h. die Wurzel im absoluten Sinne nehmen.

Wesentlich anders wird die Sache, wenn die Gränzen des mit u bezeichneten Integrales complexe Zahlen sind. Die einzig haltbare und genaue Definition des zwischen den reellen Gränzen z_0 und Z genommenen bestimmten Integrales

$$\int_{z_0}^{Z} f(z)\, dz$$

---

*) Auch bei anderen Gelegenheiten wiederholt sich diese Erscheinung. Will man z. B. die von $z=0$ bis $z=\frac{1}{e}$ convergente Reihe

$$\alpha) \qquad u = \frac{1^0 z}{1} + \frac{2^1 z^2}{1.2} + \frac{3^2 z^3}{1.2.3} + \frac{4^3 z^4}{1.2.3.4} + \ldots\ldots$$

summiren, so kann diess mittelst der Bemerkung geschehen, dass u der Gleichung

$$(1-u)\frac{du}{dz} = \frac{u}{z}$$

genügt, wie eine ganz gewöhnliche Rechnung zeigt. Das Integral der Differenzialgleichung ist $Cz = ue^{-u}$ oder, weil für $z=0$ sich u in 0 und $\frac{u}{z}$ in 1 verwandelt, $z = ue^{-u}$. Diese inverse Funktion wächst von $u=0$ bis $u=1$, wo $z=\frac{1}{e}$ wird, und nimmt dann von $u=1$ bis $u=\infty$ wieder ab; einem individuellen z entsprechen folglich zwei u, von denen eines weniger, das andere mehr als die Einheit beträgt. Aus der Gleichung $ue^{-u}=z$ abgeleitet, ist also u zweideutig, der Gleichung α zu Folge eindeutig — trotz dem widersprechen sich diese Behauptungen in keiner Weise; die Gleichung α repräsentirt die eine und zwar die kleinere Wurzel der Gleichung $ue^{-u}=z$, wie auch die Umkehrungsformel von Lagrange bestätigt, die andere Wurzel ist nicht in eine Potenzenreihe verwandelbar.

erklärt dasselbe bekanntlich für den Gränzwerth der Summe

$$(z_1 - z_0)\, f(z_0) + (z_2 - z_1)\, f(z_1) + \ldots\ldots + (Z - z_{n-1})\, f(z_{n-1})$$

unter der Voraussetzung, dass die Anzahl $(n-1)$ der zwischen z_0 und Z interpolirten Grössen

$$z_1 > z_0, \quad z_2 > z_1, \quad z_3 > z_2, \ldots\ldots z_{n-1} > z_{n-2}$$

ins Unendliche wächst, mithin die Differenz zweier benachbarten Zahlen gegen die Null convergirt; man kann daher auch sagen, dass das obige Integral $= \text{Lim}\, \Sigma f(z) \Delta z$ sei, wenn z das Intervall z_0 bis Z stetig durchläuft. Wendet man diese Definition auf den Fall an, wo $z_0 = x_0 + y_0 i$, $Z = X + Yi$ und $i = \sqrt{-1}$ ist, so muss man z als complexe Variabele ansehen, welche sich von $x_0 + y_0 i$ bis $X + Yi$ stetig ändert; nach unserer jetzigen Kenntniss von der Natur complexer Zahlen bedeutet jene Aenderung den stetigen Uebergang von einer Stelle $x_0 y_0$ der Zahlenebene zu einer anderen Stelle XY d. h. eine Operation, welche auf unendlich viel verschiedene Weisen ausgeführt werden kann, so lange nicht eine bestimmte Curve vorgeschrieben ist, längs welcher der Uebergang geschehen soll. Dasselbe zeigt sich analytisch; für $z = x + yi$ geht x von x_0 bis X, y von y_0 bis Y, und das Integral

$$\int_{x_0 + y_0 i}^{X + Yi} f(z)\, dz$$

erscheint als Gränzwerth der Summe

$$[(x_1 - x_0) + (y_1 - y_0) i]\, f(x_0 + y_0 i) + [(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1) i]\, f(x_1 + y_1 i) + \ldots$$
$$\ldots + [(X - x_{n-1}) + (Y - y_{n-1}) i]\, f(x_{n-1} + y_{n-1} i)$$

wenn die eingeschalteten Zahlen $x_1, x_2 \ldots x_{n-1}, y_1, y_2 \ldots y_{n-1}$ den Bedingungen

$$x_0 < x_1 < x_2 \ldots\ldots < x_{n-1} < X$$
$$y_0 < y_1 < y_2 \ldots\ldots < y_{n-1} < Y$$

genügen und n ins Unendliche wächst. Um zwei derartige Zahlenreihen zu erhalten, braucht man nur

$$8) \qquad x = \varphi(t), \qquad y = \psi(t)$$

zu setzen und unter $\varphi(t)$, $\psi(t)$ zwei willkührliche aber continuirliche Funktionen zu verstehen, welche für $t = t_0$ und $t = T$ die Werthe

$$9) \qquad \begin{cases} \varphi(t_0) = x_0, & \psi(t_0) = y_0 \\ \varphi(T) = X, & \psi(T) = Y \end{cases}$$

geben und innerhalb des Intervalles t_0 bis T nur wachsen; schaltet man zwischen t_0 und T beliebige Grössen $t_1, t_2, \ldots t_{n-1}$ ein, so liefern die Gleichungen 8) zwei Zahlenreihen, die den erforderlichen Bedingungen genügen. An die Stelle der Differenzen $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$ etc., $y_1 - y_0$, $y_2 - y_1$ etc. treten jetzt die Differenzen von $\varphi(t)$ und $\psi(t)$, daraus werden für unendlich wachsende n die Differenziale $d\varphi(t) = \varphi'(t)\, dt$, $d\psi(t) = \psi'(t)\, dt$ und man gelangt so zu der Gleichung

$$10) \qquad \int_{x_0+y_0 i}^{X+Yi} f(z)\, dz = \int_{t_0}^{T} f[\varphi(t) + i\psi(t)]\, [\varphi'(t) + i\psi'(t)]\, dt$$

wo nun die Vieldeutigkeit der rechten Seite unmittelbar in die Augen springt. — Nur in einem Falle ist diese Vieldeutigkeit nicht vorhanden. Wenn nämlich eine Funktion $F(t)$ von $t = t_0$ bis $t = T$ stetig und endlich bleibt, so darf man bekanntlich das auf die vorige Art definirte bestimmte Integral

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\, dt$$

auch als Differenz zweier Spezialwerthe des unbestimmten Integrales $\int F(t)\, dt$ ansehen:

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\, dt = \int^{t=T} F(t)\, dt - \int^{t=t_0} F(t)\, dt,$$

dagegen ist diess nicht mehr erlaubt, sobald $F(t)$ für irgend einen zwischen t_0 und T liegenden Werth $t = \tau$ eine Unterbrechung der Continuität erleidet, man hat vielmehr in diesem Falle erst die Zerlegung

$$\int_{t_0}^{T} F(t)\, dt = \int_{t_0}^{\tau-\varepsilon} F(t)\, dt + \int_{\tau+\varepsilon_1}^{T} F(t)\, dt$$

vorzunehmen, wo ε und ε_1 verschwindende Grössen bezeichnen, und nunmehr die einzelnen Integrale nach jenem Satze zu behandeln. Von diesem Fundamentaltheoreme lässt sich leicht eine Anwendung auf die Gleichung 10) machen, indem man

$$\int f(z)\, dz = f_1(z) + \text{Const.}$$

also

$$\int f[\varphi(t) + i\psi(t)][\varphi'(t) + i\psi'(t)]\, dt = f_1[\varphi(t) + i\psi(t)] + \text{Const.}$$

setzt und die Integration zwischen den Gränzen $t = t_0$ und $t = T$ ausführt; man findet mit Rücksicht auf die Gleichungen 9)

$$\int_{x_0+y_0 i}^{X+Yi} f(z)\, dz = f_1(X+Yi) - f_1(x_0+y_0 i);$$

demgemäss darf eine Integration zwischen complexen Gränzen auf gewöhnliche Weise vorgenommen werden und liefert ein eindeutiges Resultat, sobald die integrirte Funktion zwischen jenen Gränzen weder discontinuirlich noch unendlich wird. Giebt es dagegen ein oder mehrere Werthepaare $x = \xi$ und $y = \eta$ dergestalt, dass $X > \xi > x_0$, $Y > \eta > y_0$ und $f(\xi+\eta i)$ discontinuirlich oder unendlich wird, so tritt in der That die Vieldeutigkeit wieder ein, und zwar hat Cauchy nachgewiesen, dass der sogenannte Hauptwerth des Integrales um

$$\pm\, \pi i \,\text{Lim}\, \{\varepsilon\, f(\xi + \eta i + \varepsilon)\}$$

zunimmt, wenn die Funktionen $\varphi(t)$ und $\psi(t)$ um ihre Variationen $\delta\varphi(t)$ und $\delta\psi(t)$ geändert werden.*)

Für die Behandlung des elliptischen Integrales erster Art, bei welchem die Herbeiziehung complexer Gränzen zu Gleichungen von der Form

$$\int_0^{X+Yi} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} = u + vi, \quad \text{sn am}\,(u + vi) = X + Yi$$

führen würde, entspringt aus den obigen Bemerkungen eine doppelte Wahl; entweder verhütet man den Eintritt einer Discontinuität dadurch, dass man $X < 1$ voraussetzt, oder man lässt X beliebig und untersucht die verschiedenen Werthe, welche das Integral für $X > 1$ erhält, je nachdem längs der einen oder anderen Curve integrirt wird, wie diess von Puiseux geschehen ist.**) Dass sich Jacobi durch die hervorgehobene Schwierigkeit in dem raschen Laufe seiner Untersuchungen

---

*) *Mémoire sur les intégrales définies, prises entre des limites imaginaires;* Paris chez de Bure frères, 1825.

**) *Recherches sur les fonctions algébriques; Liouville, Journal de Mathématiques,* tome XV (1850).

nicht aufhalten liess, war sehr begreiflich, zugleich erklären sich daraus die späteren Theorieen des Meisters und seiner Schüler Cayley, Eisenstein und Heine, ob aber der ursprüngliche sehr natürliche Gedankengang desshalb ganz zu verlassen und sofort durch künstlichere Betrachtungsweisen zu ersetzen sei, darf wohl noch bezweifelt werden; aus den oben entwickelten Gründen wenigstens möchte mit Sicherheit hervorgehen, dass die Theorie elliptischer Funktionen immer noch als streng begründet anzusehen ist, solange das elliptische Integral erster Gattung seine Eindeutigkeit behält, was bei reeller oberer Gränze und absolut genommener Wurzel immer und bei complexer Gränze dann der Fall ist, wenn ihr reeller Bestandtheil weniger als die Einheit beträgt. — Mit dieser Beschränkung würden die Entwickelungen der *Fundamenta nova* etc. noch umfangreicher werden, als sie es ohnehin sind, und es liegt daher die Frage nahe, ob sich die Resultate, welche Jacobi aus seinem Multiplikationstheoreme gezogen hat, nicht direkt aus der Definition der elliptischen Funktionen ableiten lassen. Auch das Mittel hierzu bietet sich von selbst dar; die in § 39 u. s. w. der *fundam.* entwickelten Reihen für sn am u, cs am u, Δ am u etc. sind sammt und sonders von den Formen

$$\tfrac{1}{2}A_0 + A_1 \cos\frac{\pi u}{H} + A_2 \cos\frac{2\pi u}{H} + A_3 \cos\frac{3\pi u}{H} + \ldots..$$

$$B_1 \sin\frac{\pi u}{H} + B_2 \sin\frac{2\pi u}{H} + B_3 \sin\frac{3\pi u}{H} + \ldots..$$

wo A, B, H constante Grössen bezeichnen, sie gehören also in die Classe der von Lagrange und Fourier betrachteten Reihen, deren Summen bekanntlich jeder gegebenen Funktion $f(u)$ gleich sein können, sobald u auf das Intervall 0 bis H beschränkt wird und die Coefficienten A_n und B_n mittelst der Formeln

$$A_n = \frac{2}{H}\int_0^H f(u) \cos\frac{n\pi u}{H}\, du, \qquad B_n = \frac{2}{H}\int_0^H f(u) \sin\frac{n\pi u}{H}\, du$$

bestimmt werden; kann man also die vorstehenden Integrationen in dem Falle ausführen, wo an die Stelle von $f(u)$ eine Funktion der Amplitude gesetzt wird, so hat man eine völlig direkte Entwickelung der elliptischen Funktionen. Dass sich diese Idee mit sehr geringen Hülfsmitteln realisiren lässt, mögen die folgenden Untersuchungen zeigen; wir schicken denselben eine kurze Ableitung der wenigen elliptischen Formeln voraus, deren wir später bedürfen; wie sich von selbst ver-

steht, hat diese Herleitung nur den Zweck fortwährende Verweisungen zu ersparen und die Sache von der einfachsten Seite darzustellen.

Fundamentalformeln für die trigonometrischen Funktionen der Amplitude.

Nimmt man das elliptische Integral $F(\varkappa,\varphi)$ zwischen den Gränzen 0 und $-\varphi$ statt wie früher zwischen 0 und φ, so findet sich sehr leicht, dass dasselbe sein Vorzeichen, nicht aber seinen Werth ändert; man schliesst daraus

$$11)\quad \begin{cases} \operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am} u, & \operatorname{sn}\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{sn}\operatorname{am} u, \\ \operatorname{cs}\operatorname{am}(-u) = +\operatorname{cs}\operatorname{am} u, & \Delta\operatorname{am}(-u) = +\Delta\operatorname{am} u, \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

In der aus den Formeln 6) und 1) unmittelbar folgenden Gleichung

$$K-u = \int_z^1 \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}}$$

ersetzen wir z durch eine neue Variabele y mittelst der Substitution

$$z = \sqrt{\frac{1-y^2}{1-\varkappa^2 y^2}} \text{ oder } y = \sqrt{\frac{1-z^2}{1-\varkappa^2 z^2}},$$

und erhalten

$$K-u = \int_0^{\sqrt{\frac{1-z^2}{1-\varkappa^2 z^2}}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}}, \quad \sqrt{\frac{1-z^2}{1-\varkappa^2 z^2}} = \operatorname{sn}\operatorname{am}(K-u)$$

d. i. vermöge des ursprünglichen Werthes $z = \operatorname{sn}\operatorname{am} u$

$$12)\quad \operatorname{sn}\operatorname{am}(K-u) = \frac{\operatorname{cs}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u};$$

dieser Formel lassen sich noch die folgenden zur Seite stellen:

$$13)\quad \operatorname{cs}\operatorname{am}(K-u) = \varkappa' \frac{\operatorname{sn}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \quad \Delta\operatorname{am}(K-u) = \frac{\varkappa'}{\Delta\operatorname{am} u}.$$

Ersetzt man u durch $-u$, so ergeben sich die Formeln

$$14)\quad \begin{cases} \operatorname{sn}\operatorname{am}(K+u) = \dfrac{\operatorname{cs}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u} \\ \operatorname{cs}\operatorname{am}(K+u) = -\varkappa' \dfrac{\operatorname{sn}\operatorname{am} u}{\Delta\operatorname{am} u}, \quad \Delta\operatorname{am}(K+u) = \dfrac{\varkappa'}{\Delta\operatorname{am} u} \end{cases}$$

Allgemeiner werden diese Gleichungen, wenn man der Reihe nach $K-u$, $K+u$, $2K-u$, $2K+u$ etc. an die Stelle von u treten lässt; man findet für ungerade m:

$$\operatorname{sn}\operatorname{am}(mK+u) = (-1)^{\frac{1}{2}(m-1)}\frac{\operatorname{sn}\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}$$

$$\operatorname{cs}\operatorname{am}(mK+u) = (-1)^{\frac{1}{2}(m+1)}\frac{\varkappa'\operatorname{cs}\operatorname{am}u}{\Delta\operatorname{am}u}$$

$$\Delta\operatorname{am}(mK+u) = \frac{\varkappa'}{\Delta\operatorname{am}u}$$

und für gerade m

$$\operatorname{sn}\operatorname{am}(mK+u) = (-1)^{\frac{1}{2}m}\operatorname{sn}\operatorname{am}u$$

$$\operatorname{cs}\operatorname{am}(mK+u) = (-1)^{\frac{1}{2}m}\operatorname{cs}\operatorname{am}u$$

$$\Delta\operatorname{am}(mK+u) = \Delta\operatorname{am}u$$

hieraus folgt die reelle Periodicität der in Rede stehenden Funktionen; für $m = 4n$ werden nämlich die rechten Seiten der Reihe nach sn am u, cs am u, Δ am u, d. h. die Funktionen bleiben dieselben, wenn u um ein Vielfaches von $4K$ zunimmt.

Will man zu Formeln gelangen, in denen die Amplituden complexer Variabelen vorkommen, so muss man das Differenzial $dz:\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}$ imaginär werden lassen; diess kann auf zweierlei Weise geschehen, indem man entweder dem z imaginäre Werthe beilegt, oder indem man die Grenze $z=1$ überschreitet.

Nehmen wir erstlich das Integral von $dz:\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}$ zwischen den Gränzen 0 und ηi und setzen

$$u = \int_0^{\eta i}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2z^2)}} \qquad \text{also} \qquad \eta i = \operatorname{sn}\operatorname{am}u$$

so erleidet die unter dem Integralzeichen stehende Funktion keine Unterbrechung der Continuität, mithin darf das Integral auf die gewöhnliche Weise angesehen werden und bildet dann die Summe von Elementen, welche unter der Form

$$\frac{i\,dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+\varkappa^2y^2)}}$$

enthalten sind, wenn y das Intervall 0 bis η durchläuft; demnach hat man

$$u = i\int_0^{\eta}\frac{dy}{\sqrt{(1+y^2)(1+\varkappa^2y^2)}}.$$

Mittelst der Substitution $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ wird daraus

$$u = i\int_0^{\frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa'^2 z^2)}}$$

d.i. wenn man den Werth des Integrales mit v bezeichnet,

$$u = iv, \quad \frac{\eta}{\sqrt{1+\eta^2}} = \text{sn am}(v, \varkappa'), \quad \eta = \text{tg am}(v, \varkappa');$$

nach Substitution der Werthe von u und η ergeben sich aus der ursprünglichen Gleichung sn am $u = i\eta$ die Beziehungen

$$15)\quad \begin{cases} \text{sn am}(vi) = i \text{ tg am}(v, \varkappa') \\ \text{cs am}(vi) = \frac{1}{\text{cs am}(v, \varkappa')}, \quad \Delta \text{am}(vi) = \frac{\Delta \text{am}(v, \varkappa')}{\text{cs am}(v, \varkappa')}. \end{cases}$$

Will man die obere Gränze des in Rede stehenden elliptischen Integrales grösser als die Einheit nehmen, so hat man zu beachten, dass das Radikal $\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}$ von $z = 1$ bis $z = \frac{1}{\varkappa}$ imaginär ist, für $z > \frac{1}{\varkappa}$ dagegen wieder reell wird; dem entsprechend sind die beiden Fälle zu unterscheiden, ob die obere Integrationsgränze zwischen 1 und $\frac{1}{\varkappa}$ oder über $\frac{1}{\varkappa}$ hinaus liegt.

Um den ersten Fall zu erörtern, sei

$$w = \int_0^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} \quad \text{mithin} \quad \frac{1}{\xi} = \text{sn am } w$$

und dabei $1 > \xi > \varkappa$; die Elemente des Integrales sind dann theils reell, theils imaginär, man sondert sie leicht dadurch, dass man w in zwei Integrale von 0 bis 1 und von 1 bis $\frac{1}{\xi}$ zerlegt. Der Werth des ersten Integrales ist reell $= K$, im zweiten Integrale ist der gemachten Voraussetzung zufolge $1 - z^2$ negativ und $1 - \varkappa^2 z^2$ positiv; wir haben daher

$$w = K + \frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-\varkappa^2 z^2)}}.$$

Durch Anwendung der Substitution $z = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa'^2 y^2}}$ wird hieraus

$$w = K + \frac{1}{i}\int_0^{\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\varkappa'}} \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa'^2 y^2)}},$$

und wenn wir das rechter Hand befindliche Integral mit v bezeichnen, so ist gleichzeitig

$$w = K + \frac{v}{i}, \quad \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\varkappa'} = \operatorname{sn} \operatorname{am}(v, \varkappa') \text{ oder } \xi = \Delta \operatorname{am}(v, \varkappa').$$

Nach Substitution der für w und ξ gefundenen Werthe nimmt die frühere Gleichung $\operatorname{sn} \operatorname{am} w = \frac{1}{\xi}$ die folgende Form an

$$\operatorname{sn} \operatorname{am}\left(K + \frac{v}{i}\right) = \frac{1}{\Delta \operatorname{am}(v, \varkappa')},$$

lässt man $-v$ an die Stelle von v treten und schreibt vi für $-\frac{v}{i}$, so ergeben sich die Formeln

$$16)\quad \begin{cases} \operatorname{sn} \operatorname{am}(K+vi) = \dfrac{1}{\Delta \operatorname{am}(v, \varkappa')}, \\ \operatorname{cs} \operatorname{am}(K+vi) = -i\,\dfrac{\varkappa' \operatorname{sn} \operatorname{am}(v, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(v, \varkappa')}, \quad \Delta \operatorname{am}(K+vi) = \dfrac{\varkappa' \operatorname{cs} \operatorname{am}(v, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(v, \varkappa')} \end{cases}$$

deren Vorzeichen sich durch die Bemerkung finden, dass für $v = 0$ dieselben Werthe zum Vorschein kommen müssen, welche die Gleichungen 14) für $u = 0$ liefern.

Um endlich den zweiten der vorhin erwähnten Fälle zu discutiren, betrachten wir das Integral

$$w = \int_0^{\frac{1}{\varkappa\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-\varkappa^2 z^2)}} \text{ oder } \frac{1}{\varkappa\xi} = \operatorname{sn} \operatorname{am} w$$

unter der Voraussetzung eines beliebigen ächt gebrochenen ξ. Wir zerlegen w in drei Integrale von 0 bis 1, von 1 bis $\frac{1}{\varkappa}$, und von $\frac{1}{\varkappa}$ bis $\frac{1}{\varkappa\xi}$; das erste Integral ist reell und $= K$, das zweite enthält nur imaginäre Elemente; das dritte besteht wieder aus reellen Elementen; demgemäss schreiben wir

$$w = K + \frac{1}{i}\int_1^{\frac{1}{\varkappa}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(1-\varkappa^2 z^2)}} + \int_{\frac{1}{\varkappa}}^{\frac{1}{\varkappa\xi}} \frac{dz}{\sqrt{(z^2-1)(\varkappa^2 z^2-1)}}.$$

Im ersten Integrale wenden wir die schon vorhin benutzte Substitution $z = \frac{1}{\sqrt{1-\varkappa'^2 y^2}}$ an, im zweiten setzen wir $z = \frac{1}{\varkappa y}$ und erhalten so

$$w = K + \frac{1}{i}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa'^2 y^2)}} + \int_\xi^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}}$$

$$= K + \frac{1}{i}K' + K - \int_0^\xi \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\varkappa^2 y^2)}};$$

nennen wir u den Werth des letzten Integrales und substituiren die nunmehrigen Werthe

$$w = 2K + \frac{K'}{i} - u, \qquad \xi = \text{sn am } u$$

in die ursprüngliche Gleichung sn am $w = \frac{1}{\varkappa \xi}$, so folgt

$$\text{sn am } (2K - u - K' i) = \frac{1}{\varkappa \text{ sn am } u}$$

oder wenn $2K - u$ durch u ersetzt wird

$$\text{sn am } (u - K' i) = \frac{1}{\varkappa \text{ sn am } (2K - u)} = \frac{1}{\varkappa \text{ sn am } u}.$$

Lässt man $-u$ an die Stelle von u treten und beachtet, dass die Formel sn am $(-v) = -$ sn am v auch bei complexen v gilt, sobald man, wie es hier geschehen ist, die Definition des Amplitudensinus in allen Fällen beibehält, so ergeben sich noch die Formeln

$$17) \begin{cases} \text{sn am } (u + K' i) = \dfrac{1}{\varkappa \text{ sn am } u}, \\ \text{cs am } (u + K' i) = -\dfrac{i\, \Delta \text{ am } u}{\varkappa \text{ sn am } u}, \quad \Delta \text{ am } (u + K' i) = -i \text{ ct am } u. \end{cases}$$

Die in den letzten Gleichungen genommenen Vorzeichen bestimmen sich durch die Spezialisirung $\varkappa = 1$, für welche $\varkappa' = 0$, $K' = \frac{1}{2}\pi$ wird und das elliptische Integral erster Gattung in

$$u = \int_0^x \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{1}{2} l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

übergeht, woraus man erhält

$$x = \text{sn am } (u, 1) = \frac{e^u - e^{-u}}{e^u + e^{-u}},$$

$$\text{cs am } (u, 1) = \Delta \text{ am } (u, 1) = \frac{2}{e^u + e^{-u}};$$

man findet mittelst dieser Substitutionen die Gleichungen 17) bestätigt, wenn die Vorzeichen so genommen werden, wie es geschehen ist.

Die Formeln 15), 16) und 17) sind nur spezielle Fälle der allgemeinen Formeln für sn am $(u + vi)$, cs am $(u + vi)$ u. s. w.; wir können aber die letzteren aus dem einfachen Grunde übergehen, weil sie zu unseren Entwickelungen nicht erforderlich sind.

Allgemeine Theoreme über periodische Reihen mit complexen Variabelen.

Wenn man sich schon bei der Betrachtung von Potenzenreihen nicht auf Funktionen reeller Variabelen beschränkt, so ist es gewiss nur consequent, die von Lagrange und Fourier gegebenen Reihenentwickelungen gleichfalls auf Funktionen complexer Variabelen auszudehnen. Um diese Idee zu realisiren, hat man vorerst die Funktion $f(u+vi)$ in ihren reellen und imaginären Bestandtheil zu zerlegen, etwa

$$f(u \pm vi) = U \pm Vi$$

mithin

$$U = \frac{f(u+vi)+f(u-vi)}{2}, \quad V = \frac{f(u+vi)-f(u-vi)}{2i},$$

und darauf jede der Funktionen U und V nach einer der bekannten Formeln

$$\Phi(u) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\frac{\pi u}{H} + a_2 \cos\frac{2\pi u}{H} + a_3 \cos\frac{3\pi u}{H} + \dots$$

$$H \geqq u \geqq 0\,, \qquad a_n = \frac{2}{H}\int_0^H \Phi(u) \cos\frac{n\pi u}{H}\, du\,,$$

$$\Psi(u) = b_1 \sin\frac{\pi u}{H} + b_2 \sin\frac{2\pi u}{H} + b_3 \sin\frac{3\pi u}{H} + \dots$$

$$H > u > 0\,, \qquad b_n = \frac{2}{H}\int_0^H \Psi(u) \sin\frac{n\pi u}{H}\, du\,,$$

zu entwickeln, indem man $\Phi(u)$ entweder $= U$ oder $= V$ und $\Psi(u) = V$ oder $= U$ nimmt. Dabei ist H eine willkührliche positive Constante und auch v gilt in so fern für constant, als es, der angenommenen Reihenform zufolge, nur in den Coefficienten vorkommen kann. Die Art und Weise dieses Vorkommens lässt sich aber auf folgende Weise näher bestimmen.

Ist $F(t)$ der Differentialquotient einer beliebigen Funktion $\mathfrak{F}(t)$, so hat man gleichzeitig

$$\frac{d\mathfrak{F}(t)}{dt} = F(t)\,, \quad \frac{d\mathfrak{F}(u+\beta i)}{du} = F(u+\beta i)\,, \quad \frac{d\mathfrak{F}(\alpha+vi)}{dv} = iF(\alpha+vi),$$

$$\int F(t)\,dt = \mathfrak{F}(t),\ \int F(u+\beta i)\,du = \mathfrak{F}(u+\beta i),\ i\int F(\alpha+vi)\,dv = \mathfrak{F}(\alpha+vi),$$

und erhält mittelst dieser Beziehungen

$$18)\quad \int_0^\alpha F(u+\beta i)\,du - \int_0^\alpha F(u)\,du = i\int_0^\beta F(\alpha+vi)\,dv - i\int_0^\beta F(vi)\,dv.$$

Hierbei ist indessen vorausgesetzt, dass ein bestimmtes Integral als Differenz zweier Spezialwerthe des entsprechenden unbestimmten Integrales gelten dürfe, und da eine solche Identität nur solange statt findet als die unter dem Integralzeichen stehende Funktion keine Unterbrechung der Continuität erleidet, so müssen wir die Richtigkeit der Gleichung 18) an die Bedingung knüpfen, dass einerseits die Funktionen $F(u+\beta i)$ und $F(u)$ von $u=0$ bis $u=\alpha$, andererseits die Funktionen $F(\alpha+vi)$ und $F(vi)$ von $v=0$ bis $v=\beta$ stetig bleiben. Dieselbe Determination findet sich, wenn man die obige Formel auf dem von Cauchy angegebenen Wege (*Moigno calcul intégral* page 305) ableitet.

In der Gleichung 18) schreiben wir des Folgenden wegen H und H' für α und β, setzen ferner

$$F(z) = f(z)\cos\tfrac{n\pi z}{H}, \qquad f(u+vi) = \varphi(u,v) + i\psi(u,v)$$

und bezeichnen zur Abkürzung die hyperbolischen Funktionen $\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ und $\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$ mit cs hp x und sn hp x; es ist dann

$$\int_0^H [\varphi(u,H')+i\psi(u,H')]\left[\cos\tfrac{n\pi u}{H}\,\mathrm{cs\,hp}\,\tfrac{n\pi H'}{H} - i\sin\tfrac{n\pi u}{H}\,\mathrm{sn\,hp}\,\tfrac{n\pi H'}{H}\right]du$$

$$-\int_0^H f(u)\cos\tfrac{n\pi u}{H}\,du$$

$$= i\int_0^{H'}[\varphi(H,v)+i\psi(H,v)]\cos n\pi\,\mathrm{cs\,hp}\,\tfrac{n\pi v}{H}\,dv - i\int_0^{H'}[\varphi(0,v)+i\psi(0,v)]\,\mathrm{cs\,hp}\,\tfrac{n\pi v}{H}\,dv$$

und durch Vergleichung der reellen und imaginären Bestandtheile

$$\mathrm{cs\,hp}\,\tfrac{n\pi H'}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\cos\tfrac{n\pi u}{H}\,du + \mathrm{sn\,hp}\,\tfrac{n\pi H'}{H}\int_0^H \psi(u,H')\sin\tfrac{n\pi u}{H}\,du$$

$$= \int_0^H f(u)\cos\tfrac{n\pi u}{H}\,du - \cos n\pi\int_0^{H'}\psi(H,v)\,\mathrm{cs\,hp}\,\tfrac{n\pi v}{H}\,dv + \int_0^{H'}\psi(0,v)\,\mathrm{cs\,hp}\,\tfrac{n\pi v}{H}\,dv$$

und

$$\operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \psi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du - \operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\sin\frac{n\pi u}{H}\,du$$

$$= \cos n\pi \int_0^{H'} \varphi(H,v)\operatorname{cshp}\frac{n\pi v}{H}\,dv - \int_0^{H'} \varphi(0,v)\operatorname{cshp}\frac{n\pi v}{H}\,dv.$$

Diese Gleichungen vereinfachen sich, wenn für alle v von 0 bis H' entweder $\psi(H,v)$ und $\psi(0,v)$ oder $\varphi(H,v)$ und $\varphi(0,v)$ gleichzeitig verschwinden; man hat dann

$$19)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du + \operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \psi(u,H')\sin\frac{n\pi u}{H}\,du \\ &= \int_0^H f(u)\cos\frac{n\pi u}{H}\,du, \qquad \{\text{Cond. } \psi(H,v) = \psi(0,v) = 0\} \end{aligned}\right.$$

und entsprechend

$$20)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \psi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du - \operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\sin\frac{n\pi u}{H}\,du \\ &= 0, \qquad \{\text{Cond. } \varphi(H,v) = \varphi(0,v) = 0\} \end{aligned}\right.$$

Zwei ähnliche Theoreme ergeben sich aus der Gleichung 18) für

$$F(z) = f(z)\sin\frac{n\pi z}{H};$$

man findet nämlich durch eine ebenso einfache Rechnung

$$21)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du + \operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \psi(u,H')\sin\frac{n\pi u}{H}\,du \\ &= 0, \qquad \{\text{Cond. } \psi(H,v) = \psi(0,v) = 0\} \end{aligned}\right.$$

und

$$22)\quad \left\{\begin{aligned} &\operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \psi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du - \operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\sin\frac{n\pi u}{H}\,du \\ &= -\int_0^H f(u)\sin\frac{n\pi u}{H}\,du, \qquad \{\text{Cond. } \varphi(H,v) = \varphi(0,v) = 0\} \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen 19) und 21) sind an die nämlichen Bedingungen geknüpft, auch kommen in beiden linker Hand dieselben Integrale vor, man kann daher letztere als zwei Unbekannte ansehen und diese entwickeln; vermöge der Beziehung $\mathrm{cs}^2\mathrm{hp}\,x - \mathrm{sn}^2\mathrm{hp}\,x = 1$ erhält man so

$$23)\quad \int_0^H \varphi(u, H') \cos\frac{n\pi u}{H}\,du = +\,\mathrm{cshp}\,\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H f(u)\cos\frac{n\pi u}{H}\,du$$

$$24)\quad \int_0^H \psi(u, H') \sin\frac{n\pi u}{H}\,du = -\,\mathrm{snhp}\,\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H f(u)\cos\frac{n\pi u}{H}\,du$$

und auf gleiche Weise aus den Formeln 20) und 22)

$$25)\quad \int_0^H \psi(u, H') \cos\frac{n\pi u}{H}\,du = +\,\mathrm{snhp}\,\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H f(u)\sin\frac{n\pi u}{H}\,du$$

$$26)\quad \int_0^H \varphi(u, H') \sin\frac{n\pi u}{H}\,du = +\,\mathrm{cshp}\,\frac{n\pi H'}{H}\int_0^H f(u)\sin\frac{n\pi u}{H}\,du;$$

dabei sind die Bedingungen

für 23) und 24): $\psi(H, v) = \psi(0, v) = 0$

für 25) und 26): $\varphi(H, v) = \varphi(0, v) = 0$

endlich müssen $f(u \pm H'i)$ und $f(u)$ stetig bleiben von $u=0$ bis $u=H$, $f(H \pm vi)$ und $f(\pm vi)$ ebenso von $v=0$ bis $v=H'$.

Die obigen Beziehungen führen unmittelbar zu der gesuchten Erweiterung der Fourier'schen Reihenformeln; sehen wir nämlich eine Entwickelung von der Form

$$f(u) = \tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{\pi u}{H} + a_2\cos\frac{2\pi u}{H} + a_3\cos\frac{3\pi u}{H} + \ldots\ldots$$

$$a_n = \frac{2}{H}\int_0^H f(u)\cos\frac{n\pi u}{H}\,du$$

als schon bekannt an, so würde eine Entwickelung von $f(u+H'i)$ nur auf die Weise vorgenommen werden können, dass man die Zerlegung

$$f(u+H'i) = \varphi(u, H') + i\psi(u, H')$$

bewerkstelligte, dann etwa

$$\varphi(u, H') = \tfrac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi u}{H} + A_2\cos\frac{2\pi u}{H} + A_3\cos\frac{3\pi u}{H} + \ldots.$$

$$\psi(u, H') = \qquad B_1\sin\frac{\pi u}{H} + B_2\sin\frac{2\pi u}{H} + B_3\sin\frac{3\pi u}{H} + \ldots.$$

setzte, die Coefficienten A_n und B_n nach den Formeln

$$A_n = \frac{2}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du, \qquad B_n = \frac{2}{H}\int_0^H \psi(u,H')\sin\frac{n\pi u}{H}\,du$$

bestimmte und schliesslich erhielte

$$f(u+H'i) = \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi u}{H} + A_2\cos\frac{2\pi u}{H} + A_3\cos\frac{3\pi u}{H} + \dots$$
$$+ i\left[B_1\sin\frac{\pi u}{H} + B_2\sin\frac{2\pi u}{H} + B_3\sin\frac{3\pi u}{H} + \dots\right]$$

Substituirt man aber die aus 23) und 24) folgenden Werthe

$$A_n = a_n \operatorname{cs hp}\frac{n\pi H'}{H}, \qquad B_n = -\,a_n \operatorname{sn hp}\frac{n\pi H'}{H},$$

und zieht die gleichstelligen Glieder zusammen, so ergiebt sich augenblicklich

$$f(u+H'i) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{\pi(u+H'i)}{H} + a_2\cos\frac{2\pi(u+H'i)}{H} + \dots$$

d. h. in Worten:

Die von $z=0$ bis $z=H$ geltende reelle Entwickelung

$$f(z) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{\pi z}{H} + a_2\cos\frac{2\pi z}{H} + a_3\cos\frac{3\pi z}{H} + \dots$$

behält ihre Gültigkeit auch für complexe $z=u+H'i$, wenn erstens u auf dasselbe Intervall wie vorhin z beschränkt wird, wenn ferner $f(u\pm H'i)$ und $f(u)$ von $u=0$ bis $u=H$, ebenso $f(H\pm vi)$ und $f(vi)$ von $v=0$ bis $v=H'$ stetig bleiben, und wenn endlich die Funktionen

$$\psi(H,v) = \frac{f(H+vi)-f(H-vi)}{2i} \text{ und } \psi(0,v) = \frac{f(vi)-f(-vi)}{2i}$$

für jedes zwischen 0 und H' liegende v verschwinden.

Gehen wir ferner von der nachstehenden Gleichung aus

$$f(u) = b_1\sin\frac{\pi u}{H} + b_2\sin\frac{2\pi u}{H} + b_3\sin\frac{3\pi u}{H} + \dots$$

$$b_n = \frac{2}{H}\int_0^H f(u)\sin\frac{n\pi u}{H}\,du$$

und entwickeln $f(u+H'i)$ auf die Weise, dass wir

$$\varphi(u,H') = \qquad C_1\sin\frac{\pi u}{H} + C_2\sin\frac{2\pi u}{H} + C_3\sin\frac{3\pi u}{H} + \dots$$
$$\psi(u,H') = \frac{1}{2}D_0 + D_1\cos\frac{\pi u}{H} + D_2\cos\frac{2\pi u}{H} + D_3\cos\frac{3\pi u}{H} + \dots$$

setzen, so bestimmen sich C_n und D_n mittelst der Formeln

$$C_n = \frac{2}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\sin\frac{n\pi u}{H}\,du, \qquad D_n = \frac{2}{H}\int_0^H \psi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du$$

und es ist dann

$$f(u+H'i) = \qquad + C_1\sin\frac{\pi u}{H} + C_2\sin\frac{2\pi u}{H} + C_3\sin\frac{3\pi u}{H} + \dots$$
$$+ i\left[\frac{1}{2}D_0 + D_1\cos\frac{\pi u}{H} + D_2\cos\frac{2\pi u}{H} + D_3\cos\frac{3\pi u}{H} + \dots\right].$$

Die Formeln 26) und 25) geben nun

$$C_n = b_n \operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}, \qquad D_n = b_n \operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}$$

und man erhält mit ihrer Hülfe

$$f(u+H'i) = b_1\sin\frac{\pi(u+H'i)}{H} + b_2\sin\frac{2\pi(u+H'i)}{H} + \dots.$$

d. h.

Die für $H > z > 0$ geltende reelle Entwickelung

$$f(z) = b_1\sin\frac{\pi z}{H} + b_2\sin\frac{2\pi z}{H} + b_3\sin\frac{3\pi z}{H} + \dots..$$

behält ihre Gültigkeit auch für complexe $z = u + H'i$, wenn erstens u auf dasselbe Intervall wie vorhin z beschränkt wird, wenn ferner $f(u \pm H'i)$ und $f(u)$ von $u=0$ bis $u=H$, ebenso $f(H\pm vi)$ und $f(\pm vi)$ von $v=0$ bis $v=H'$ stetig bleiben, und wenn endlich die Funktionen

$$\varphi(H,v) = \frac{f(H+vi)+f(H-vi)}{2} \text{ und } \varphi(0,v) = \frac{f(vi)+f(-vi)}{2}$$

für jedes zwischen 0 und H' liegende v verschwinden.

Mittelst dieses und des vorhergehenden Satzes kann man unter Umständen aus der Entwickelung einer reellen Funktion die einer complexen Funktion ableiten, ebenso leicht ist aber auch die Umkehrung dieser Operation. Man braucht in der That die Formeln 23) bis 26) nur in der umgekehrten Gestalt darzustellen, um sich hiervon zu überzeugen; wäre z. B. eine Gleichung von der Form

$$\varphi(u,H') = \frac{f(u+H'i)+f(u-H'i)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}A_0 + A_1\cos\frac{\pi u}{H} + A_2\cos\frac{2\pi u}{H} + A_3\cos\frac{3\pi u}{H} + \dots..$$

bekannt, so hat man bereits den Werth von

$$A_n = \frac{2}{H}\int_0^H \varphi(u,H')\cos\frac{n\pi u}{H}\,du$$

und die Formel 23) giebt

$$\frac{2}{H}\int_0^H f(u)\cos\frac{n\pi u}{H}\,du = \frac{A_n}{\operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}}$$

d. h. den Werth des Coefficienten a_n in der Entwickelung

$$f(u) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{\pi u}{H} + a_2\cos\frac{2\pi u}{H} + a_3\cos\frac{3\pi u}{H} + \ldots.$$

Da dieser Gebrauch der Formeln 23) bis 26) für die Entwickelung der elliptischen Funktionen von Werth ist, so stellen wir die genannten Formeln in der neuen Gestalt zusammen:

Wenn die Funktionen

$$\frac{f(H+vi)-f(H-vi)}{2i} \text{ und } \frac{f(vi)-f(-vi)}{2i}$$

für alle zwischen 0 und H' liegende v verschwinden, so ist

$$27)\quad \int_0^H f(u)\cos\frac{n\pi u}{H}\,du = \frac{1}{\operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}}\int_0^H \frac{f(u+H'i)+f(u-H'i)}{2}\cos\frac{n\pi u}{H}\,du$$

und auch

$$28)\quad \int_0^H f(u)\cos\frac{n\pi u}{H}\,du = -\frac{1}{\operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}}\int_0^H \frac{f(u+H'i)-f(u-H'i)}{2i}\sin\frac{n\pi u}{H}\,du;$$

wenn dagegen die Funktionen

$$\frac{f(H+vi)+f(H-vi)}{2} \text{ und } \frac{f(vi)+f(-vi)}{2}$$

für alle zwischen 0 und H' liegende v verschwinden, so ist

$$29)\quad \int_0^H f(u)\sin\frac{n\pi u}{H}\,du = \frac{1}{\operatorname{snhp}\frac{n\pi H'}{H}}\int_0^H \frac{f(u+H'i)-f(u-H'i)}{2i}\cos\frac{n\pi u}{H}\,du$$

und auch

$$30)\quad \int_0^H f(u)\sin\frac{n\pi u}{H}\,du = \frac{1}{\operatorname{cshp}\frac{n\pi H'}{H}}\int_0^H \frac{f(u+H'i)+f(u-H'i)}{2}\sin\frac{n\pi u}{H}\,du;$$

Bedingung für alle vier Formeln ist endlich noch, dass einerseits $f(u\pm H'i)$ und $f(u)$ von $u=0$ bis $u=H$, andererseits $f(H\pm vi)$ und $f(vi)$ von $v=0$ bis $v=H'$ keine Unterbrechung der Continuität erleiden.

[illegible]

... und folglich zu schrei-

[illegible]

... werden. wo m eine be-

... $=0$ die obige Gleichung

in $\operatorname{am} K = \frac{1}{2}\pi$ übergehen muss, so ist m nothwendig $= 1$ und man findet so

$$f(K+vi) = -\left[\frac{1}{2}\, l\left(\frac{1-\varkappa' \operatorname{sn}\operatorname{am}(v,\varkappa')}{1+\varkappa' \operatorname{sn}\operatorname{am}(v,\varkappa')}\right) + \frac{\pi v}{2K}\right] i.$$

Endlich geben die Gleichungen 17)

$$i \operatorname{tg}\operatorname{am}(u+K'i) = -\frac{1}{\varDelta \operatorname{am} u}$$

$$\operatorname{am}(u+K'i) = \frac{l(-1)}{2i} + \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{1-\varDelta \operatorname{am} u}{1+\varDelta \operatorname{am} u}\right)$$

und hier kann man den Werth von $\frac{l(-1)}{2i}$ entweder durch die Spezialisirung $\varkappa = 1$ oder kürzer dadurch bestimmen, dass man $u = K$ nimmt und den so entstehenden Werth von $\operatorname{am}(K+K'i)$ mit jenem vergleicht, der aus $\operatorname{am}(K+vi)$ für $v = K'$ folgt; letzterer ist (wegen $m = 1$)

$$\operatorname{am}(K+K'i) = \frac{1}{2}\pi + \frac{1}{2i}\, l\left(\frac{1-\varkappa'}{1+\varkappa'}\right),$$

daher auch im vorliegenden Falle $\frac{l(-1)}{2i} = \frac{1}{2}\pi$ und

$$f(u+K'i) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{u}{K}\right) - \left[\frac{1}{2}\, l\left(\frac{1-\varDelta \operatorname{am} u}{1+\varDelta \operatorname{am} u}\right) + \frac{\pi K'}{2K}\right] i.$$

Die für $f(u)$, $f(vi)$, $f(K+vi)$ und $f(u+K'i)$ angegebenen Werthe erfüllen in der That die Bedingungen, welche das Bestehen der Gleichungen 29) und 30) erfordert, zugleich ersieht man, dass die Formel 30) zur Kenntniss von b_n führen muss, weil der Ausdruck

$$\frac{f(u+K'i) + f(u-K'i)}{2},$$

d. h. der reelle Bestandtheil von $f(u+K'i)$ im vorliegenden Falle algebraischer Natur ist. Man hat nun

$$b_n = \frac{2}{K}\, \frac{1}{\operatorname{cshp}\frac{n\pi K'}{K}} \int_0^K \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{u}{K}\right) \sin\frac{n\pi u}{K}\, du = \frac{1}{\operatorname{cshp}\frac{n\pi K'}{K}}\, \frac{1}{n}$$

oder auch, wenn die Jacobi'sche Bezeichnung

$$e^{-\frac{\pi K'}{K}} = q$$

angewendet wird

$$b_n = \frac{2}{n}\, \frac{q^n}{1+q^{2n}},$$

vermöge dieser Bestimmung von b_n haben wir die für $K \geqq u \geqq 0$ geltende Entwickelung

$$\text{31)} \quad \operatorname{am} u - \frac{\pi u}{2K} = 2\left\{\frac{1}{1}\, \frac{q}{1+q^2} \sin\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\, \frac{q^2}{1+q^4} \sin\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

welche sich vermöge der Gleichung $\operatorname{am}(-u) = -\operatorname{am}(u)$ auf die Grenzen $u = -K$ bis $u = K$ ausdehnen lässt.

Gelegentlich ergiebt sich hier noch eine zweite Entwickelung. Die Formel 29) führt nämlich zu der Gleichung

$$b_n = \frac{2}{K}\,\frac{1}{\operatorname{sn}\operatorname{hp}\frac{n\pi K'}{K}}\int_0^K\left[\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\varDelta\operatorname{am}u}{1-\varDelta\operatorname{am}u}\right)-\frac{\pi K'}{2K}\right]\cos\frac{n\pi u}{K}\,du$$

die man jetzt, wo b_n bekannt ist, zur Ermittelung des Werthes des rechter Hand befindlichen Integrales benutzen kann; man hat nämlich

$$\frac{2}{K}\int_0^K\left[\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\varDelta\operatorname{am}u}{1-\varDelta\operatorname{am}u}\right)-\frac{\pi K'}{2K}\right]\cos\frac{n\pi u}{K}\,du=\frac{1}{n}\operatorname{tg}\operatorname{hp}\frac{n\pi K'}{K}$$

der Ausdruck zur Linken ist nichts Anderes als der Werth von a_n in der Entwickelung

$$\frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\varDelta\operatorname{am}u}{1-\varDelta\operatorname{am}u}\right)-\frac{\pi K'}{2K}$$
$$=\tfrac{1}{2}a_0+a_1\cos\frac{\pi u}{K}+a_2\cos\frac{2\pi u}{K}+a_3\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots.$$

und man hat daher wegen

$$a_n=\frac{1}{n}\operatorname{tg}\operatorname{hp}\frac{n\pi K'}{K}=\frac{1}{n}\,\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}},$$
$$\tfrac{1}{2}a_0=\frac{\pi K'}{2K}=-\tfrac{1}{2}lq$$

die folgende für $K\geqq u\geqq 0$ geltende Gleichung

$$32)\quad \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1+\varDelta\operatorname{am}u}{1-\varDelta\operatorname{am}u}\right)=l\left(\frac{1}{q}\right)+\frac{1}{1}\,\frac{1-q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{2}\,\frac{1-q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\ldots$$

dieselbe ist übrigens leicht auf beliebige reelle u auszudehnen, indem man bemerkt, dass beide Seiten der Gleichung, unabhängig von einander betrachtet, periodische Funktionen von u sind, welche die Eigenschaft

$$f(2K\mp u)=f(4K\mp u)=f(6K\mp u)\ldots=f(u)=f(-u)$$

gemeinschaftlich besitzen.

Durch Anwendung der identischen Gleichung

$$\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}=1-\frac{2q^{2n}}{1+q^{2n}}$$

zerfällt die obige Reihe in zwei Theile, deren erster mittelst der Formel

$$\tfrac{1}{1}\cos z+\tfrac{1}{2}\cos 2z+\tfrac{1}{3}\cos 3z+\ldots=-l2-\tfrac{1}{2}l\sin^2\tfrac{1}{2}z$$

summirbar ist; die Gleichung 32) nimmt dann die folgende Form an

$$33)\quad \frac{1}{2}\,l\left(\frac{1-\varDelta\operatorname{am}u}{1+\varDelta\operatorname{am}u}\right)=\frac{1}{2}\,l\left(2q\sin\frac{\pi u}{2K}\right)^2+2\left\{\frac{1}{1}\,\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{2}\,\frac{q^4}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K}+\ldots\right\}$$

aus welcher noch ein weiteres Resultat dadurch abgeleitet werden kann, dass man $K-u$ an die Stelle von u treten lässt.

B. Wir versuchen zweitens die Entwickelung von $f(u) = l\Delta \operatorname{am} u$, indem wir für $K \geqq u \geqq 0$

$$l\Delta \operatorname{am} u = \frac{1}{2} a_0 + a_1 \cos \frac{\pi u}{K} + a_2 \cos \frac{2\pi u}{K} + a_3 \cos \frac{3\pi u}{K} + \ldots.$$

$$a_n = \frac{2}{K}\int_0^K l\Delta \operatorname{am} u \cos \frac{n\pi u}{K}\, du = \frac{2}{K}\int_0^K f(u) \cos \frac{n\pi u}{K}\, du$$

setzen und a_n mittelst einer der Formeln 27) oder 28) bestimmen. Die Anwendbarkeit der letzteren ist hier darin begründet, dass die Funktionen

$$f(vi) = l\left(\frac{\Delta \operatorname{am}(v, \varkappa')}{\operatorname{cs} \operatorname{am}(v, \varkappa')}\right), \quad f(K + vi) = l\left(\frac{\varkappa' \operatorname{cs} \operatorname{am}(v, \varkappa')}{\Delta \operatorname{am}(v, \varkappa')}\right),$$

$$f(u + K'i) = l \operatorname{ct} \operatorname{am} u - \frac{1}{2} l(-1)$$

den bei den Formeln 27) und 28) angegebenen Bedingungen genügen; zugleich hat man

$$\frac{f(u + K'i) - f(u - K'i)}{2i} = -\frac{1}{2}\frac{l(-1)}{i} = -\frac{1}{2}\mu\pi$$

wo μ eine beliebige positive oder negative ungerade Zahl bezeichnet, und es liegt daher die Anwendung von Formel 28) am nächsten; sie giebt

$$a_n = \frac{\mu}{K} \cdot \frac{\pi}{\operatorname{sn} \operatorname{hp} \frac{n\pi K'}{K}} \int_0^K \sin \frac{n\pi u}{K}\, du = \frac{\mu}{n} \frac{1 - \cos n\pi}{\operatorname{sn} \operatorname{hp} \frac{n\pi K'}{K}}$$

oder durch Einführung von q

$$a_n = \frac{\mu(1 - \cos n\pi)}{n} \frac{2q^n}{1 - q^{2n}}$$

Geben wir μ in den verschiedenen Gliedern verschiedene Werthe und lassen den Coefficienten a_0, der sich hier nicht direkt findet, vor der Hand noch unbestimmt, so ist die Entwickelung folgende

$$l\Delta \operatorname{am} u = \frac{1}{2} a_0 + 2\left\{\frac{\mu_1}{1} \frac{2q}{1 - q^2} \cos \frac{\pi u}{K} + \frac{\mu_3}{3} \frac{2q^3}{1 - q^6} \cos \frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

Um zunächst die ungeraden Zahlen μ_1; μ_3, μ_5, ... zu bestimmen, differenziren wir beiderseits in Beziehung auf u, setzen in der neuen Gleichung

$$\frac{\varkappa^2 \operatorname{sn} \operatorname{am} u \operatorname{cs} \operatorname{am} u}{\Delta \operatorname{am} u} = \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{2\mu_1 q}{1 - q^2} \sin \frac{\pi u}{K} + \frac{2\mu_3 q^3}{1 - q^6} \sin \frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

$u = \frac{Kz}{\pi}$ und für den Augenblick $\frac{K'\pi}{K} = \varrho$, multipliziren endlich mit $\frac{1}{2} K'$ und erhalten so

$$\frac{K' \varkappa^2 \operatorname{sn} \operatorname{am} \frac{Kz}{\pi} \operatorname{cs} \operatorname{am} \frac{Kz}{\pi}}{2 \Delta \operatorname{am} \frac{Kz}{\pi}} = \frac{2\varrho\mu_1}{e^{\varrho} - e^{-\varrho}} \sin z + \frac{2\varrho\mu_3}{e^{3\varrho} - e^{-3\varrho}} \sin 3z + \ldots..$$

für $\varkappa' = 1$ also $K = \infty$, $K' = \frac{1}{2}\pi$, $\varrho = 0$, $\operatorname{am}(\infty, 1) = \frac{1}{2}\pi$ wird diese Gleichung zur folgenden

$$\frac{\pi}{4} = \frac{\mu_1}{1}\sin z + \frac{\mu_3}{3}\sin 3z + \frac{\mu_5}{5}\sin 5z + \ldots..$$

woraus unmittelbar hervorgeht, dass $\mu_1 = \mu_3 = \mu_5 \ldots = 1$ sein muss. Um zweitens den Coefficienten a_0 in der nunmehrigen Gleichung

$$l\Delta\,\mathrm{am}\,u = \tfrac{1}{2}a_0 + 4\left\{\frac{1}{1}\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots.\right\}$$

zu bestimmen, bedarf es nur der Formel

$$\Delta\,\mathrm{am}\,u\,\Delta\,\mathrm{am}\,(K-u) = \varkappa' \text{ oder } l\Delta\,\mathrm{am}\,u + l\Delta\,\mathrm{am}\,(K-u) = l\varkappa';$$

man findet augenblicklich $a_0 = l\varkappa'$ mithin

$$34)\quad l\Delta\,\mathrm{am}\,u = \tfrac{1}{2}l\varkappa' + 4\left\{\frac{1}{1}\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

Wendet man die Formel 27) auf den vorliegenden Fall an, so ist

$$a_n = \frac{2}{K}\frac{1}{\mathrm{cs\,hp}\frac{n\pi K'}{K}}\int_0^K l\,\mathrm{ct\,am}\,u\cos\frac{n\pi u}{K}\,du$$

oder umgekehrt und vermöge des Werthes von a_n

$$\frac{2}{K}\int_0^K l\,\mathrm{ct\,am}\,u\cos\frac{n\pi u}{K}\,du = \frac{1-\cos n\pi}{n}\,\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}};$$

der Ausdruck linker Hand bedeutet den Coefficienten von $\cos\frac{n\pi u}{K}$, wenn $l\,\mathrm{ct\,am}\,u$ in die Cosinusreihe umgesetzt wird, und man hat daher

$$l\,\mathrm{ct\,am}\,u = \tfrac{1}{2}l\varkappa' + 2\left\{\frac{1}{1}\frac{1+q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{1+q^6}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots.\right\}$$

Zerlegt man rechter Hand jedes einzelne Glied in zwei Theile, so führt die Anwendung der Formel

$$\tfrac{1}{1}\cos z + \tfrac{1}{3}\cos 3z + \tfrac{1}{5}\cos 5z + = \tfrac{1}{4}\,l\cot^2\tfrac{1}{2}z$$

leicht zur folgenden Entwickelung

$$35)\quad l\,\mathrm{tg\,am}\,u = l\left(\frac{1}{\sqrt{\varkappa'}}\tan\frac{\pi u}{2K}\right) - 4\left\{\frac{1}{1}\frac{q^2}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{q^6}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

Mittelst der reellen Periodicität der elliptischen Funktionen überzeugt man sich, wie vorhin, leicht von der Allgemeingültigkeit der Formeln 34) und 35).

C. Um zu einer Reihe für $l\,\mathrm{sn\,am}\,u$ zu gelangen, setzen wir

$$f(u) = l\left(\frac{\mathrm{sn\,am}\,u}{\sin\frac{\pi u}{2K}}\right) = l\,\mathrm{sn\,am}\,u - l\sin\frac{\pi u}{2K}$$

und suchen diese Funktion in eine Reihe von der Form

$$\tfrac{1}{2}a_0 + a_1\cos\frac{\pi u}{K} + a_2\cos\frac{2\pi u}{K} + a_3\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots.$$

zu verwandeln. Die Formeln 15) und 16) geben

$$f(vi) = l\,\mathrm{tg\,am}\,(v, \varkappa') - l\,\mathrm{sn\,hp}\,\frac{\pi v}{2K}$$

$$f(K+vi) = -\,l\,\Delta\,\mathrm{am}\,(v, \varkappa') - l\,\mathrm{cs\,hp}\,\frac{\pi v}{2K}$$

ferner erhält man aus den Gleichungen 17) unter Anwendung der Formel

$$l(\alpha+\beta i) = \tfrac{1}{2}\,l(\alpha^2+\beta^2) + (\mathrm{Arctan}\,\tfrac{\beta}{\alpha} + \mu\pi)\,i$$

und unter Berücksichtigung der Gleichungen

$$\mathrm{cs\,hp}\,\frac{\pi K'}{2K} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{q}} + \sqrt{q}\right), \qquad \mathrm{sn\,hp}\,\frac{\pi K'}{2K} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{q}} - \sqrt{q}\right)$$

leicht den Werth

$$f(u+K'i) = l\left(\frac{1}{\varkappa\,\mathrm{sn\,am}\,u}\right) - \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}{4q}\right)$$
$$- i\left[\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-q}{1+q}\cot\frac{\pi u}{2K}\right) + \mu\pi.\right]$$

Man erkennt aus diesen für $f(vi)$, $f(K+vi)$ und $f(u+K'i)$ gefundenen Ausdrücken die Anwendbarkeit der Formeln 27) und 28); namentlich giebt die letztere

$$a_n = \frac{2}{K}\,\frac{1}{\mathrm{sn\,hp}\,\frac{n\pi K'}{K}}\int_0^K\left\{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-q}{1+q}\cot\frac{\pi u}{2K}\right) + \mu\pi\right\}\sin\frac{n\pi u}{K}\,du$$

oder durch Einführung einer neuen Variabelen $w = \frac{\pi u}{K}$, und wenn man den hyperbolischen Sinus durch q ausdrückt

$$a_n = \frac{2}{\pi}\,\frac{2q^n}{1-q^{2n}}\int_0^\pi\left\{\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-q}{1+q}\cot\frac{w}{2}\right) + \mu\pi\right\}\sin nw\,dw$$

Die vorstehende Integration ist mittelst der bekannten Formel

$$\mathrm{Arctan}\left(\frac{1-q}{1+q}\cot\frac{w}{2}\right) = \frac{1-q}{1}\sin w + \frac{1-q^2}{2}\sin 2w + \frac{1-q^3}{3}\sin 3w + \ldots$$

sehr leicht ausführbar und liefert

$$a_n = \frac{2q^n}{1-q^{2n}}\left\{\frac{1-q^n}{n} + 2\mu\,\frac{1-\cos n\pi}{n}\right\}$$
$$= \frac{2}{n}\,\frac{q^n}{1+q^n} \qquad \text{für gerade } n,$$
$$= \frac{2}{n}\,\frac{q^n}{1+q^n} + \frac{8\mu}{n}\,\frac{q^n}{1-q^{2n}} \qquad \text{für ungerade } n.$$

Die gesuchte Entwickelung ist daher bis jetzt folgende

$$l\,\mathrm{sn\,am}\,u - l\,\sin\frac{\pi u}{2K}$$
$$= \tfrac{1}{2}a_0 + 2\left\{\frac{1}{1}\,\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\,\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{1}{3}\,\frac{q^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$
$$+ 8\left\{\frac{\mu_1}{1}\,\frac{q}{1-q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{\mu_3}{3}\,\frac{q^3}{1-q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \frac{\mu_5}{5}\,\frac{q^5}{1-q^{10}}\cos\frac{5\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

Um die ganzen Zahlen μ_1, μ_3, μ_5, ... zu bestimmen, differenziren wir die vorstehende Gleichung, nehmen in dem Resultate

$$- \operatorname{ctam} u \, \Delta \operatorname{am} u + \frac{\pi}{2K}\cot\frac{\pi u}{2K}$$
$$= \frac{\pi}{K}\left\{\frac{2q}{1+q}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2q^2}{1+q^2}\sin\frac{2\pi u}{K} + \frac{2q^3}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{K}+\dots\right\}$$
$$+\frac{4\pi}{K}\left\{\frac{2\mu_1 q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{2\mu_3 q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \frac{2\mu_5 q^5}{1-q^{10}}\sin\frac{5\pi u}{K}+\dots\right\}$$

$\frac{\pi u}{K}=z$ und multipliziren beiderseits mit K', indem wir gleichzeitig $\frac{K'\pi}{K}=\varrho$, also $q=e^{-\varrho}$ setzen; es ist dann

$$- K' \operatorname{ctam}\frac{Kz}{\pi} + \tfrac{1}{2}\varrho\cot\frac{z}{2}$$
$$= \frac{2\varrho}{e^{\varrho}+1}\sin z + \frac{2\varrho}{e^{2\varrho}+1}\sin 2z + \frac{2\varrho}{e^{3\varrho}+1}\sin 3z + \dots$$
$$+ 4\left\{\frac{2\mu_1\varrho}{e^{\varrho}-e^{-\varrho}}\sin z + \frac{2\mu_3\varrho}{e^{3\varrho}-e^{-3\varrho}}\sin 3z + \frac{2\mu_5\varrho}{e^{5\varrho}-e^{-5\varrho}}\sin 5z+\dots\right\}$$

für $\varkappa=1, K=\infty, K'=\frac{1}{2}\pi, \varrho=0$, $\operatorname{am}(\infty, 1)=\frac{1}{2}\pi$ wird die vorstehende Gleichung zur folgenden

$$0 = \frac{\mu_1}{1}\sin z + \frac{\mu_3}{3}\sin 3z + \frac{\mu_5}{5}\sin 5z + \dots$$

und man erkennt aus ihr, dass $\mu_1=\mu_3=\mu_5$ etc. $=0$ sein müssen. In der nunmehrigen Entwickelung

$$l\operatorname{sn am} u - l\sin\frac{\pi u}{2K}$$
$$= \tfrac{1}{2}a_0 + 2\left\{\frac{1}{1}\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \frac{1}{3}\frac{q^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{K}+\dots\right\}$$

kommt es jetzt noch auf die Bestimmung von

$$\tfrac{1}{2}a_0 = \frac{1}{K}\int_0^K\left(l\operatorname{sn am} u - l\sin\frac{\pi u}{2K}\right)du$$

an. Man gelangt hierzu mittelst der Formel 27), welche für $n=0$, $f(u) = l\operatorname{sn am} u - l\sin\frac{\pi u}{2K}$ die folgende Beziehung liefert

$$\int_0^K\left(l\operatorname{sn am} u - l\sin\frac{\pi u}{2K}\right)du$$
$$=\int_0^K\left[l\left(\frac{1}{\varkappa\operatorname{sn am} u}\right) - \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2}{4q}\right)\right]du;$$

integrirt man die einzelnen Bestandtheile und vereinigt die beiden Integrale, in denen $l\operatorname{sn am} u$ vorkommt, so ist zunächst

$$2\int_0^K l\,\mathrm{sn\,am}\,u\,du = K\left[l\left(\frac{1}{\varkappa}\right) - \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1}{4q}\right)\right] + \int_0^K l\sin\frac{\pi u}{2K}\,du$$
$$-\tfrac{1}{2}\int_0^K l(1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2)\,du.$$

Die Werthe der rechter Hand verzeichneten Integrale findet man leicht dadurch, dass man erst die Substitution $\frac{\pi u}{K} = w$ und nachher die von $w = 0$ bis $w = \pi$ geltenden Formeln

$$l\sin\tfrac{1}{2}w = -l2 - \tfrac{1}{1}\cos w - \tfrac{1}{2}\cos 2w - \tfrac{1}{3}\cos 3w - \ldots.$$
$$\tfrac{1}{2}l(1-2q\cos w+q^2) = -\tfrac{1}{1}q\cos w - \tfrac{1}{2}q^2\cos 2w - \tfrac{1}{3}q^3\cos 3w - \ldots$$

in Anwendung bringt; man erhält

$$\int_0^K l\sin\frac{\pi u}{2K}\,du = \frac{K}{\pi}\int_0^\pi l\sin\tfrac{1}{2}w\,dw = -Kl2$$
$$\tfrac{1}{2}\int_0^K l(1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+q^2)\,du = \frac{K}{\pi}\int_0^\pi \tfrac{1}{2}l(1-2q\cos w+q^2)\,dw = 0$$

es bleibt daher

$$2\int_0^K l\,\mathrm{sn\,am}\,u\,du = K\left[l\left(\frac{1}{\varkappa}\right) - \tfrac{1}{2}l\left(\frac{1}{4q}\right)\right] - Kl2$$

oder

$$\int_0^K l\,\mathrm{sn\,am}\,u\,du = \tfrac{1}{2}K\,l\left(\frac{\sqrt{q}}{\varkappa}\right).$$

Mittelst der hier entwickelten Integralwerthe findet sich

$$\tfrac{1}{2}a_0 = l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}}\right)$$

und man gelangt so zu der Formel

$$36)\quad l\,\mathrm{sn\,am}\,u = l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}}\sin\frac{\pi u}{2K}\right) + 2\left\{\frac{1}{1}\frac{q}{1+q}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

deren Gültigkeit ursprünglich auf das Intervall 0 bis K beschränkt, aber leicht auf jedes reelle u auszudehnen ist.

Um eine Reihe für $l\,\mathrm{cs\,am}\,u$ zu erhalten, kann man entweder von der Formel

$$l\,\mathrm{cs\,am}\,u = l\,\mathrm{sn\,am}(K-u) + l\Delta\,\mathrm{am}\,u$$

ausgehen oder kürzer die Gleichung 35) von der obigen subtrahiren; das Resultat ist in beiden Fällen:

$$37)\quad l\,\mathrm{cs\,am}\,u = l\left(\frac{2\sqrt{\varkappa'}\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varkappa}}\cos\frac{\pi u}{2K}\right)$$
$$+\,2\left\{\frac{1}{1}\frac{q}{1-q}\cos\frac{\pi u}{K}+\frac{1}{2}\frac{q^2}{1+q^2}\cos\frac{2\pi u}{K}+\frac{1}{3}\frac{q^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{K}+\dots\right\}$$

und zwar sind die rechter Hand vorkommenden Nenner von den Formen $1+q^n$ und $1-q^n$ jenachdem n gerade oder ungerade ist.

D. Nach den bisherigen Entwickelungen liegt der Gedanke nahe, für $\mathrm{sn\,am}\,u$ und $\mathrm{cs\,am}\,u$ selber, statt für ihre Logarithmen, Reihen aufzusuchen und dabei wiederum die Formeln 27) bis 30) zu benutzen; dies ist in der That möglich, nur muss man dafür sorgen, dass die für $f(u)$ substituirten Funktionen den zur Gültigkeit der Gleichungen 27) bis 30) nothwendigen Bedingungen genügen, was bei den Funktionen $\mathrm{sn\,am}\,u$ und $\mathrm{cs\,am}\,u$ nicht, wohl aber bei ihren Integralen

$$\int \mathrm{sn\,am}\,u\,du = l(\Delta\,\mathrm{am}\,u + \varkappa\,\mathrm{cs\,am}\,u)$$
$$\int \mathrm{cs\,am}\,u\,du = \frac{1}{\varkappa}\,\mathrm{Arcsin}\,(\varkappa\,\mathrm{sn\,am}\,u)$$

der Fall ist, wenn man $H=2K$ und $H'=K'$ setzt. Diese Werthe von H und H' erfordern aber die Kenntniss der Werthe von $\mathrm{sn\,am}(2K+vi)$ und $\mathrm{cs\,am}(2K+vi)$, und da sich diese bei dem von uns eingeschlagenen Gedankengange nicht von selbst ergeben haben, so gehen wir einen andern Weg, der überdies noch rascher zum Ziele führt.

Ersetzt man die Variabele φ in der Gleichung

$$F(\varkappa,\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}}$$

durch eine neue Veränderliche ψ, welche von jener mittelst der Landen'schen Gleichung

$$\varphi = \mathrm{Arctan}\,\frac{\sin 2\psi}{\varkappa+\cos 2\psi}$$

oder

$$\tan\varphi = \frac{\sin 2\psi}{\varkappa+\cos 2\psi},\qquad \sin(2\psi-\varphi) = \varkappa\sin\varphi$$

abhängig ist, so ergiebt sich bekanntlich

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{1+\varkappa}\int_0^\psi \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2}\sin^2\psi}}$$

oder nach der Legendre'schen Bezeichnung

$$F(\varkappa, \varphi) = \frac{2}{1+\varkappa} F\left(\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}, \psi\right).$$

Ist im speziellen Falle $\varphi = \pi$ mithin $F(\varkappa, \pi) = 2F(\varkappa, \frac{1}{2}\pi)$, so wird $\psi = \frac{1}{2}\pi$ und

$$F\left(\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}, \frac{\pi}{2}\right) = (1+\varkappa) F\left(\varkappa, \frac{\pi}{2}\right).$$

Für $\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa} = \sqrt{1-\lambda^2}$ folgt daraus

$$F\left(\sqrt{1-\lambda^2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{1+\lambda} F\left(\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\lambda}}{1+\lambda}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

oder wenn man wieder $\varkappa$ für λ und die Gleichung in umgekehrter Ordnung schreibt:

$$F\left(\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)^2}, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1+\varkappa}{2} F\left(\varkappa', \frac{\pi}{2}\right);$$

die beiden Gleichungen enthalten zusammen den Jacobi'schen Satz: wenn $\varkappa$ durch $\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$, mithin $\varkappa'$ durch $\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ ersetzt wird, geht K in $(1+\varkappa)K$, K' in $\frac{1+\varkappa}{2}K'$ und folglich q in $\sqrt{q}$ über. — Nehmen wir wieder den Fall eines beliebigen φ vor, so ist vermöge der für $\tan\varphi$ angegebenen Gleichung

$$\cos\varphi = \frac{1}{1+\varkappa} \frac{1+\varkappa - 2\sin^2\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)^2 \sin^2\psi}}, \quad \sin\varphi = \frac{2}{1+\varkappa} \frac{\sin\psi\cos\psi}{\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)^2 \sin^2\psi}}$$

und es lassen sich diese Formeln leicht in die Jacobi'sche Bezeichnungsweise übertragen, wenn man statt der Gleichung

$$F\left(\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}, \psi\right) = \frac{1+\varkappa}{2} F(\varkappa, \varphi)$$

einfach $v = \frac{1+\varkappa}{2} u$ schreibt, woraus

$$\varphi = \operatorname{am}(u, \varkappa) \text{ und } \psi = \operatorname{am}\left(v, \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right) = \operatorname{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u, \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)$$

folgt; die obigen Gleichungen lauten jetzt

$$38)\qquad \operatorname{cs am}(u, \varkappa) = \frac{1}{1+\varkappa} \frac{1+\varkappa - 2\operatorname{sn}^2\operatorname{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u, \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u, \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)},$$

$$39)\qquad \operatorname{sn am}(u, \varkappa) = \frac{2}{1+\varkappa} \frac{\operatorname{sn am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u, \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right) \operatorname{cs am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u, \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)}{\Delta\operatorname{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u, \frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)}$$

Mittels dieser Formeln kann man auf folgende Weise zu Reihen für $\Delta\operatorname{am}u$, $\operatorname{cs am}u$, $\operatorname{sn am}u$ gelangen.

Durch Differenziation der Gleichung 31) ergiebt sich wegen $d\,\mathrm{am}\,u = \Delta\mathrm{am}\,u\,du$

40) $\Delta\mathrm{am}\,u = \frac{\pi}{2K} + \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\}$

ferner, wenn man $K-u$ an die Stelle von u treten lässt,

41) $\frac{\varkappa'}{\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{\pi}{2K} - \frac{2\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} - \frac{q^2}{1+q^4}\cos\frac{2\pi u}{K} + \ldots\right\}$

Die Differenz beider Gleichungen ist

$$\frac{1-\varkappa^2\,\mathrm{sn}^2\mathrm{am}\,u - \varkappa'}{\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{4\pi}{K}\left\{\frac{q}{1+q^2}\cos\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1+q^6}\cos\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

setzt man $\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$ für $\varkappa$, also $\frac{1-\varkappa}{1+\varkappa}$ für $\varkappa'$, $(1+\varkappa)K$ für K, $\sqrt{q}$ für q und lässt gleichzeitig $\frac{1+\varkappa}{2}u$ an die Stelle von u treten, so verwandelt sich die linke Seite der obigen Gleichung in

$$\frac{1}{(1+\varkappa)^2}\,\frac{1+\varkappa-2\,\mathrm{sn}^2\mathrm{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u,\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u,\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)} = \frac{2\varkappa}{1+\varkappa}\,\mathrm{cs\,am}\,u$$

und man erhält augenblicklich

42) $\mathrm{cs\,am}\,u = \frac{2\pi}{\varkappa K}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\cos\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q}^3}{1+q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q}^5}{1+q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K} + \ldots\right\}$

ferner, wenn $K-u$ für K eingesetzt wird,

43) $\frac{\mathrm{sn\,am}\,u}{\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{2\pi}{\varkappa\varkappa' K}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1+q}\sin\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q}^3}{1+q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q}^5}{1+q^5}\sin\frac{5\pi u}{2K} - \ldots\right\}$

Aus der für $l\Delta\mathrm{am}\,u$ gefundenen Gleichung 34) ergiebt sich durch Differenziation

$$\frac{\varkappa^2\,\mathrm{sn\,am}\,u\,\mathrm{cs\,am}\,u}{\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{4\pi}{K}\left\{\frac{q}{1-q^2}\sin\frac{\pi u}{K} + \frac{q^3}{1-q^6}\sin\frac{3\pi u}{K} + \ldots\right\}$$

und wenn man hier wiederum $\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}$ für $\varkappa$ und $\frac{1+\varkappa}{2}u$ für u setzt, so wird die linke Seite

$$\frac{4\varkappa}{(1+\varkappa)^2}\,\frac{\mathrm{sn\,am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u,\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)\mathrm{cs\,am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u,\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)}{\Delta\mathrm{am}\left(\frac{1+\varkappa}{2}u,\frac{2\sqrt{\varkappa}}{1+\varkappa}\right)} = \frac{2\varkappa}{1+\varkappa}\,\mathrm{sn\,am}\,u;$$

man gelangt so zu der Formel

44) $\mathrm{sn\,am}\,u = \frac{2\pi}{\varkappa K}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}\sin\frac{\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q}^3}{1-q^3}\sin\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q}^5}{1-q^5}\sin\frac{5\pi u}{2K} + \ldots\right\}$

aus welcher, wenn $K-u$ für u eintritt, noch die folgende Gleichung fliesst

45) $\frac{\mathrm{cs\,am}\,u}{\Delta\mathrm{am}\,u} = \frac{2\pi}{\varkappa K}\left\{\frac{\sqrt{q}}{1-q}\cos\frac{\pi u}{2K} - \frac{\sqrt{q}^3}{1-q^3}\cos\frac{3\pi u}{2K} + \frac{\sqrt{q}^5}{1-q^5}\cos\frac{5\pi u}{2K} - \ldots\right\}$

E. Aus den hier gegebenen Entwickelungen lassen sich die übrigen von Jacobi entdeckten merkwürdigen Formen, unter denen $\mathrm{sn\,am}\,u$,

$\operatorname{cs am} u$ und $\Delta \operatorname{am} u$ dargestellt werden können, unmittelbar ableiten. Geben wir z. B. den Gleichungen 41), 42) und 40) die Formen

$$\frac{\varkappa K}{2\pi}\operatorname{sn am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{q}\left\{\frac{\sin x}{1-q} + \frac{q\sin 3x}{1-q^3} + \frac{q^2\sin 5x}{1-q^5} + \dots\right\}$$

$$\frac{\varkappa K}{2\pi}\operatorname{cs am}\frac{2Kx}{\pi} = \sqrt{q}\left\{\frac{\cos x}{1+q} + \frac{q\cos 3x}{1+q^3} + \frac{q^2\cos 5x}{1+q^5} + \dots\right\}$$

$$\frac{2K}{\pi}\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = 1+4\left\{\frac{q\cos 2x}{1+q^2} + \frac{q^2\cos 4x}{1+q^4} + \frac{q^3\cos 6x}{1+q^6} + \dots\right\}$$

entwickeln rechter Hand Alles nach Potenzen von q und vereinigen dann die Glieder in anderer Ordnung, so gelangen wir zu den Formeln

$$\frac{\varkappa K}{2\pi}\operatorname{sn am}\frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \sin x\left\{\frac{(1+q)\sqrt{q}}{1-2q\cos 2x+q^2} + \frac{(1+q^3)\sqrt{q^3}}{1-2q^3\cos 2x+q^6} + \frac{(1+q^5)\sqrt{q^5}}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}} + \dots\right\}$$

$$\frac{\varkappa K}{2\pi}\operatorname{cs am}\frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \cos x\left\{\frac{(1-q)\sqrt{q}}{1-2q\cos 2x+q^2} - \frac{(1-q^3)\sqrt{q^3}}{1-2q^3\cos 2x+q^6} + \frac{(1-q^5)\sqrt{q^5}}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}} - \dots\right\}$$

$$\frac{K}{4\pi}\left(1-\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$= \sin^2 x\left\{\frac{q\,\frac{1+q}{1-q}}{1-2q\cos 2x+q^2} - \frac{q^3\,\frac{1+q^3}{1-q^3}}{1-2q^3\cos 2x+q^6} + \frac{q^5\,\frac{1+q^5}{1-q^5}}{1-2q^5\cos 2x+q^{10}} - \dots\right\}$$

Geht man von den Gleichungen 36), 37) und 34) aus, so kann man ihnen zunächst die folgenden Formen ertheilen

$$l\operatorname{sn am}\frac{2Kx}{\pi} = l\left(\frac{2\sqrt[4]{q}\sin x}{\sqrt{\varkappa}}\right) + 2\left\{\frac{q\cos 2x}{1(1+q)} + \frac{q^2\cos 4x}{2(1+q^2)} + \dots\right\}$$

$$l\operatorname{cs am}\frac{2Kx}{\pi} = l\left(\frac{2\sqrt{\varkappa'}\,\sqrt[4]{q}\cos x}{\sqrt{\varkappa}}\right) + 2\left\{\frac{q\cos 2x}{1(1-q)} + \frac{q^2\cos 4x}{2(1-q^2)} + \dots\right\}$$

$$l\,\Delta\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = l(\sqrt{\varkappa'}) + 4\left\{\frac{q\cos 2x}{1(1-q^2)} + \frac{q^3\cos 6x}{3(1-q^6)} + \frac{q^5\cos 10x}{5(1-q^{10})} + \dots\right\}$$

darauf Alles nach Potenzen von q entwickeln, die entstehenden Glieder mittelst der Formel

$$\tfrac{1}{2}l(1+2r\cos 2x+r^2) = \tfrac{1}{1}r\cos 2x - \tfrac{1}{2}r^2\cos 4x + \tfrac{1}{3}r^3\cos 6x - \dots$$

zusammenziehen und von den Logarithmen der Funktionen zu den letzteren zurückgehen; man findet so

$$\operatorname{sn am}\frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{2\sqrt[4]{q}\sin x}{\sqrt{\varkappa}}\;\frac{(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

$$\operatorname{cs am}\frac{2Kx}{\pi}$$
$$= \frac{2\sqrt{\varkappa'}\,\sqrt[4]{q}\cos x}{\sqrt{\varkappa}}\;\frac{(1+2q^2\cos 2x+q^4)(1+2q^4\cos 2x+q^8)(1+2q^6\cos 2x+q^{12})\dots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\dots}$$

$$\Delta \mathrm{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$$
$$=\sqrt{\varkappa'}\,\frac{(1+2q\cos 2x+q^2)(1+2q^3\cos 2x+q^6)(1+2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}{(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots}$$

Jacobi hat ferner gezeigt, dass für $1>q>0$ immer folgende zwei identische Gleichungen stattfinden (fund. No. 64)

$$(1-2q\cos 2x+q^2)(1-2q^3\cos 2x+q^6)(1-2q^5\cos 2x+q^{10})\ldots$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+2q^{16}\cos 8x-\ldots\right\}$$

und

$$2\sqrt[4]{q}\sin x\,(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)(1-2q^6\cos 2x+q^{12})\ldots$$
$$=\frac{1}{Q}\left\{2\sqrt[4]{q}\sin x-2\sqrt[4]{q^9}\sin 3x+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin 5x-2\sqrt[4]{q^{49}}\sin 7x+\ldots\right\}$$

worin Q den Werth des unendlichen Produktes

$$(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)(1-q^8)\ldots\ldots$$

bezeichnet; macht man von diesen algebraischen Transformationen dadurch Gebrauch, dass man zwei Transcendenten $\Theta(u)$ und $\mathrm{H}(u)$ mittelst der Definitionen

$$\Theta(u)=1-2q\cos\frac{\pi u}{K}+2q^4\cos\frac{2\pi u}{K}-2q^9\cos\frac{3\pi u}{K}+\ldots\ldots$$
$$\mathrm{H}(u)=2\sqrt[4]{q}\sin\frac{\pi u}{2K}-2\sqrt[4]{q^9}\sin\frac{3\pi u}{2K}+2\sqrt[4]{q^{25}}\sin\frac{5\pi u}{2K}-\ldots\ldots$$

in die Rechnung einführt, so gestalten sich die obigen Produkte zu Quotienten von je zwei solcher Transcendenten: es wird nämlich

$$\mathrm{sn\,am}\,u=\frac{1}{\sqrt{\varkappa}}\,\frac{\mathrm{H}(u)}{\Theta(u)},\quad \mathrm{cs\,am}\,u=\sqrt{\frac{\varkappa'}{\varkappa}}\,\frac{\mathrm{H}(K-u)}{\Theta(u)},\quad \Delta\mathrm{am}\,u=\sqrt{\varkappa'}\,\frac{\Theta(K-u)}{\Theta(u)}.$$

Vermöge der Gleichung $(\Delta \mathrm{am}\,u)^2=1-\varkappa^2\mathrm{sn}^2\mathrm{am}\,u$ findet zwischen den elliptischen Transcendenten Θ und H die Beziehung

$$\mathrm{H}(u)=\sqrt{\frac{[\Theta(u)]^2-\varkappa'[\Theta(K-u)]^2}{\varkappa}}$$

statt, und damit sind die elliptischen Funktionen erster Art auf die eine Transcendente Θ zurückgeführt.

Was die Entwickelung der elliptischen Funktionen zweiter und dritter Gattung betrifft, so möchte das Jacobi'sche Verfahren wohl das kürzeste bleiben, und wir brauchen desshalb nicht weiter darauf einzugehen. Will man endlich die sämmtlichen elliptischen Funktionen mit beliebigen complexen Variabelen versehen, so kann man die Transcendente Θ zum Ausgangspunkte nehmen und dann haben die mitgetheilten Untersuchungen immer noch den Vortheil, dass man bereits den Zusammenhang kennt, welcher zwischen dieser Transcendente und den elliptischen Funktionen reeller Argumente stattfindet.

DIE

THEORIE DES AEQUATOREALS

VON

P. A. HANSEN.

Azimuthalkreises oder des Höhenkreises überhaupt, und die des Passageninstruments als specielle Fälle in sich. Um aber diese Abhandlung nicht zu weit auszudehnen, beschränke ich mich hier auf das Aequatoreal, und lasse dasjenige, welches das Heliometer und die andern genannten Instrumente speciell betrifft, weg.

Die Theorie eines jeden astronomischen Instruments muss erklären, wie man aus den Angaben desselben, die man durch die Einstellung irgend eines Punkts der Kugeloberfläche (Himmelskugel) erhält, die wahren Coordinaten desselben zu berechnen hat, und sie muss zeigen, wie man die hiezu erforderlichen Hülfsgrössen, die Reductionselemente, finden kann. Abgesehen von der Biegung des Fernrohrs, die ein mehr physisches als mathematisches Reductionselement ist, kommen beim Aequatoreal sechs Reductionselemente in Betracht, und von diesen werden in dieser Abhandlung drei verschiedene Systeme nach und nach eingeführt. Diese sind:

I. 1) Die Entfernung des Pols des Aequatoreals von dem Pol des Aequators.
2) Der Stundenwinkel, unter welchem der Pol des Aequatoreals liegt.
3) Der Winkel, den der durch diese beiden Pole auf der Kugeloberfläche gezogene grösste Kreis mit dem Meridian des Aequatoreals macht.
4) Der Winkel, den die Stunden- und die Declinationsachse des Aequatoreals mit einander machen.
5) Der Winkel, den die Declinationsachse und die Absehenslinie des Fernrohrs des Aequatoreals mit einander machen.
6) Die Collimation des Declinationskreises.

Der Unterschied zwischen den unter 2) und 3) genannten Reductionselementen kann die Collimation des Stundenkreises genannt werden.

II. 1) Das Azimuth der Stundenachse.
2) Die Neigung der Stundenachse gegen das Zenith oder den Horizont des Beobachtungsortes.
3) Die Angabe des Stundenkreises, wenn das Fernrohr des Aequatoreals auf das Zenith des Beobachtungsortes gerichtet ist.
4) 5) 6) wie vorher.

Das hier unter 3) angeführte Reductionselement könnte auch die Collimation des Stundenkreises genannt werden, da derselbe Null zeigen muss, wenn das Fernrohr die bezeichnete Lage hat. Allein da in dem Ausdruck für die Reduction der Ablesungen am Stundenkreise ausserdem noch ein constantes Glied eintritt, so habe ich für dieses Reductionselement die Bezeichnung als Collimation nicht eingeführt.

III. 1) Der Bogen grössten Kreises, oder der Winkel zwischen der (verlängerten) Declinationsachse und dem Pol des Aequators.

2) Der Stundenwinkel, unter welchem dieser Bogen liegt.

3) Der Winkel, den die Ebene, die diesem Bogen entspricht, mit der durch den Nullpunkt des Declinationskreises und die Declinationsachse gelegten Ebene macht.

4) Der Winkel, den die Declinationsachse mit der Absehenslinie des Fernrohrs macht, das ist dasselbe unter I. und II. mit 5) bezeichnete Reductionselement.

In diesem dritten System erscheinen nur vier Reductionselemente, welches davon herrührt, dass die ersten drei desselben sich auf eine bestimmte Ablesung am Stundenkreise beziehen, und ihre Werthe ändern, wenn die Declinationsachse und die damit verbundenen Theile des Aequatoreals um die Stundenachse bewegt werden. Diese drei Reductionselemente enthalten die fünf ersten der unter I. und II. genannten in sich, und ihre Analogie mit den beim Passageninstrumente oder vielmehr beim Meridiankreise vorkommenden Reductionselementen ist nicht zu verkennen. Sie werden vorzugsweise nützlich, wenn man dem Aequatoreal mehr wie Eine Absehenslinie beilegt.

Die ganze Theorie des Aequatoreals beruht, wenn man sie in ihrer einfachsten Gestalt betrachtet, auf der Auflösung eines sphärischen Vierecks, dessen Ecken der Pol des Aequators, der Pol des Aequatoreals, die (verlängerte) Declinationsachse und die (verlängerte) Absehenslinie des Fernrohrs sind. Durch die erstgenannte Ecke dieses Vierecks geht der Meridian des Beobachtungsortes, von welchem an die Bögen gezählt werden, deren Unterschied den entsprechenden Winkel bildet, durch die zweitgenannte Ecke geht der Meridian des Aequatoreals, von welchem an die Bögen oder Winkel auf dem Stundenkreise gezählt werden, durch die dritte Ecke geht der Bogen, welcher dem Nullpunkt des Declinationskreises entspricht, und von welchem an folglich die Bögen oder Winkel auf diesem Kreise gezählt werden, und durch die

vierte Ecke geht der Bogen, von welchem an das Aequatoreal die Positionswinkel angiebt, wenn es mit einem derartigen Mikrometer verbunden worden ist. Je nachdem man dieses Viereck durch die eine oder die andere seiner beiden Diagonalen in zwei sphärische Dreiecke zerlegt, kommt man auf das obige erste oder dritte System von Reductionselementen. Man wird dieses Viereck durch die in dieser Abhandlung angewandten, sphärischen Dreiecke stets wieder erkennen können.

Das Zenith des Beobachtungsorts ist ein Punkt, welcher nicht nothwendiger Weise in der Theorie des Aequatoreals in Betracht gezogen werden muss, verbindet man aber die zweite und vierte Ecke des eben beschriebenen Vierecks durch Bögen grössten Kreises mit diesem Zenith, so wird man auf das unter II. angeführte System von Reductionselementen hingeführt, und die Bestimmung der drei ersten Elemente dieses Systems wird durch Zuziehung eines festen, terrestrischen Gegenstandes und durch Hülfe zweier an der Büchse der Stundenachse befestigten Niveaus bemöglicht. Verbindet man ausserdem die dritte Ecke desselben Vierecks durch einen Bogen grössten Kreises mit dem Zenith; so erlangt man die Bestimmung des unter II. mit 3) bezeichneten Reductionselements durch die Nivellirung der Declinationsachse, statt durch das eine der eben genannten festen Niveaus.

Die unter III. angeführten Reductionselemente gewähren, wenn man die eben erwähnte Nivellirung der Declinationsachse hinzuzieht, die Möglichkeit in jeder beliebigen Lage der Declinationsachse gegen den Horizont, und ohne den Stand der bei den Beobachtungen angewandten Uhr zu kennen, die drei ersten Reductionselemente des Aequatoreals überhaupt auf dieselbe Weise bestimmen zu können, wie man die des Passageninstruments oder Meridiankreises zu bestimmen pflegt. Ist das Aequatoreal hinreichend genau und zweckmässig gebaut, so kann man durch dieselben Beobachtungen auch den Uhrstand bestimmen. Die drei letzten unter I. und II. genannten Reductionselemente können stets unabhängig von den drei ersten bestimmt werden.

Die Bestimmung der drei ersten Reductionselemente erfordert im Allgemeinen die Beobachtung von zwei Sternen, und man erhält dadurch für das eine dieser Elemente eine doppelte Bestimmung, oder kann durch dieselben Beobachtungen ausserdem ein viertes Element bestimmen, welches sich jedoch nicht immer mit wünschenswerther Genauigkeit ausführen lässt, weshalb in dieser Abhandlung nur ein Mal

auf das mit bestimmbare vierte Element Rücksicht genommen worden ist. Um die Methoden zur Bestimmung dieser Reductionselemente zu construiren, muss man ausser den vier Punkten auf der Kugeloberfläche, die das oben beschriebene Viereck bilden, einen fünften Punkt annehmen, und denselben mit jenem vierten und zwei andern Punkten des ersten Vierecks verbinden, wodurch ein neues Viereck entsteht, aus welchem die Auflösungen leicht hervorgehen.

Wenn man, wie in dieser Abhandlung geschehen ist, dem Aequatoreal mehrere Absehenslinien beilegt, so muss man neben dem Punkt, in welchem sich die vierte Ecke des oben beschriebenen ersten Vierecks befindet, auch einen fünften Punkt annehmen, und durch Bögen grössten Kreises mit der ersten und dritten Ecke des Vierecks verbinden. Durch die zwei hierdurch entstehenden Vierecke, und die Dreiecke, zu welchen sie Veranlassung geben, erlangt man bald die auf eine zweite Absehenslinie sich beziehenden Relationen, die leicht auf eine beliebige Anzahl von Absehenslinien ausgedehnt werden können.

Die Betrachtung von zwei Absehenslinien ist überhaupt die Grundlage der Theorie des mit irgend einem Mikrometer verbundenen Aequatoreals; diese Theorie habe ich indess, wie oben schon erwähnt wurde, hier weggelassen.

In allen Formeln habe ich die Wirkung der Biegung des Fernrohrs weggelassen, und dadurch die grösstmögliche Einfachheit derselben zu Wege gebracht. Wollte man die Wirkung dieser Biegung hinzufügen, so würden die Formeln weit zusammengesetzter ausfallen, aber diese Hinzufügung ist unnöthig, da man die Biegung auf eine andere Art aufs Einfachste berücksichtigen kann. Ich mache darauf aufmerksam, dass die Biegung in derselben, oder in der entgegengesetzten Richtung wirkt, wie die Strahlenbrechung, die auf jeden Fall berücksichtigt werden muss, nichts ist also einfacher, wie die Wirkung der Biegung mit entgegengesetztem Zeichen der der Strahlenbrechung hinzuzufügen, und mit dieser vereinigt rückwärts auf die Oerter der Sterne zu übertragen. Auf alle in dieser Abhandlung zur Bestimmung der unter I. und II. mit 4) 5) und 6) bezeichneten Reductionselemente, so wie auf einige der zur Bestimmung der übrigen Reductionselemente entwickelten Methoden hat die Biegung keinen Einfluss. Andere Biegungen wie die des Fernrohrs betrachte ich nicht, da ich der Meinung bin, dass man den Bau und das System der Gegengewichte des Aequatoreals, welches jedenfalls

erforderlich ist, so einrichten kann, dass keine andern Biegungen, wie die der beiden Enden des Fernrohrs vorkommen können.

Bekanntlich kann man alle, oder fast alle, Punkte der Himmelskugel mit einem Aequatoreal auf zwei verschiedene Arten einstellen, und man hat sonst für die Reduction dieser verschiedenartigen Einstellungen verschiedene Formeln abgeleitet, die sich von einander durch die algebraischen Zeichen der verschiedenen Glieder unterscheiden. Dieses ist zum Mindesten überflüssig, denn man kann alle Formeln so einrichten, dass sie mit bloser Rücksichtnahme auf die Zeichen der in denselben vorkommenden trigonometrischen Functionen für beide Einstellungsarten Gültigkeit haben. So ist es in dieser Abhandlung geschehen.

Ich führe endlich hier an, dass ich in dieser Abhandlung nicht blos ein fest aufgestelltes Aequatoreal, bei welchem man immer annehmen darf, dass alle Reductionselemente kleine Grössen sind, von welchen nur die ersten Potenzen berücksichtigt zu werden brauchen, sondern auch ein transportables Aequatoreal betrachte, bei welchem es sich wohl ereignen kann, dass es, während Beobachtungen daran angestellt worden sind, eine solche Aufstellung gehabt hat, dass diese Kleinheit der sich auf die Aufstellung des Aequatoreals überhaupt beziehenden drei ersten Reductionselemente nicht angenommen werden darf. Die Folge dieser Betrachtung war, dass von den meisten Aufgaben nicht nur genäherte, sondern auch strenge Auflösungen entwickelt werden mussten.

Die Abhandlung ist in fünf Abschnitte eingetheilt, deren Inhalt in den Ueberschriften, wie folgt, angegeben ist:

§. I.

Anwendung des ersten Systems von Reductionselementen zur Reduction der Beobachtungen, und Bestimmung derselben.

1.

Um den Mittelpunkt des Stundenkreises des Aequatoreals beschreibe man eine Kugeloberfläche von unbestimmtem Halbmesser, auf dieser ziehe den grössten Kreis, welcher dem Meridian des Beobachtungsortes entspricht, und bezeichne auf demselben den Nordpol des Aequators. Man bezeichne ferner auf dieser Kugeloberfläche (westlich vom Pol des Aequators, um die Begriffe festzustellen) den Punkt, in welchem sie von der nach Norden verlängerten Achse des Stundenkreises geschnitten wird, und nenne denselben den Nordpol (oder schlechtweg den Pol) des Aequatoreals (oder der Stundenachse). Durch die Achse des Stundenkreises, und durch den Punkt dieses Kreises, welcher dem Nullpunkt der Theilung desselben entspricht, lege man eine Ebene, und nenne dieselbe, oder den grössten Kreis, in welchem sie die Kugeloberfläche schneidet, den Meridian des Aequatoreals.

Die Stundenwinkel werde ich vom südlichen Theil des Meridians des Beobachtungsortes nach Westen durch den ganzen Umkreis ohne Unterbrechung fortzählen, und annehmen, dass die Bezifferung der Theilung des Stundenkreises in derselben Richtung vom Kleineren zum Grösseren fortschreitet, wenn der Pol des Aequatoreals mit dem des Aequators zusammenfällt.

Zur Bestimmung der Lage des Pols und Meridians des Aequatoreals gegen den Pol des Aequators und den Meridian des Beobachtungsortes bedürfen wir dreier Bögen, die ich mit μ, m und γ bezeichnen werde. Verbindet man diese beiden Pole durch einen Bogen grössten Kreises, so soll die Länge desselben mit μ, und der Stundenwinkel, unter welchem der Bogen μ liegt, mit $180^{\circ}-\gamma$ bezeichnet werden. Der Winkel endlich am Pol des Aequatoreals, welcher sich in der oben bezeichneten Richtung vom Bogen μ bis zum südlichen Theil des Meridians des Aequatoreals erstreckt, soll m sein.

Den Stundenwinkel irgend eines Punkts S der Kugeloberfläche werde ich mit τ, und die Declination desselben mit δ bezeichnen; die analogen, demselben Punkt S in Bezug auf den Meridian und den Pol

des Aequatoreals zukommenden Bögen sollen τ' und δ' genannt werden. Hieraus folgt sogleich, dass in dem sphärischen, vom Punkt S und den beiden genannten Polen gebildeten Dreieck die Seiten μ, $90^\circ-\delta$ und $90^\circ-\delta'$ sind, der Winkel am Pol des Aequators $180^\circ-\gamma-\tau$, und der am Pol des Aequatoreals $\tau'+m$ ist.

In diesem Dreieck finden daher folgende Gleichungen statt:

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta\sin(\tau+\gamma) &= \cos\delta'\sin(\tau'+m)\\ \cos\delta\cos(\tau+\gamma) &= \cos\delta'\cos\mu\cos(\tau'+m)-\sin\delta'\sin\mu\\ \sin\delta &= \cos\delta'\sin\mu\cos(\tau'+m)+\sin\delta'\cos\mu\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

die durch Hülfe der Angaben des Stunden- und Declinationskreises des Aequatoreals und der Reductionselemente μ, γ und m den Stundenwinkel und die Declination des eingestellten Punkts (Sterns) S geben. Auf dieselbe Art, oder wenn man will, durch Multiplication der Gleichungen (1) mit $\sin\mu$ und $\cos\mu$, und durch Addition und Subtraction erhält man die folgenden,

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta'\sin(\tau'+m) &= \cos\delta\sin(\tau+\gamma)\\ \cos\delta'\cos(\tau'+m) &= \cos\delta\cos\mu\cos(\tau+\gamma)+\sin\delta\sin\mu\\ \sin\delta' &= -\cos\delta\sin\mu\cos(\tau+\gamma)+\sin\delta\cos\mu\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

welche die umgekehrte Aufgabe lösen, indem sie die Winkel τ' und δ' geben, welche die Kreise des Aequatoreals angeben müssen, damit ein gegebener Stern zu einer gegebenen Zeit im Felde des Fernrohrs erscheine.

2.

Die eben entwickelten Gleichungen gelten für jede beliebige Aufstellung des Aequatoreals, und man kann aus denselben für die Fälle, in welchen μ klein ist, auf folgende Art Näherungsformeln erhalten, die gewöhnlich ausreichen.

Die dritte (1) giebt, wenn man $\sin\mu=\mu$, und $\cos\mu=1$ setzt,

$$\sin\delta-\sin\delta'=2\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')=\mu\cos\delta'\cos(\tau'+m)$$

das ist

$$\delta-\delta'=\mu\cos(\tau'+m).$$

Die erste (1) giebt, wenn man auf beiden Seiten $\cos\delta\sin(\tau'+m)$ subtrahirt,

$$\cos\delta\,[\sin(\tau+\gamma)-\sin(\tau'+m)]=(\cos\delta'-\cos\delta)\sin(\tau'+m)$$

oder

$$\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\tau-\tau'+\gamma-m)\cos\tfrac{1}{2}(\tau+\tau'+\gamma+m)=\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\sin(\tau'+m$$

aber wenn μ klein ist, so ist auch $\tau'+m$ nahe $=\tau+\gamma$, also

$$(\tau-\tau'+\gamma-m)\cos(\tau'+m)\cos\delta=(\delta-\delta')\sin\delta'\sin(\tau'+m),$$

oder wenn man den eben gefundenen Werth von $\delta-\delta'$ substituirt,

$$\tau-\tau'+\gamma-m=\mu\ \mathrm{tg}\ \delta'\sin(\tau'+m).$$

Also wenn μ klein ist, bekommt man den Stundenwinkel und die Declination eines Sterns durch folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\tau&=\tau'+\eta+\mu\ \mathrm{tg}\ \delta'\sin(\tau'+m)\\ \delta&=\delta'+\mu\cos(\tau'+m)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(3)$$

wo

$$\eta=m-\gamma$$

gesetzt worden ist. Den Bogen η kann man die Collimation des Stundenkreises nennen. Wenn der beobachtete Stern dem Pole sehr nahe ist, so kann sich ereignen, dass ungeachtet der Kleinheit von μ diese Ausdrücke für τ keine hinreichende Genauigkeit gewähren, allein statt für diesen Fall die Gleichungen (1) weiter zu entwickeln, ziehe ich vor, die strengen Gleichungen (1) selbst anzuwenden, welches auch dann thunlich ist, wenn μ so gross wäre, dass die Gleichungen (3) überhaupt keine hinreichende Genauigkeit gäben. Ich werde übrigens hierfür weiter unten andere Gleichungen geben.

Wenn man die (1) anwendet, so wird man sie der leichteren Rechnung wegen durch die Einführung von zwei Hülfswinkeln α und β zusammenziehen. Es wird, wenn

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha\sin\beta&=\sin\delta'\\ \cos\alpha\cos\beta&=\cos\delta'\cos(\tau'+m)\\ \sin\alpha\quad&=\cos\delta'\sin(\tau'+m)\end{aligned}\right.$$

gesetzt wird

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta\sin(\tau+\gamma)&=\sin\alpha\\ \cos\delta\cos(\tau+\gamma)&=\cos\alpha\cos(\mu+\beta)\\ \sin\delta\quad&=\cos\alpha\sin(\mu+\beta)\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(1^*)$$

Man kann β immer so bestimmen, dass $\cos\alpha$ positiv wird. Eben so bekommt man statt der Gleichungen (2),

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha'\cos\beta'&=\sin\delta\\ \cos\alpha'\sin\beta'&=\cos\delta\cos(\tau+\gamma)\\ \sin\alpha'\quad&=\cos\delta\sin(\tau+\gamma)\\ &\text{———}\\ \cos\delta'\sin(\tau'+m)&=\sin\alpha'\\ \cos\delta'\cos(\tau'+m)&=\cos\alpha'\sin(\mu+\beta')\\ \sin\delta'\quad&=\cos\alpha'\cos(\mu+\beta')\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\quad(2^*)$$

Ich führe diese Gleichungen an, weil sich sehr wohl ereignen kann, dass man zumal mit einem transportablen Aequatoreal Beobachtungen angestellt hätte, während μ grösser war, wie die Näherungsformeln (3) überhaupt vertragen.

3.

Suchen wir überdies den Winkel π zwischen der Ebene des Declinationskreises, welcher durch den Punkt S geht, und der durch die Achse des Stundenkreises gelegten Ebene, die durch denselben Punkt geht, mit andern Worten den Winkel, den die Seiten $90^\circ - \delta$ und $90^\circ - \delta'$ des oben angewandten sphärischen Dreiecks mit einander einschliessen. Dieses Dreieck giebt sogleich

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \sin\pi &= \sin\mu \sin(\tau' + m) \\ \cos\delta \cos\pi &= -\sin\mu \sin\delta' \cos(\tau' + m) + \cos\delta' \cos\mu \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

und wenn μ klein ist, ergiebt sich hieraus die Näherungsformel

$$\pi \doteq \mu \sec\delta' \sin(\tau' + m) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (5)$$

Diese Gleichungen geben zu erkennen, dass in so fern man μ als einen positiven Bogen betrachtet, $\delta > \delta'$ ist, wenn π und $\tau' + m = 0$ sind, so wie dass π und der Stundenwinkel zugleich wachsen. Hieraus folgt, dass π positiv ist, wenn der Pol des Aequatoreals an der Seite des durch S gehenden Declinationskreises liegt, an welcher die Stundenwinkel zunehmen. Wenn μ klein ist, so ist im Allgemeinen π auch klein, allein in der Nähe des Pols kann π ungeachtet der Kleinheit von μ den ganzen Umkreis durchlaufen, und es müssen dort die strengen Gleichungen (4) zu dessen Berechnung angewandt werden, wenn man ihn kennen lernen muss.

4.

Die im Vorhergehenden eingeführten Grössen τ' und δ' bekommt man nur dann unmittelbar durch die Ablesungen an dem Stunden- und Declinationskreise des Aequatoreals, wenn folgende Bedingungen stattfinden. Es muss

1) die Declinationsachse senkrecht auf der Stundenachse stehen;
2) die Absehenslinie des Fernrohrs senkrecht auf der Declinationsachse stehen;

3) der Declinationskreis 90° zeigen, wenn die Absehenslinie des Fernrohrs mit der Stundenachse in Einer Ebene liegt, und zugleich das Objectivende des Fernrohrs mit dem nördlichen Ende der Stundenachse einerlei Richtung hat.

Wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind, so wird man im Allgemeinen Ablesungen erhalten, die von τ' und δ' verschieden sind, und die ich mit τ'' und δ'' bezeichnen werde. Ich nehme an, dass der Winkel zwischen der nach Norden gerichteten Verlängerung der Stundenachse und dem Ende der Declinationsachse, welches nach Westen gerichtet ist, wenn das Fernrohr die Lage hat, in welcher sowohl Stunden- wie Declinationskreis Null oder nahe Null zeigen müssen, $90° + i$, und der Winkel zwischen demselben Ende der Declinationsachse und dem Objectivende des Fernrohrs $90° - k$ sei; es soll ferner, wenn die Absehenslinie des Fernrohrs in die unter 3) verlangte Lage gebracht worden ist, der Declinationskreis $90° - c$ zeigen. Betrachten wir nun das auf der Kugeloberfläche von dem bezeichneten, auf den Punkt S gerichteten Ende der Absehenslinie, dem bezeichneten Ende der Declinationsachse, und dem Pol des Aequatoreals gebildete, und sich dem in Art. 1. betrachteten Dreieck anschliessende, sphärische Dreieck. In diesem sind die Seiten $90° - \delta'$, $90° - k$ und $90° + i$, und der Seite $90° - \delta'$ liegt der Winkel $90° - c - \delta''$ gegenüber. An den Pol des Aequatoreals und ausserhalb dieses Dreiecks ziehe man den grössten Kreis, welcher den Meridian des Aequatoreals darstellt, dann ist der Winkel an diesem Pol zwischen dem Meridian und der Seite $90° - \delta'$ dem Winkel τ' gleich, und der Winkel zwischen der Dreieckseite $90° + i$ und diesem Meridian ist gleich $90° + \tau''$. Hieraus folgt, dass in unserm Dreieck der der Seite $90° - k$ gegenüber liegende Winkel $= 90° - (\tau' - \tau'')$ ist. Man erhält also

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta' \cos(\tau' - \tau'') &= \cos k \cos(\delta'' + c) \\ \cos\delta' \sin(\tau' - \tau'') &= \cos k \sin i \sin(\delta'' + c) + \sin k \cos i \\ \sin\delta' &= \cos k \cos i \sin(\delta'' + c) - \sin k \sin i \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

welche τ' und δ' durch die Ablesungen τ'' und δ'' und durch die Reductionselemente k, i und c geben. Wenn i und k klein sind, wie wohl immer der Fall sein wird, so erhält man aus diesen Gleichungen die Näherungsformeln

$$\left.\begin{aligned} \tau' &= \tau'' + i \operatorname{tg}(\delta'' + c) + k \sec(\delta'' + c) \\ \delta' &= \delta'' + c \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Es ist bekannt, dass man mit einem Aequatoreal von zweckmässiger Construction entweder alle, oder doch mit geringer Ausnahme alle Punkte der Himmelskugel auf zwei verschiedene Arten einstellen kann, gleichwie man mit einem Theodoliten durch Umschlagen des Fernrohrs alle Gegenstände auf zweierlei Art einstellen kann. Diese beiden Arten der Einstellung entsprechen genau den oben erklärten zwei Arten die Polarcoordinaten zu construiren, und es müssen daher die Bezifferungen an dem Stunden- und Declinationskreise des Aequatoreals so beschaffen sein, dass sie den beiden oben dargelegten Arten die Polarcoordinaten zu zählen entsprechen.

Aber nicht blos in der geometrischen Anschauung und in der Verkörperung derselben durch den Bau und die Einrichtung des Aequatoreals spricht sich diese doppelte Art der Bildung der Polarcoordinaten aus, sondern sie ist auch in der analytischen Theorie begründet. Die Systeme (1) und (6) der strengen Gleichungen, welche die Reductionen der mit dem Aequatoreal eingestellten Punkte geben, können so gestellt werden, dass die linke Seite derselben, welche die zu bestimmenden unbekannten Grössen enthalten, folgende Form annehmen:

$$\begin{array}{lcl} \cos\delta\cos\tau & & \cos\delta'\cos\tau' \\ \cos\delta\sin\tau & \text{und} & \cos\delta'\sin\tau' \\ \sin\delta & & \sin\delta' \end{array}$$

oder wenn man die Polardistanz anwendet,

$$\begin{array}{lcl} \sin\pi\cos\tau & & \sin\pi'\cos\tau' \\ \sin\pi\sin\tau & \text{und} & \sin\pi'\sin\tau' \\ \cos\pi & & \cos\pi' \end{array}$$

aber es ist offenbar identisch

$$\begin{aligned} \cos\delta\cos\tau &= \cos(180^\circ-\delta)\cos(180^\circ+\tau) \\ \cos\delta\sin\tau &= \cos(180^\circ-\delta)\sin(180^\circ+\tau) \\ \sin\delta &= \sin(180^\circ-\delta) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \sin\pi\cos\tau &= \sin(360^\circ-\pi)\cos(180^\circ+\tau) \\ \sin\pi\sin\tau &= \sin(360^\circ-\pi)\sin(180^\circ+\tau) \\ \cos\pi &= \cos(360^\circ-\pi) \end{aligned}$$

und eben so verhält es sich mit den Functionen von τ' und δ', oder τ' und π'. Die beiden verschiedenen Arten der Auffassung der Polarcoordinaten gnügen also den analytischen Ausdrücken für die Reduction der Beobachtungen, und sind durch die beiden verschieden-

artigen Einstellungen des Gestirns am Aequatoreal repräsentirt. Um sie unzweideutig zu erhalten, und um die im Vorhergehenden entwickelten Formeln, sowohl die strengen wie die genäherten, ohne Unterschied auf beide Arten der Einstellungen anwenden zu können, ist erforderlich, dass am Stundenkreise die Bezifferung der Theilung von 0 bis 360° in ununterbrochener Folge aufgetragen sei, und wenn das Aequatoreal Polardistanzen geben soll, so muss vom Nordpol ausgehend auf dem Declinationskreise die Bezifferung sich gleichfalls von 0 bis 360° in ununterbrochener Folge erstrecken. Soll das Aequatoreal Declinationen angeben, so muss die Bezifferung der Theilung des Stundenkreises so wie oben angeführt wurde aufgetragen werden, und die des Declinationskreises könnte vom Aequator mit 0 nach Norden ausgehend sich auch ununterbrochen bis 360° erstrecken, besser ist es aber vom 0 Punkt des Aequators südlich ausgehend die negativen Zahlen bis —90° auftragen zu lassen, so dass auf diesem Kreise im Südpol —90° und 270° Einem Punkt zugehören, wodurch sonst noch Vortheile erlangt werden, und man sich auch dem allgemeinen Gebrauche die Declinationen zu zählen möglichst anschmiegt. Weiter darf sich aber die Numerirung mit negativen Zahlen nicht erstrecken. Uebrigens müssen die Bezifferungen der beiden Kreise so mit einander correspondiren, dass der Stundenkreis den wahren — im Gegensatze zu dem um 180° vermehrten — Stundenwinkel angiebt, während die Angabe des Declinationskreises zwischen 0 und 180° oder bezüglich zwischen —90° und +90° liegt. Wenn diese Einrichtung getroffen ist, so gelten alle vorhergehenden Ausdrücke, die strengen sowohl wie die genäherten, für beide Arten der Einstellungen, vorausgesetzt, dass man in jedem Falle die Ablesungen so anwendet wie man sie erhalten hat, und auf die algebraischen Zeichen der in den Formeln vorkommenden trigonometrischen Linien Rücksicht nimmt. Man braucht daher für jede der beiden Einstellungsarten nicht besondere Formeln zu construiren, welches immer in den Fällen, wo es vermieden werden kann, eine unwissenschaftliche Art der Behandlung einer Aufgabe ist, sondern kann in allen Fällen die Reductionen nach denselben Formeln ausführen. In den Fällen, wo Einstellungen der Art gemacht worden sind, wo die Polardistanz oder die Declination ihre gewöhnlichen Grenzen überschreiten, ist blos am Ende der Reductionen jene von 360°, oder diese von 180° abzuziehen, und der Stundenwinkel um 180° zu vermehren oder zu vermindern.

7.

Gleichwie den linken Seiten der Gleichungen (1) und (6) durch zwei Werthe der beiden darin vorkommenden veränderlichen Grössen Gnüge geleistet werden kann, während die der rechten Seite unverändert gelassen werden, so muss denselben auch durch zwei Werthe der Veränderlichen der rechten Seite Gnüge geleistet werden können, wenn die der linken unverändert gelassen werden. Bezeichnen wir für die Gleichungen (1) diese zweiten Werthe von τ' und δ' mit τ_1' und δ_1', dann ist aus den Gleichungen (2), die durch Umkehrung aus den (1) entstanden, und ihnen völlig analog sind, sogleich zu erkennen, dass

$$\tau' = 180^\circ + \tau_1'$$
$$\delta' = 180^\circ - \delta_1'$$

ist, und dass also zwischen diesen Grössen dieselben Relationen statt finden, wie zwischen den zwei Werthen von τ und δ selbst. In Bezug auf die Gleichungen (6) verhält es sich, wie man gleich sehen wird, nicht ganz so. Nennt man die zweiten Werthe von τ'' und δ'', die diesen Gleichungen gnügen, während τ' und δ' unverändert bleiben, τ''' und δ''', so müssen folgende sechs Gleichungen zugleich statt finden

$$\cos\delta'\cos(\tau'-\tau'') = \cos k\cos(\delta''+c)$$
$$\cos\delta'\sin(\tau'-\tau'') = \cos k\sin i\sin(\delta''+c) + \sin k\cos i$$
$$\sin\delta' = \cos k\cos i\sin(\delta''+c) - \sin k\sin i$$
$$\cos\delta'\cos(\tau'-\tau''') = \cos k\cos(\delta'''+c)$$
$$\cos\delta'\sin(\tau'-\tau''') = \cos k\sin i\sin(\delta'''+c) + \sin k\cos i$$
$$\sin\delta' = \cos k\cos i\sin(\delta'''+c) - \sin k\sin i$$

und es sind hier offenbar τ'' und δ'' die Ablesungen an den beiden Kreisen des Aequatoreals, die man bei der Einstellung eines Punkts S der Kugeloberfläche auf die eine, und τ''' und δ''' diejenigen, welche man bei der Einstellung desselben Punkts S auf die andere der beiden überhaupt möglichen Arten bekommt. Aus der dritten und sechsten dieser Gleichungen folgt sogleich, dass

$$\sin(\delta''+c) = \sin(\delta'''+c)$$

ist, woraus hervorgeht, dass entweder δ'' und δ''' identisch sind, welches auf Einstellungen derselben Art hinzielt, oder dass

$$(11) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \delta'''+c = 180^\circ - \delta'' - c$$

ist, welche Relation den Einstellungen verchiedener Art angehört, und von δ' unabhängig ist. Diese Relation ist, weil sie c enthält, von der

Relation verschieden, die zwischen den zwei Werthen von δ' statt findet, die den Gleichungen (6) gnügen, wenn τ'' und δ'' dieselben bleiben, allein die Relation, die vermöge der Gleichung (11) zwischen $\delta''+c$ und $\delta'''+c$ statt findet, ist dieselbe wie die zwischen den eben erwähnten Werthen von δ'. Substituirt man den Werth von $\delta'''+c$ aus (11) in die vierte und fünfte der obigen Gleichungen, so geben diese in Verbindung mit der ersten und zweiten

$$\cos(\tau'-\tau'') = -\cos(\tau'-\tau''')$$
$$\sin(\tau'-\tau'') = -\sin(\tau'-\tau''')$$

woraus

$$\tau'-\tau'' = 180^\circ - \tau' + \tau''' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

folgt, welches die Relation ist, die zwischen den Ablesungen am Stundenkreise nach den Einstellungen eines und desselben Punkts auf die zwei verschiedenen Arten statt findet, und die von der zwischen den übrigen, überhaupt mit τ bezeichneten Winkeln statt findenden wesentlich verschieden sein kann. Aber wenn i und k Null sind, ist derselben durch die Werthe $\tau''=\tau'$ und $\tau'''=180^\circ+\tau''$ Gnüge geleistet, welche Relation mit den früheren übereinstimmt.

8.

Wenn k und i klein sind, so bieten die Gleichungen (11) und (12) ein Mittel dar, τ' und δ' aus den Ablesungen zu finden, ohne dass man k, i und c zu kennen braucht. Ich nehme an, dass τ'' und δ'' die Ablesungen sind, für welche die Angabe des Declinationskreises zwischen $+90^\circ$ und -90° liegt, und dass der Zahlenwerth von τ''' grösser sei, wie der von τ''. Wenn beim Uebergange von der zuerst genannten Einstellung zur andern der erste Nonius des Stundenkreises durch den Anfangspunkt der Theilung gegangen ist, das ist, wenn der Stundenwinkel des eingestellten Punktes überhaupt grösser wie 180° ist, so wird die Ablesung unmittelbar für τ''' eine kleinere Zahl geben, wie für τ'', und man muss daher, um der eben ausgesprochenen Bedingung Gnüge zu leisten, 360° zu dem durch die Ablesung erhaltenen Werth von τ''' addiren. Dieses vorausgesetzt, geben die Gleichungen (11) und (12) in Verbindung mit dem Näherungswerthe $\delta'=\delta''+c$ aus (7)

$$\left.\begin{array}{l}\tau' = \frac{1}{2}(\tau''+\tau''') - 90^\circ \\ \delta' = 90^\circ - \frac{1}{2}(\delta'''-\delta'')\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

welche für jeden Punkt der Kugeloberfläche gelten. Bei der Anwendung dieser Gleichungen auf cölestische Beobachtungen verliert die Gleichung für τ' ihre geometrische Strenge. Denn da die Gestirne immer in Bewegung sind und man nicht beide Einstellungen in einem und demselben Augenblick machen kann, so hat man nie durch beide Einstellungen einen und denselben Punkt der Kugeloberfläche eingestellt. Wenn aber nicht nur k und i, sondern auch μ klein sind, und man die beiden Einstellungen in einem möglichst kurzen Zwischenraum ausgeführt hat, so kann man immer noch die Gleichungen (13) für das Mittel aus den Beobachtungszeiten als statt findend betrachten. Bei Einstellungen auf einen festen, terrestrischen Gegenstand gelten sie, wie auch μ beschaffen sei.

9.

Obgleich man durch die Entwickelungen des vor. Art. in vielen Fällen die Beobachtungen von dem Einfluss der Reductionselemente i, k und c befreien kann, ohne diese zu kennen, so können doch Fälle eintreten, wo dieses nicht möglich ist, oder nicht hinreichend genau ausgeführt werden kann, und ich werde daher zeigen, wie sie sicher ermittelt werden können. Nehmen wir die erste der Gleichungen (13) vor und substituiren sie in die beiden ersten Gleichungen (6), so ergiebt sich

$$\cos\delta' \sin\tfrac{1}{2}(\tau''' - \tau'') = \cos k \cos(\delta'' + c)$$

$$\cos\delta' \cos\tfrac{1}{2}(\tau''' - \tau'') = -\cos k \sin i \sin(\delta'' + c) - \sin k \cos i$$

und die Division der zweiten dieser durch die erste giebt

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\tau''' - \tau'') = -\sin i \operatorname{tg}(\delta'' + c) - \operatorname{tg} k \cos i \sec(\delta'' + c).$$

Ich werde nun annehmen, dass die Ablesungen τ'', τ''', δ'' und δ''' einem festen, terrestrischen Gegenstande angehören, und dass ein zweiter solcher Gegenstand durch Einstellung auf die beiden verschiedenen Arten die Ablesungen t'', t''', d'' und d''' gegeben habe. Hiemit wird die folgende Gleichung erlangt:

$$\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(t''' - t'') = -\sin i \operatorname{tg}(d'' + c) - \operatorname{tg} k \cos i \sec(d'' + c).$$

Wenn man nun aus diesen beiden Gleichungen wechselsweise $\operatorname{tg} k$ und $\sin i$ eliminirt, so entstehen

$$\sin i = \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\tau''' - \tau'')\cos(\delta'' + c) - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(t''' - t'')\cos(d'' + c)}{\sin(d'' + c) - \sin(\delta'' + c)}$$

$$\operatorname{tg} k = \frac{\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(t''' - t'')\sin(\delta'' + c)\cos(d'' + c) - \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(\tau''' - \tau'')\sin(d'' + c)\cos(\delta'' + c)}{[\sin(d'' + c) - \sin(\delta'' + c)]\cos i}.$$

Um diese Gleichungen zu vereinfachen, setze ich

$$\delta'' + c = D - \Delta$$
$$d'' + c = D + \Delta$$

wodurch sie in folgende übergehen:

$$\left.\begin{aligned}\sin i &= \frac{\sin\frac{1}{2}[(t'''-t'')-(\tau'''-\tau'')]\,\mathrm{cotg}\,\Delta + \sin\frac{1}{2}[(t'''-t'')+(\tau'''-\tau'')]\,\mathrm{tg}\,D}{2\sin\frac{1}{2}(t'''-t'')\sin\frac{1}{2}(\tau'''-\tau'')}\\ \mathrm{tg}\,k &= -\frac{\sin\frac{1}{2}[(t'''-t'')+(\tau'''-\tau'')]\cos\Delta\sec D + \sin\frac{1}{2}[(t'''-t'')-(\tau'''-\tau'')]\sin D\,\mathrm{cosec}\,\Delta}{2\sin\frac{1}{2}(t'''-t'')\sin\frac{1}{2}(\tau'''-\tau'')\cos i}\end{aligned}\right\}\quad(14)$$

woraus i und k folgt, und für die Bestimmung der Collimation c des Declinationskreises ergeben sich durch (11) folgende zwei Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}c &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\delta''' + \delta'')\\ c &= 90^\circ - \tfrac{1}{2}(d''' + d'')\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(15)$$

woraus man das arithmetische Mittel nehmen kann.

Da aus den obigen Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}D &= \tfrac{1}{2}(d'' + \delta'') + c\\ \Delta &= \tfrac{1}{2}(d'' - \delta'')\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(16)$$

hervorgeht, so giebt sich zu erkennen, dass die Bestimmung von i und k aus (14) am sichersten ist, wenn der Unterschied zwischen d'' und δ'' möglichst gross ist, und da dieses im Horizont im Süd- und im Nordpunkt statt findet, so muss man die beiden Gegenstände in möglichster Nähe dieser Punkte wählen. Wenn i und k klein sind, so folgen aus (14) die folgenden Näherungsformeln:

$$\left.\begin{aligned}i &= \tfrac{1}{2}[(t'''-t'')-(\tau'''-\tau'')]\,\mathrm{cotg}\,\Delta - \tfrac{1}{2}[(t'''-t'')+(\tau'''-\tau'')-360^\circ]\,\mathrm{tg}\,D\\ k &= \tfrac{1}{2}[(t'''-t'')+(\tau'''-\tau'')-360^\circ]\cos\Delta\sec D - \tfrac{1}{2}[(t'''-t'')-(\tau'''-\tau'')]\sin D\,\mathrm{cosec}\,\Delta\end{aligned}\right\}\quad(17)$$

Da im Horizont und im Nord- und Südpunkt $D=0$ ist, so werden, wenn die beiden Gegenstände in der Nähe dieser Punkte liegen, die beiden letzten Glieder der vorstehenden Ausdrücke gemeiniglich so klein, dass man sie übergehen kann, und also mit den ersten Gliedern ausreicht. Es entstehen dann die Ausdrücke für diese Bestimmung, die ich schon in meiner früheren Abhandlung über das Heliometer gegeben habe.

Wenn das Aequatoreal, wie bei transportablen Instrumenten dieser Gattung oft der Fall ist, mit einer verticalen Achse versehen ist, um welche dasselbe durch den ganzen Umkreis hindurch gedreht werden kann, so reicht man bei der Bestimmung von i, k und c durch die eben entwickelten Ausdrücke mit Einem Gegenstande aus. Denn da diese Reductionselemente sich auf Relationen beziehen, die in Bezug auf die verschiedenen Theile des Aequatoreals unter einander, und unabhängig

von Punkten statt finden. die ausserhalb desselben liegen, so ist es einerlei, wie während der Bestimmung derselben das Aequatoreal in Bezug auf die Weltgegenden aufgestellt gewesen ist, und es gnügt, wenn die oben verlangte Lage der beiden Gegenstände in Bezug auf die Stundenachse des Aequatoreals statt gefunden hat. Hat daher das Aequatoreal die oben erwähnte Beschaffenheit, so kann man zur Bestimmung von i, k und c einen beliebigen, nahe im Horizont liegenden festen, terrestrischen Gegenstand wählen, und muss nur bei dem einen Paar von Einstellungen dasselbe so um die verticale Achse drehen, dass der Gegenstand in Bezug auf die Stundenachse des Instruments nahe im Nordpunkt, und bei dem andern Paar so, dass derselbe in Bezug auf die genannte Axe nahe im Südpunkt liegt.

10.

Man wird wohl immer irgend wo am Horizont Einen für diese Bestimmung passenden terrestrischen Gegenstand finden können, und kann somit stets, wenn das Aequatoreal mit einer Azimuthalbewegung versehen ist, die Bestimmung von i, k und c so wie sie im vor. Art. entwickelt worden ist, ausführen. Allein es könnte sich sehr wohl ereignen, dass keine passenden zwei Gegenstände, wovon der Eine dem Süd- und der andere dem Nordpunkt hinreichend nahe genug liegt, aufzufinden wären oder künstlich hergestellt werden könnten, und es können somit Fälle eintreten, wo für ein grosses und festes Aequatoreal, an welcher Gattung von Instrumenten die Azimuthalbewegung nicht anzubringen ist, die Bestimmung von i und k, so wie sie im Vorhergehenden entwickelt worden ist, nicht ausgeführt werden kann. In diesem Falle kann man aber für die beiden terrestrischen Gegenstände zwei bekannte oder unbekannte Sterne substituiren, wovon der eine tief südlich und der andere tief nördlich unter dem Pole culminirt, und braucht diese beiden Sterne nicht so tief zu wählen, dass die Strahlenbrechung die Genauigkeit der Beobachtungen beeinträchtigen müsste. Ja man kann für den nördlichen Stern immer einen der beiden Polarsterne in der Nähe einer seiner Culminationen wählen.

Die Ausdrücke (17) bedürfen für diese Art der Bestimmung von i und k einer kleinen Abänderung. Da in denselben die Ablesungen am Declinationskreise nur in den Coefficienten vorkommen, so kann man zwar immer die beiden Einstellungen eines jeden dieser beiden Sterne

in so kurzer Zeit nach einander ausführen, dass die in der Zwischenzeit statt gefundene Aenderung der Declination in Bezug auf die Bestimmung von i und k als Null betrachtet werden kann, aber mit den Ablesungen vom Stundenkreise verhält es sich wegen der täglichen Bewegung der Gestirne anders.

Betrachten wir die Einstellungen von zwei einander nahe liegenden Punkten der Kugeloberfläche, die gleiche Entfernung vom Aequator haben, so wird die zweite Gleichung (13) für beide Punkte identisch dieselbe bleiben, aber statt der ersten wird man folgende zwei erhalten,

$$\tau' = \tfrac{1}{2}(\tau'' + \tau''') - 90^\circ$$
$$\tau_1' = \tfrac{1}{2}(\tau_1'' + \tau_1''') - 90^\circ$$

wenn die unten mit einem Strich versehenen Buchstaben dem zweiten Punkt angehören. Hat man nun zugleich an einer auf Sternzeit regulirten Uhr die Zeitmomente der beiden Einstellungen beobachtet und mit T und T_1 bezeichnet, so ist, wenn die beiden Punkte Einem Stern angehören,

$$\tau_1 - \tau = T_1 - T$$

und wenn $\mu = 0$ ist, so ist auch

$$\tau_1' - \tau' = T_1 - T$$

Für ein festes Aequatoreal wird μ immer klein, und die Wirkung dieser Grösse daher auf den Unterschied der beiden Einstellungen, wenn diese nur in einer möglichst kurzen Zwischenzeit ausgeführt werden, unmerklich sein. Uebrigens wird man, wenn dieses nicht der Fall sein sollte, μ und m stets so genau ermitteln können, als nöthig ist um ihre Wirkung auf diesen Unterschied durch die erste Formel (3) mit mehr wie hinreichender Genauigkeit berechnen zu können, und eben so verhält es sich mit der Strahlenbrechung, deren Wirkung auf die Stundenwinkel in der Nähe des Meridians überdies klein ist, und deren Wirkung auf den obigen Unterschied der Stundenwinkel also um so viel mehr kleiner sein muss. Die Wirkung von i und k auf denselben ist Null, weil die zweite Formel (13) für beide Einstellungen identisch angenommen werden darf. Hieraus folgen die beiden folgenden Gleichungen:

$$\tau_1'' - \tau'' = \tau_1''' - \tau''' = T_1 - T$$

die stets hinreichende Genauigkeit besitzen werden, deren rechte Seite aber auch, wenn man es für nöthig halten sollte, zufolge der obigen Erklärungen, von der Wirkung von μ und der der Strahlenbrechung befreit werden kann. Man erhält hieraus

$$\tau' - \tau'' = \tfrac{1}{2}(\tau_1''' - \tau'' + T - T_1) - 90^\circ$$

und die Fundamentalgleichung des vor. Art. geht über in

$$\operatorname{cotg} \tfrac{1}{2} (\tau_1''' - \tau'' + T - T_1) = - \sin i \operatorname{tg} (\delta'' + c) - \operatorname{tg} k \cos i \sec (\delta'' + c)$$

Hieraus folgt auf dieselbe Weise wie dort

$$(17^*) \begin{cases} i = \tfrac{1}{4} [(t_1''' - t'' + T' - T_1') - (\tau_1''' - \tau'' + T - T_1)] \operatorname{cotg} \Delta \\ \quad - \tfrac{1}{4} [(t_1''' - t'' + T' - T_1') + (\tau_1''' - \tau'' + T - T_1) - 360^\circ] \operatorname{tg} D \\ k = \tfrac{1}{4} [(t_1''' - t'' + T' - T_1') + (\tau_1''' - \tau'' + T - T_1) - 360^\circ] \cos \Delta \sec D \\ \quad - \tfrac{1}{4} [(t_1''' - t'' + T' - T_1') - (\tau_1''' - \tau'' + T - T_1)] \sin D \operatorname{cosec} \Delta \end{cases}$$

wo t_1''', T', T_1' für den zweiten Stern dasselbe bedeuten, was τ_1''', T, T_1 für den ersten.

Die Collimation c des Declinationskreises kann man durch eine der Gleichungen (15) vermittelst der Einstellungen des Fernrohrs des Aequatoreals in beiden Lagen auf einen beliebigen Gegenstand finden, und man kann daher auch dazu jeden beliebigen Stern wählen, nur muss alsdann unter Umständen die Aenderung, die in der scheinbaren Declination dieses Sterns während der Zwischenzeit der Einstellungen vor sich gegangen ist, berücksichtigt werden. Wenn man für den Stern den Polaris in der Nähe der oberen oder unteren Collimation wählt, so ist jedenfalls die Declinationsänderung so klein, dass sie unberücksichtigt bleiben kann. Man kann diese Methode auch anwenden, wenn man einen (südlichen oder nördlichen) Stern und einen (nördlichen oder südlichen) terrestrischen Gegenstand eingestellt hat, und es ist in diesem Falle nichts weiter zu thun, wie in den (17*) für den terrestrischen Gegenstand $T = T_1$ zu setzen.

11.

Ich komme nun zur Bestimmung der Reductionselemente μ, m und η oder γ, die auf zwei verschiedene Arten, nämlich entweder durch cölestische Beobachtungen, oder durch Hülfe eines der Lage nach bekannten, terrestrischen Gegenstandes und zweier Niveaus sicher ausgeführt werden kann. Zuerst nehme ich die Bestimmung durch cölestische Beobachtungen vor.

Die strenge Auflösung dieser Aufgabe, die in den zu Ende des Art. 2. bemerkten Fällen nothwendig werden kann, beruht auf der Entwickelung von μ, m und γ aus den auf zwei Beobachtungen angewandten Gleichungen (1) oder (2). Lassen wir für einen zweiten Stern t, d, t', d'

bez. dasselbe bedeuten, was τ, δ, τ', δ' für einen Stern überhaupt bedeuten, so giebt die dritte Gleichung (2) für diesen Stern

$$\sin d' = -\cos d \sin \mu \cos (t+\gamma) + \sin d \cos \mu \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

Um hieraus γ und μ zu eliminiren, bedient man sich am Vortheilhaftesten des im Art. 3. eingeführten Winkels π, welcher dem im Art. 1. betrachteten, auf den andern Stern sich beziehenden Dreieck angehört. Entweder unmittelbar aus diesem Dreieck, oder durch eine einfache Combination der Gleichungen (2) und (4) bekommt man

$$\left.\begin{aligned} \sin \mu \sin (\tau+\gamma) &= \cos \delta' \sin \pi \\ \sin \mu \cos (\tau+\gamma) &= \cos \delta' \sin \delta \cos \pi - \sin \delta' \cos \delta \\ \cos \mu &= \cos \delta' \cos \delta \cos \pi + \sin \delta' \sin \delta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (B)$$

Die Gleichung (A) lässt sich aber folgender Maassen stellen:

$$\begin{aligned} \sin d' = &-\cos d \cos (t-\tau) \sin \mu \cos (\tau+\gamma) \\ &+ \cos d \sin (t-\tau) \sin \mu \sin (\tau+\gamma) + \sin d \cos \mu \end{aligned}$$

und hieraus lassen sich durch Hülfe der Gleichungen (B) μ und γ eliminiren, ohne Wurzelgrössen einzuführen. Durch einfache Substitutionen bekommt man

$$\begin{aligned} \sin d' = &(\cos d \cos \delta \cos (t-\tau) + \sin d \sin \delta) \sin \delta' \\ &-(\cos d \sin \delta \cos (t-\tau) - \sin d \cos \delta) \cos \delta' \cos \pi \\ &+ \cos d \sin (t-\tau) \cos \delta' \sin \pi \end{aligned}$$

Setzt man daher

$$\left.\begin{aligned} \cos \zeta \sin \psi &= \cos d \sin (\tau-t) \\ \cos \zeta \cos \psi &= \cos d \sin \delta \cos (\tau-t) - \sin d \cos \delta \\ \sin \zeta &= \cos d \cos \delta \cos (\tau-t) + \sin d \sin \delta \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (C)$$

so wird

$$\cos (\pi-\psi) = \frac{\sin \zeta \sin \delta' - \sin d'}{\cos \zeta \cos \delta'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

womit die Aufgabe gelöst ist. Denn nachdem ζ und ψ aus (C) berechnet worden sind, erhält man π aus (18), hierauf μ und γ aus (B), und m aus den beiden ersten (2) oder (2*). Die Gleichung (18) zeigt, dass π, auf dessen Ermittelung das Hauptsächlichste dieser Auflösung beruht, aus den beiden Ablesungen am Declinationskreise und dem Unterschied der Beobachtungszeiten gefunden wird, welcher in $\tau-t$ enthalten ist.

Die Anwendung der Gleichungen (1) statt der (2) giebt eine Auflösung von derselben Form, in welcher aber π blos aus den Ablesungen an den beiden Kreisen des Aequatoreals gefunden wird, und dessen Bestimmung daher von den Beobachtungszeiten unabhängig ist. Die dritte Gleichung (1) wird erstlich

$$(\mathrm{A}^*)\begin{cases}\sin d = \cos d' \sin\mu\cos(t'+m) + \sin d'\cos\mu \\ \quad = \cos d'\cos(t'-\tau')\sin\mu\cos(\tau'+m) \\ \quad - \cos d'\sin(t'-\tau')\sin\mu\sin(\tau'+m) + \sin d'\cos\mu\end{cases}$$

und aus dem im Art. 1. betrachteten Dreieck, oder durch eine einfache Combination der Gleichungen (1) und (4) ergiebt sich

$$(\mathrm{B}^*)\begin{cases}\sin\mu\sin(\tau'+m) = \cos\delta\sin\pi \\ \sin\mu\cos(\tau'+m) = -\cos\delta\sin\delta'\cos\pi + \sin\delta\cos\delta' \\ \cos\mu = \cos\delta\cos\delta'\cos\pi + \sin\delta\sin\delta'\end{cases}$$

Eliminirt man hiermit μ und $\tau'+m$ in (A*), und setzt

$$(\mathrm{C}^*)\begin{cases}\cos\zeta'\sin\psi' = \cos d'\sin(t'-\tau') \\ \cos\zeta'\cos\psi' = \cos d'\sin\delta'\cos(t'-\tau') - \sin d'\cos\delta' \\ \sin\zeta' = \cos d'\cos\delta'\cos(t'-\tau') + \sin d'\sin\delta'\end{cases}$$

so wird

$$(19) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \cos(\pi-\psi') = \frac{\sin\zeta'\sin\delta - \sin d}{\cos\zeta'\cos\delta}$$

Hier müssen also erst ζ' und ψ' aus (C*) berechnet werden, worauf (19) π giebt, alsdann bekommt man μ und m aus (B*), und γ aus den beiden ersten (1) oder (1*). In diesen Auflösungen muss π durch einen Cosinus bestimmt werden, wodurch manchmal nicht die gewünschte Genauigkeit erlangt wird, aber suchen wir die Relationen zwischen ζ, ζ', ψ und ψ'. Die folgende Gleichung ist identisch

$$\cos\delta'\cos d'\sin(t'-\tau') = \cos\delta'\cos(\tau'+m)\,.\cos d'\sin(t'+m) \\ - \cos\delta'\sin(\tau'+m)\,.\cos d'\cos(t'+m)$$

Substituirt man hierin die auf beide Sterne angewandten beiden ersten Gleichungen (2), so wird nach einer leichten Umstellung:

$$\cos\delta'\cos d'\sin(t'-\tau') = (\cos d\sin\delta\cos(\tau-t) - \sin d\cos\delta)\sin\mu\sin(\tau+\gamma)) \\ - \cos d\sin(\tau-t)\,(\cos\delta\cos\mu + \sin\delta\sin\mu\cos(\tau+\gamma))$$

Die Gleichungen (B) geben aber leicht

$$\sin\mu\sin(\tau+\gamma) = \cos\delta'\sin\pi$$
$$\cos\delta\cos\mu + \sin\delta\sin\mu\cos(\tau+\gamma) = \cos\delta'\cos\pi$$

Durch Hülfe dieser und der (C) erhält man sogleich

$$(\mathrm{D}) \quad . \; . \; . \; . \; . \quad \cos\zeta\sin(\pi-\psi) = \cos\delta'\sin(t'-\tau')$$

Die identische Gleichung

$$\cos\delta'\cos d'\cos(t-\tau') = \cos\delta'\cos(\tau'+m)\,.\cos d'\cos(t'+m) \\ + \cos\delta'\sin(\tau'+m)\,.\cos d'\sin(t'+m)$$

wird durch dieselben Gleichungen (2)

$$\cos\delta'\cos d'\cos(t'-\tau') = \cos d\cos\delta\cos(\tau-t) + \sin d\sin\delta \\ - [\sin\delta\cos\mu - \cos\delta\sin\mu\cos(\tau+\gamma)]\,[\sin d\cos\mu - \cos d\sin\mu\cos(t+\gamma)]$$

woraus vermittelst der auf beide Sterne angewandten dritten Gleichung (2) und der dritten (C)

$$\sin\zeta = \cos d' \cos \delta' \cos (t' - \tau') + \sin d' \sin \delta' \quad . \quad . \quad . \quad (E)$$

folgt, und die Substitution dieser in (18) giebt sogleich

$$\cos\zeta \cos(\pi - \psi) = \cos d' \sin \delta' \cos (t' - \tau') - \sin d' \cos \delta' \quad . \quad (F)$$

Die Vergleichung der Gleichungen (D), (E) und (F) mit den (C*) zeigt, dass $\zeta' = \zeta$ und

$$\pi = \psi + \psi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (20)$$

ist. Man braucht daher (18) oder (19) nicht zur Berechnung von π anzuwenden, sondern erhält diesen Winkel aus den beiden ersten (C), (C*) und (20), und da die Bögen ψ und ψ' aus jenen Gleichungen durch die Tangente bestimmt werden, so wird π stets so sicher gefunden, wie die Data der Aufgabe es zulassen. Es ist leicht zu finden, dass es am Dienlichsten ist, die Sterne so zu wählen, dass ζ klein wird, welches einen Abstand der beiden beobachteten Punkte der Himmelskugel von nahe 90° bedingt.

Man kann aber noch andere Gleichungen zur Bestimmung von π ableiten. Dividirt man (D) durch (18), so wird

$$\operatorname{tg}(\pi - \psi) = \frac{\cos \delta' \cos d' \sin (t' - \tau')}{\sin \zeta \sin \delta' - \sin d'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21)$$

Dividirt man die erste (C) durch (19), so wird

$$\operatorname{tg}(\pi - \psi') = \frac{\cos \delta \cos d \sin (\tau - t)}{\sin \zeta \sin \delta - \sin d} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (21^*)$$

Dividirt man (D) durch (F), so wird

$$\operatorname{tg}(\pi - \psi) = \frac{\sin (t' - \tau')}{\sin \delta' \cos (t' - \tau') - \operatorname{tg} d' \cos \delta'}$$

und dividirt man die erste (C) durch die zweite, so wird

$$\operatorname{tg}(\pi - \psi') = \frac{\sin (\tau - t)}{\sin \delta \cos (\tau - t) - \operatorname{tg} d \cos \delta}$$

wovon die beiden letzten übrigens mit der oben erklärten Bestimmung von π aus (20) identisch sind. Für die Anwendung kann man die obigen Gleichungen so zusammenziehen, wie bei den Gleichungen (1) und (2) gezeigt wurde. Die Gleichungen für die Tangenten von $\pi - \psi$ und $\pi - \psi'$ geben für diese Bögen zwei Werthe, aber vorausgesetzt, dass man ζ immer so bestimmt, dass $\cos\zeta$ positiv wird, welches stets geschehen kann, so geben die obigen Gleichungen zu erkennen, dass eines Theils $\pi - \psi$ und $t' - \tau'$, und andern Theils $\pi - \psi'$ und $\tau - t$ in einem und demselben Halbkreise liegen müssen, wenn $\cos d'$ positiv ist, in entgegengesetzten Halbkreisen hingegen, wenn $\cos d'$ negativ ist.

Man kann nämlich in den vorstehenden Gleichungen t', d', τ', δ' stets so annehmen, wie das mit der oben beschriebenen Bezifferung versehene Aequatoreal sie giebt, während man t, d, τ, δ auf die gewöhnliche Art zählt. Wenn π bestimmt ist, so kann man auch μ, m und γ durch die folgenden Gleichungen berechnen:

$$(22^*)\quad\begin{cases}\sin\tfrac{1}{2}\mu\sin\tfrac{1}{2}(\tau+\tau'+\gamma+m)=\sin\tfrac{1}{2}\pi\cos\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\\ \sin\tfrac{1}{2}\mu\cos\tfrac{1}{2}(\tau+\tau'+\gamma+m)=\cos\tfrac{1}{2}\pi\sin\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\\ \cos\tfrac{1}{2}\mu\sin\tfrac{1}{2}(\tau-\tau'+\gamma-m)=\sin\tfrac{1}{2}\pi\sin\tfrac{1}{2}(\delta+\delta')\\ \cos\tfrac{1}{2}\mu\cos\tfrac{1}{2}(\tau-\tau'+\gamma-m)=\cos\tfrac{1}{2}\pi\cos\tfrac{1}{2}(\delta-\delta')\end{cases}$$

die aus dem im Art. 1. betrachteten Dreieck folgen.

Ich füge noch hinzu, dass die hier angewandten Hülfsgrössen sich leicht construiren lassen. Man wird finden, dass $90^\circ-\zeta$ die Entfernung der beiden Punkte von einander ist, in welchen die beiden Sterne beobachtet worden sind; in dem Dreieck zwischen diesen beiden Punkten und dem Pol des Aequators bedeutet ferner $180^\circ+\psi$ den Winkel am Stern, und in dem zwischen denselben Punkten und dem Pol des Aequatoreals $180^\circ-\psi'$ den Winkel am Stern.

12.

Für die genäherte Auflösung derselben Aufgabe geben die auf zwei Beobachtungen angewandten Gleichungen (3)

$$(22)\quad\ldots\quad\begin{cases}\tau-\tau'=\eta+\mu\,\mathrm{tg}\,\delta'\sin(\tau'+m)\\ \delta-\delta'=\qquad\mu\cos(\tau'+m)\\ t-t'=\eta+\mu\,\mathrm{tg}\,d'\sin(t'+m)\\ d-d'=\qquad\mu\cos(t'+m)\end{cases}$$

von welchen man mit drei ausreicht, da nur drei unbekannte Grössen zu bestimmen sind. Die zweite und vierte derselben reichen aus, um μ und m zu finden; setzt man

$$(23)\quad\ldots\ldots\quad m=x-\tfrac{1}{2}(\tau'+t')$$

so bekommt man aus der Summe und Differenz derselben sogleich

$$(24)\quad\ldots\ldots\quad\begin{cases}\mu\sin x=\dfrac{(d-d')-(\delta-\delta')}{2\sin\frac{1}{2}(\tau'-t')}\\ \mu\cos x=\dfrac{(d-d')+(\delta-\delta')}{2\cos\frac{1}{2}(\tau'-t')}\end{cases}$$

und für die Collimation des Stundenkreises ergeben sich die beiden folgenden Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\eta &= (\tau - \tau') - \mu \operatorname{tg} \delta' \sin(\tau' + m)\\ \eta &= (t - t') - \mu \operatorname{tg} d' \sin(t' + m)\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (25)$$

aus welchen man das arithmetische Mittel nehmen kann. Man kann aber auch alle vier Gleichungen (22) zur Bestimmung von μ, m und η anwenden. Die Unterschiede der ersten und dritten und der zweiten und vierten sind

$$(\tau - \tau') - (t - t') = \mu \left\{ \operatorname{tg} \delta' \sin(\tau' + m) - \operatorname{tg} d' \sin(t' + m) \right\}$$
$$(\delta - \delta') - (d - d') = \mu \left\{ \cos(\tau' + m) - \cos(t' + m) \right\}$$

die durch Einführung des durch (23) bestimmten Hülfswinkels x in folgende übergehen:

$$(\tau - \tau') - (t - t') = \mu \sin x \frac{\sin(\delta' - d')}{\cos\delta' \cos d'} \cos\tfrac{1}{2}(\tau' - t') + \mu \cos x \frac{\sin(\delta' + d')}{\cos\delta' \cos d'} \sin\tfrac{1}{2}(\tau' - t')$$
$$(\delta - \delta') - (d - d') = -2\mu \sin x \sin\tfrac{1}{2}(\tau' - t')$$

woraus man

$$\left.\begin{aligned}\mu \sin x &= \frac{(d - d') - (\delta - \delta')}{2 \sin\frac{1}{2}(\tau' - t')}\\ \mu \cos x &= \frac{\left\{(d - d') - (\delta - \delta')\right\} \sin(d' - \delta') \operatorname{cotg}\frac{1}{2}(\tau' - t') - 2\left\{(t - t') - (\tau - \tau')\right\} \cos d' \cos\delta'}{2 \sin(d' + \delta') \sin\frac{1}{2}(\tau' - t')}\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

erhält, welche μ und x geben, worauf m und η wieder aus (23) und (25) folgen, von welchen jedoch die letztern jetzt, unabhängig von den Beobachtungsfehlern, dasselbe Resultat für η geben müssen, während dieses bei der vorhergehenden Methode nicht der Fall ist, sondern nur dann statt finden musste, wenn keine Beobachtungsfehler vorhanden waren. Man sieht, dass man bei der Anwendung dieser Methode die beiden Sterne nicht so wählen darf, dass $\sin(d' + \delta')$ eine kleine Zahl wird, und ausserdem am Sichersten verfährt, wenn man die beiden Sterne in Stundenwinkeln beobachtet, die nahe 180° von einander verschieden sind, während man bei der vorhergehenden Methode sie so wählen muss, dass der Unterschied der Stundenwinkel in der Nähe von 90° oder 270° liegt.

Wenn man statt der einmaligen Beobachtung zweier Sterne Einen Stern zwei Mal beobachtet hat, so vereinfachen sich die Gleichungen (26). Es ist nämlich in diesem Falle erlaubt, in den Coefficienten $\frac{1}{2}(d' + \delta')$ für d' und δ', und Null für $d' - \delta'$ zu setzen. Man erhält daher in diesem Falle statt der (26) die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}\mu \sin x &= \frac{(d - d') - (\delta - \delta')}{2 \sin\frac{1}{2}(\tau' - t')}\\ \mu \cos x &= -\frac{(t - t') - (\tau - \tau')}{2 \sin\frac{1}{2}(\tau' - t')} \operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(d' + \delta')\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (27)$$

Man sieht, dass man bei dieser Bestimmung von x und μ den Stern dem Aequator nicht zu nahe wählen darf. Ueberhaupt bemerke ich noch, dass man bei der Anwendung der in diesem Artikel entwickelten Näherungsmethoden nicht zwei Beobachtungen, die in den entgegengesetzten Einstellungsarten des Aequatoreals angestellt sind, mit einander unmittelbar verbinden darf, wie bei den strengen Methoden des vor. Art. erlaubt war. Wenn daher die beiden Beobachtungen in der That durch entgegengesetzte Einstellungsarten erlangt worden sind, so muss man die eine derselben durch die Gleichungen

$$\begin{matrix} \tau' = 180^\circ + \tau'_1 \\ \delta' = 180^\circ - \delta'_1 \end{matrix} \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} t' = 180^\circ + t'_1 \\ d' = 180^\circ - d'_1 \end{matrix}$$

mit der andern gleichartig machen.

Da wir hier vier Gleichungen zur Bestimmung von nur drei Grössen angewandt haben, so ist klar, dass sich eine vierte Grösse ausserdem noch bestimmen lassen muss, und man findet leicht, dass diese die Collimation des Declinationskreises ist, die in der That aus den Gleichungen (26) und (27) eliminirt ist, indem man in dem Ausdruck $(d-d')-(\delta-\delta')$, d'' und δ'' statt d' und δ' schreiben darf, wie auch c beschaffen ist. Substituirt man nun

$$d' = d'' + c \quad \text{und} \quad \delta' = \delta'' + c$$

in die vierte und zweite der Gleichungen (22), und nimmt ihre Summe, so bekommt man leicht

$$(28) \quad . \quad . \quad c = \tfrac{1}{2}(d-d'') + \tfrac{1}{2}(\delta-\delta'') - \mu \cos x \cos \tfrac{1}{2}(\tau' - t')$$

welche Gleichung eine von den früheren unabhängige Bestimmung der Collimation c ist. Doch ist zu bemerken, dass die Bestimmung von c durch die Gleichungen (15) die einfachste und sicherste ist, und dass man daher die durch (28) erlangte entweder nur als Controlle, oder nur dann anwenden wird, wenn die Beobachtungen, die zu reduciren sind, zur Bestimmung von c durch (15) keine Data liefern. Wenn c gross ist, und aus der eben angeführten Ursache nicht aus (15) berechnet werden kann, so muss man doch für die Berechnung der Coefficienten in (25), (26) und (27) jedenfalls im Voraus einen so weit genäherten Werth davon kennen, als nöthig ist, um für diese Coefficienten d' und δ' hinreichend genau berechnen zu können.

§. II.

Anwendung und Bestimmung des zweiten Systems von Reductionselementen.

13.

Das zweite System von Reductionselementen steht schon in so fern mit dem ersten System in Verbindung, als es dient die zweite, zu Anfang des Art. 11. angekündigte Art μ, m und η oder γ zu finden in Ausführung zu bringen. Für die strenge Auflösung der betreffenden Aufgabe lege man eine verticale Ebene durch die Achse des Stundenkreises, dann ist der Winkel, den diese mit der Ebene des Meridians des Beobachtungsortes macht, das Azimuth der Stundenachse; ich werde dieses Azimuth α nennen, und von Süden nach Westen zählen. Bezeichnet man ferner die Polhöhe des Beobachtungsortes mit φ, und den Winkel, den die Stundenachse mit dem Horizont macht, mit φ', so sind in dem Dreieck zwischen dem Zenith, dem Pol des Aequators, und dem des Aequatoreals, den ich mir in der im Art. 1. angenommenen Lage denke, die Seiten $90°-\varphi$, $90°-\varphi'$ und μ, und der Seite μ liegt der Winkel $-\alpha$ gegenüber. Zieht man nun vom Pol des Aequatoreals aus, ausserhalb dieses Dreiecks, den Bogen grössten Kreises, welcher dem Meridian des Aequatoreals entspricht, und nennt den Winkel, den dieser mit der Seite $90°-\varphi'$ einschliesst, q, so ist $360°-q$ die von der Wirkung von i und k befreite Angabe des Stundenkreises, wenn die Absehenslinie des Fernrohrs auf das Zenith gerichtet ist. Zufolge des im Art. 1. beschriebenen Dreiecks ist aber der in unserer Figur vom Meridian des Aequatoreals und dem Bogen μ eingeschlossene Winkel gleich m, und hieraus folgt sogleich, dass in unserm Dreieck der der Seite $90°-\varphi$ gegenüber liegende Winkel gleich $m-q$ ist. Es folgen daher aus demselben die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned}\sin\mu\sin(m-q) &= -\cos\varphi\sin\alpha\\ \sin\mu\cos(m-q) &= -\cos\varphi\sin\varphi'\cos\alpha+\sin\varphi\cos\varphi'\\ \cos\mu &= \cos\varphi\cos\varphi'\cos\alpha+\sin\varphi\sin\varphi'\end{aligned}\right\}\;\ldots(29)$$

wodurch μ und m erhalten werden, wenn α, φ' und q bekannt sind. Der Ausdruck für γ kann auf zwei Arten, entweder aus demselben Dreieck, da der dritte Winkel desselben $180°-\gamma$ ist, oder durch die

Gleichungen (1) erhalten werden. Nimmt man für den Punkt, dessen Polarcoordinaten τ und δ sind, das Zenith an, so wird $\tau = 0$, $\delta = \varphi$, $\tau' = 360° - q$, $\delta' = \varphi'$, und hiemit geben die beiden ersten Gleichungen (1), übereinstimmend mit dem obigen Dreieck:

$$(30) \quad . \; . \; \begin{cases} \cos\varphi \sin\gamma = \cos\varphi' \sin(m-q) \\ \cos\varphi \cos\gamma = \cos\varphi' \cos\mu \cos(m-q) - \sin\varphi' \sin\mu \end{cases}$$

welche γ geben, nachdem durch die (29) μ und $m-q$ ermittelt worden sind. Durch die folgenden Gleichungen

$$(30^*) \quad . \; . \; \begin{cases} \sin\mu \sin\gamma = -\cos\varphi' \sin\alpha \\ \sin\mu \cos\gamma = \quad \cos\varphi' \sin\varphi \cos\alpha - \sin\varphi' \cos\varphi \end{cases}$$

ist die Bestimmung von γ unmittelbar von α und φ' abhängig gemacht. Die Bestimmung von μ, m und γ ist somit durch die Gleichungen (29) und (30) oder (30*) auf die von α, φ' und q hingeführt, und man kann daraus leicht die Gleichungen ableiten, die α, φ' und q durch μ, m und γ geben.

14.

Theoretisch betrachtet kann die Bestimmung von zwei der im vor. Art. angeführten Grössen α, φ' und q durch die Einstellung des Fernrohrs des Aequatoreals auf einen der Lage nach bekannten, terrestrischen Gegenstand ausgeführt werden; die Bestimmung der dritten Grösse muss jedenfalls durch ein anderes äusseres Hülfsmittel erlangt werden. Zur Anwendung ist jedoch diese Art der Bestimmung diesser Grössen wenig geeignet, denn es wird sich zeigen, dass nur die eine derselben, nämlich α, mit Sicherheit durch den terrestrischen Gegenstand erlangt werden kann, und dass man daher zur sichern Bestimmung von φ' und q sich zwei anderer äusserer Hülfsmittel bedienen muss.

Sei a das Azimuth und z die Zenithdistanz irgend eines Gegenstandes, durch dessen Einstellung im Aequatoreal man, nachdem die Ablesungen von der Einwirkung der Reductionselemente i, k und c befreit worden sind, t' und d' erhalten habe. Betrachten wir nun das Dreieck zwischen diesem Gegenstande, dem Zenith und dem Pol des Aequatoreals, so sind die Seiten desselben z, $90° - d'$ und $90° - \varphi'$, und es sind ferner offenbar der Winkel am Pol $t' + q$, und der am Zenith $180° - (a - \alpha)$. Wir erhalten also

$$\left.\begin{aligned}\sin z \sin(a-\alpha) &= \cos d' \sin(t'+q)\\ \sin z \cos(a-\alpha) &= \cos d' \sin\varphi' \cos(t'+q) - \sin d' \cos\varphi'\\ \cos z &= \cos d' \cos\varphi' \cos(t'+q) + \sin d' \sin\varphi'\end{aligned}\right\} \quad \ldots (31)$$

Wollte man nun blos entweder φ' oder q durch ein anderes äusseres Hülfsmittel bestimmen, so müsste man entweder q oder φ' durch die dritte der vorstehenden Gleichungen ermitteln. Aber jeder dieser Bögen wird vermittelst dieser Gleichung, wenn die andern darin vorkommenden Grössen bekannt sind, durch einen Cosinus erhalten, und kann daher nur mit geringer Genauigkeit erhalten werden, wenn die Lage des Gegenstandes so beschaffen wäre, dass dieser Cosinus nahe gleich ± 1 würde. Aber nicht blos in diesen Fällen, sondern auch in denen, wo dieser Cosinus so klein ist, dass man den dazu gehörigen Bogen aus den trigonometrischen Tafeln mit Sicherheit entnehmen kann, ist diese Bestimmung mit einer wesentlichen Unsicherheit behaftet, die daher rührt, dass man, sei es φ' oder q, aus der Zenithdistanz des Gegenstandes ermitteln muss, die wegen der terrestrischen Strahlenbrechung grossen Schwankungen unterworfen ist. Man kann daher durch den terrestrischen Gegenstand nur α mit Sicherheit bestimmen, und muss sich zur Bestimmung von beides φ' und q zwei anderer äusserlicher Hülfsmittel bedienen. Diese Bestimmung von α geschieht durch den Quotienten aus den beiden ersten Gleichungen (31), nämlich durch

$$\operatorname{tg}(a-\alpha) = \frac{\cos d' \sin(t'+q)}{\cos d' \sin\varphi' \cos(t'+q) - \sin d' \cos\varphi'},$$

und gewährt, weil sie durch die Tangente geschieht, und von der Zenithdistanz z, folglich auch von deren Veränderungen unabhängig ist, stets volle Sicherheit, der Gegenstand mag liegen wo er wolle.

15.

Ich werde jetzt aus den im vor. Art. entwickelten Gleichungen eine genäherte Auflösung derselben Aufgabe ableiten, die auf die Annahme gegründet werden soll, dass α und $\varphi - \varphi'$ kleine Grössen sind. Nennt man den Stundenwinkel und die Declination des terrestrischen Gegenstandes t und d, so bekommt man zuerst die bekannten Relationen

$$\left.\begin{aligned}\sin z \sin a &= \cos d \sin t\\ \sin z \cos a &= \cos d \sin\varphi \cos t - \sin d \cos\varphi\\ \cos z &= \cos d \cos\varphi \cos t + \sin d \sin\varphi\end{aligned}\right\} \quad \ldots (32)$$

Setzt man nun in die beiden ersten Gleichungen (31), $z+\Delta z$ für z, $t+(t'-t+q)$ für $t'+q$, $d+(d'-d)$ für d', $\varphi+(\varphi'-\varphi)$ für φ', so werden in Folge der eben aufgestellten Annahmen auch Δz, $t'-t+q$ und $d'-d$ kleine Grössen sein, von welchen man wie von jenen die Quadrate und Producte übergehen kann. Entwickelt man daher die (31) in Bezug auf diese Grössen, und zieht die (32) davon ab, so ergiebt sich:

$$(33)\quad \begin{cases} \Delta z \cos z \sin a - \alpha \sin z \cos a = (t'-t+q) \cos d \cos t - (d'-d) \sin d \sin t \\ \Delta z \cos z \cos a + \alpha \sin z \sin a = -(t'-t+q) \cos d \sin \varphi \sin t \\ \qquad -(d'-d)(\sin d \sin \varphi \cos t + \cos d \cos \varphi) \\ \qquad +(\varphi'-\varphi)(\cos d \cos \varphi \cos t + \sin d \sin \varphi) \end{cases}$$

und wenn man hieraus Δz eliminirt, so wird

$$\begin{aligned} \alpha \sin z = & -(t'-t+q)(\cos t \cos a + \sin t \sin a \sin \varphi) \cos d \\ & +(d'-d)(\sin d \sin t \cos a - \sin d \cos t \sin a \sin \varphi - \cos d \sin a \cos \varphi) \\ & +(\varphi'-\varphi)(\cos d \cos \varphi \cos t + \sin d \sin \varphi) \sin a \end{aligned}$$

Um die Coefficienten dieser Gleichung zu vereinfachen, führe ich den Winkel am Gegenstande zwischen dem Vertical- und dem Declinationskreise ein, und nenne ihn ε, dann giebt das Dreieck zwischen dem Gegenstande, dem Zenith und dem Pol des Aequators

$$\begin{aligned} \sin \varepsilon \cos d &= \sin a \cos \varphi \\ \sin \varepsilon \sin d &= \sin a \cos t \sin \varphi - \cos a \sin t \\ \cos \varepsilon &= \sin a \sin t \sin \varphi + \cos a \cos t \\ \cos z &= \cos \varphi \cos d \cos t + \sin \varphi \sin d \\ \sin a \cos z &= \sin t \cos \varepsilon \sin d + \cos t \sin \varepsilon \end{aligned}$$

und die vorstehende Gleichung geht dadurch über in

$$\alpha \sin z = -(t'-t+q) \cos d \cos \varepsilon - (d'-d) \sin \varepsilon + (\varphi'-\varphi)(\sin t \cos \varepsilon \sin d + \cos t \sin \varepsilon)$$

Unter der Annahme, dass α, μ und $\varphi'-\varphi$ kleine Grössen sind, geben die Gleichungen (29)

$$\begin{aligned} \mu \sin (m-q) &= -\alpha \cos \varphi \\ \mu \cos (m-q) &= \varphi-\varphi' \end{aligned}$$

Schreibt man nun p für $\varphi-\varphi'$, und setzt

$$(34)\quad \ldots\ldots \begin{cases} t'-t+q+p \operatorname{tg} d \sin t = g \\ d'-d \quad +p \cos t \quad = h \\ \qquad g \cos d \quad = \lambda \sin l \\ \qquad h \quad = \lambda \cos l \end{cases}$$

so wird die obige Gleichung

$$(35)\quad \ldots\ldots\ldots \quad \mu = \lambda \frac{\cos \varphi}{\sin z} \sin (l+\varepsilon)$$

wo u für $-\alpha \cos \varphi$ geschrieben ist. Ist hieraus u berechnet, so geben die vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}\mu \sin (m-q) = u \\ \mu \cos (m-q) = p\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (36)$$

Der Quotient aus den Gleichungen (30) giebt zuerst

$$\operatorname{cotg} \gamma = \operatorname{cotg} (m-q) - \mu \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sin (m-q)}$$

und hieraus folgt

$$m-\gamma-q = -\mu \sin \gamma \operatorname{tg} \varphi$$

oder da $m-q$ und γ nur um eine Grösse erster Ordnung von einander verschieden sind,

$$\eta = q - u \operatorname{tg} \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (37)$$

Durch diese Gleichungen erhält man μ, m und η, nachdem man p und q durch andere Hülfsmittel bestimmt hat. Diese Auflösung ist identisch mit derjenigen, die ich in meiner früheren Abhandlung über das Heliometer gegeben habe. Sie verlangt nicht, dass man am Gegenstande den Punkt einstelle, dessen Stundenwinkel und Declination t und d sind, sondern gestattet dafür jeden andern demselben nahe liegenden, in demselben Vertikal befindlichen zu wählen, und macht also eine Erhebung oder Senkung des Gegenstandes durch die Strahlenbrechung unschädlich. Sie gestattet ferner den Gegenstand in jedem beliebigen Punkt des Horizonts oder der Nähe desselben zu wählen.

Die Auflösung, die Bessel von dieser Aufgabe gegeben hat, ist particulär und nur zur Anwendung geeignet, wenn der Gegenstand im Meridian oder in der Nähe desselben liegt. Man erhält sie aus den beiden Gleichungen (33), wenn man darin $\Delta z = 0$ macht, und $(d' - d)$ eliminirt.

Wenn man nur eine Einstellung des Gegenstandes in der einen Lage des Aequatoreals gemacht hat, und die unmittelbar dadurch erhaltenen Ablesungen t'' und d'' nennt, so ist zufolge der Gleichungen (7)

$$\left.\begin{array}{l}t' = t'' + i \operatorname{tg} (d'' + c) + k \sec (d'' + c) \\ d' = d'' + c\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \quad (38)$$

Hat man aber den Gegenstand in beiden Lagen des Aequatoreals eingestellt, und in der zweiten Lage die Ablesungen t''' und d''' erhalten, so geben die Gleichungen (13)

$$\left.\begin{array}{l}t' = \frac{1}{2} (t'' + t''') - 90^\circ \\ d' = 90^\circ - \frac{1}{2} (d''' - d'')\end{array}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (39)$$

ohne die Kenntniss von i, k und c voraus zu setzen.

Wenn man fortwährend einen und denselben Gegenstand für die in Rede stehenden Bestimmungen anwendet, so kann es vortheilhaft werden, statt des Ausdrucks (35) für u einen anzuwenden, welcher diese Grösse explicite als linearische Function von $t'-t+q$, $d'-d$ und p giebt. Man findet leicht aus (34) und (35), dass

$$(35^*)\quad u = \frac{\cos\varphi\cos\varepsilon\cos d}{\sin z}(t'-t+q) + \frac{\cos\varphi\sin\varepsilon}{\sin z}(d'-d) + \cos\varphi\sin a\,\mathrm{cotg}\,z.p$$

und kann sich die Coefficienten dieser drei Glieder ein für alle Mal berechnen. Man sieht aus diesem Ausdruck, dass der Coefficient von p Null ist, wenn der Gegenstand im Horizont des Aequatoreals liegt, und es wird daher, wenn dieses nahe der Fall ist, die Wirkung von p auf u unmerklich sein.

16.

Ein sicheres Mittel zur Auffindung von p und q, und der etwa im Laufe der Zeit damit vorgehenden Veränderungen besteht darin, dass man an der Büchse der Stundenachse zwei Niveaus befestigen lässt, wovon das eine von Süden nach Norden, und das andere von Osten nach Westen gerichtet sein muss. Hat man einmal, während man μ, m und η vermittelst einer der Methoden der Art. 11. oder 12. durch cölestische Beobachtungen bestimmte, diese beiden Niveaus zugleich abgelesen, so giebt eine spätere Aenderung der Blasen derselben die Aenderungen an, die p und q erlitten haben, und sollte man Aenderungen in der relativen Lage dieser Niveaus und der Büchse der Stundenachse befürchten, so kann man der nachtheiligen Wirkung derselben dadurch vorbeugen, dass man von Zeit zu Zeit die Bestimmung durch cölestische Beobachtungen wiederholt.

Ich nehme an, dass wie gewöhnlich die Bezifferung der Scalen des Niveaus von der Mitte nach beiden Enden hin wächst, und dass man bei der Bestimmung von μ, m und η durch cölestische Beobachtungen an denselben die Zahlenangaben N_0, S_0, O_0, W_0 abgelesen habe, wo die gewählten Buchstaben die Richtung der Weltgegenden bezeichnen, nach welchen die Ablesungen statt gefunden haben. Die Werthe von μ, m, η, p und q, die man durch dieses Verfahren erhält, will ich mit μ_0, m_0, η_0, p_0 und q_0 bezeichnen, und es ist also zufolge der Gleichungen (36) und (37), wenn man die Glieder zweiter Ordnung übergeht,

$$(40)\quad \ldots\quad \begin{cases} p_0 = \mu_0 \cos(m_0 - \eta_0) \\ q_0 = \eta_0 + \mu_0 \sin(m_0 - \eta_0)\,\mathrm{tg}\,\varphi \end{cases}$$

Wenn man nun zu irgend einer andern Zeit an diesen Niveaus die Zahlen N, S, O, W abgelesen hat, so ist klar, dass die Differenz $S-S_0$ der Differenz $p-p_0$, und die mit sec φ multiplicirte Differenz $O-O_0$ der Differenz $q-q_0$ proportional ist. Denn die Veränderung der Grösse q bezeichnet eine Drehung des Aequatoreals um die Stundenachse, und wird daher durch das von Ost nach West gerichtete Niveau nicht unmittelbar, sondern im umgekehrten Verhältnisse des Halbmessers des Parallels, welcher durch das Zenith geht, zum Halbmesser des Aequators angegeben. Wenn daher die Werthe der Scalentheile der beiden Niveaus mit s und s' bezeichnet werden, so ist

$$(S-S_0)\,s = p-p_0$$
$$(O-O_0)\,s' \sec\varphi = q-q_0$$

und die Ablesungen an den andern Enden dieser Niveaus geben auf gleiche Weise

$$(N_0-N)\,s = p-p_0$$
$$(W_0-W)\,s' \sec\varphi = q-q_0$$

aus welchen Gleichungen, um die Veränderungen in den Längen der Niveaublasen zu eliminiren, das Mittel genommen werden muss. Es wird daher überhaupt

$$\left.\begin{aligned} p &= P + \frac{S-N}{2}\,s \\ q &= Q + \frac{O-W}{2}\,s' \sec\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (41)$$

nachdem ein für alle Mal

$$\left.\begin{aligned} P &= p_0 - \frac{S_0-N_0}{2}\,s \\ Q &= q_0 - \frac{O_0-W_0}{2}\,s' \sec\varphi \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (42)$$

berechnet worden ist. Hat man nun zu irgend einer Zeit den bekannten terrestrischen Gegenstand eingestellt, die beiden Kreise des Aequatoreals und die beiden Niveaus abgelesen, so geben die (41) p und q, und hierauf erhält man aus (34), (35), (36) und (37), oder aus (35*), (36) und (37) μ, m und η.

17.

Man kann auch durch Anwendung eines Collimators und ohne Zuziehung von cölestischen Beobachtungen p_0 und q_0 bestimmen. Man muss zu dem Ende den Collimator nach und nach nördlich, südlich, östlich und westlich vom Aequatoreal aufstellen. Wenn man diese Aufgabe in der Voraussetzung lösen will, dass der auf eine unveränderte, nahe 90°

betragende, übrigens unbekannte Zenithdistanz zeigende Collimator in diesen vier Aufstellungen unter beliebigen, aber unbekannten Azimuthen aufgestellt worden sei, so sind es überhaupt die Gleichungen (31), aus welchen die Auflösung entwickelt werden muss; da ich aber hier annehmen werde, dass derselbe nahe in den oben bezeichneten Cardinalpunkten des Horizonts aufgestellt werde, so reicht man mit der dritten (31), nämlich mit

$$\cos z = \cos d' \cos \varphi' \cos (t' + q) + \sin d' \sin \varphi'$$

aus. Sei der Collimator nun erstlich einmal nahe im Nordpunkt, und einmal nahe im Südpunkt aufgestellt worden, so giebt diese Gleichung zu erkennen, dass die Ablesungen am Stundenkreise nur eine kleine Grösse zweiter Ordnung im Resultat hervorbringen können, und dass dieses selbst dann noch statt findet, wenn man bei der zweiten Aufstellung das Aequatoreal ein Weniges um die Achse des Stundenkreises hat bewegen müssen, um das Fadenkreuz des Collimators einstellen zu können. Wir können also hiebei von den Angaben des Stundenkreises ganz absehen. Ich nehme nun an, dass bei beiden Einstellungen der Stundenkreis Null, oder wenigstens nahe Null gezeigt habe, dass man also das Fernrohr des Aequatoreals von Süden nach Norden oder entgegengesetzt bewegt habe, ohne eine andere, wie höchstens eine kleine, Drehung um die Stundenachse vorzunehmen, dann kann für beide Einstellungen $\cos (t' + q) = +1$ gesetzt werden, und die obige Gleichung giebt

$$\cos d_2 \cos \varphi' + \sin d_2 \sin \varphi' = \cos d_4 \cos \varphi' + \sin d_4 \sin \varphi'$$

wo d_2 und d_4 die von der Collimation c befreiten Ablesungen am Declinationskreise sind. Zufolge der oben verlangten Bezifferung des Declinationskreises wird die eine dieser Ablesungen im zweiten Quadranten liegen, und die andere eine negative, zwischen 0 und $-90°$ liegende, Zahl sein, und deshalb habe ich die Indices 2 und 4 gewählt, um sie zu bezeichnen. Unter diesen Umständen giebt die vorstehende Gleichung

$$(43) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \varphi' = \tfrac{1}{2}(d_2 + d_4)$$

Wählt man die andere Lage des Aequatoreals für diese Einstellungen, in welcher also $\cos (t' + q) = -1$ gesetzt werden muss, und bezeichnet man aus demselben Grunde wie oben die dadurch erhaltenen, von der Collimation befreiten Ablesungen am Declinationskreise mit d_1 und d_3, so giebt dieselbe Gleichung:

$$(44) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \varphi' = 180° - \tfrac{1}{2}(d_1 + d_3)$$

Wendet man beide Arten dieser Bestimmung an, und nimmt aus (43) und (44) das arithmetische Mittel, so findet man leicht, dass dieses von der Collimation des Declinationskreises unabhängig ist. Hat man nun auf diese Art φ' gefunden, so erhält man durch Zuziehung der bekannten Polhöhe des Beobachtungsortes

$$p_0 = \varphi - \varphi' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (45)$$

und die gleichzeitig vorgenommene Ablesung des von Süden nach Norden gerichteten Niveaus giebt N_0 und S_0. Hiemit hat man die Data für die erste der Gleichungen (42) erlangt.

18.

Man stelle ausserdem den Collimator einmal nahe im Ostpunkt, und einmal nahe im Westpunkt auf, und nenne die dabei erlangten, und durch die Ausdrücke (7) von der Wirkung von i, k und c befreiten Ablesungen t_1, d_1, t_2, d_2, dann giebt die im vor. Art. angewandte Gleichung

$$\cos d_1 \cos \varphi' \cos (t_1 + q_0) + \sin d_1 \sin \varphi' = \cos d_2 \cos \varphi' \cos (t_2 + q_0) + \sin d_2 \sin \varphi'$$

Ich nehme nun an, dass bei diesen beiden Einstellungen der Stundenkreis nahe 90° gezeigt hat, dann wird der Declinationskreis das eine Mal nahe 0, und das andere Mal nahe 180° gezeigt haben. Entwickelt man unter diesen Voraussetzungen die vorstehende Gleichung, und bleibt bei den Grössen erster Ordnung stehen, so bekommt man

$$q_0 = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(t_1 + t_2) - \tfrac{1}{2}(180^\circ - d_1 - d_2) \operatorname{tg} \varphi' \quad . \quad . \quad (46)$$

Hat man diese Einstellungen in der andern Lage des Aequatoreals gemacht, in welcher der Stundenkreis beide Male nahe 270° zeigt, und nennt die jetzt erhaltenen, auch von der Einwirkung von i, k und c befreiten, Ablesungen t_1', d_1', t_2', d_2', so bekommt man eben so

$$q_0 = 270^\circ - \tfrac{1}{2}(t_1' + t_2') + \tfrac{1}{2}(180^\circ - d_1' - d_2') \operatorname{tg} \varphi' \quad . \quad . \quad (47)$$

Das von Osten nach Westen gerichtete Niveau giebt zugleich O_0 und W_0, und somit hat man die Data für die zweite Gleichung (42) erlangt.

Wenn das Aequatoreal um eine verticale Achse drehbar ist, so können die eben erklärten Ermittelungen von p_0 und q_0 ohne Collimator, blos durch Hülfe Eines terrestrischen Gegenstandes ausgeführt werden. Man braucht nur, indem man sonst nichts am Aequatoreal ändert, dasselbe vor jeder der vier Einstellungen so um die verticale Achse zu drehen, dass der terrestrische Gegenstand in Bezug auf die Stunden-

achse desselben nach und nach nördlich, südlich, östlich und westlich wird. Die hierauf durch die Ausdrücke (43) bis (47) erhaltenen Werthe von p_0 und q_0 gelten für den verticalen Stand der genannten Achse, nivellirt man diese daher durch die beiden Niveaus, so bekommt man die Grössen N_0, S_0, O_0, W_0, die jetzt diejenigen Angaben der Niveaus bedeuten, die statt finden, wenn die verticale Achse wirklich vertical steht.

19.

Es giebt noch ein anderes, einfaches und sicheres Mittel um q zu finden, und dieses besteht in der Nivellirung der Declinationsachse. Es ist nämlich durch Art. 13. klar, dass wenn $i=0$, und die Declinationsachse horizontal ist, der Stundenkreis $360°-q$ zeigen muss. Ich will daher jetzt annehmen, dass das Aequatoreal so eingerichtet sei, dass man durch ein an die Zapfen der Declinationsachse aufzuhängendes, oder darauf aufzustellendes Niveau dieselbe so nivelliren könne, wie man die Achse eines Passageninstruments oder eines Meridiankreises nivellirt.

Sei das westliche Ende der Declinationsachse dasjenige, welches mit der nach Norden gerichteten Verlängerung der Stundenachse den Winkel $90°+i$ macht, und habe man durch Hülfe des genannten Niveaus die Neigung der Declinationsachse gegen den Horizont n Secunden gefunden, und zwar n positiv genommen, wenn das w e s t l i c h e Ende der Declinationsachse das höhere ist, sei ferner in dieser Lage derselben die Ablesung am Stundenkreise q', so ist das Dreieck zwischen dem Zenith, dem Pol des Aequatoreals und dem westlichen Ende der Declinationsachse zu betrachten. In diesem sind die Seiten $90°-\varphi'$, $90°+i$ und $90°-n$, und der Winkel am Pole ist $90°+q'+q$, es wird also

$$-\sin n = \sin\varphi' \sin i + \cos\varphi' \cos i \sin(q'+q)$$

und hieraus folgt

$$(48) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad -q = q' + n \sec\varphi' + i \operatorname{tg}\varphi'$$

woraus q zu jeder Zeit einfach und sicher bestimmt werden kann. Man kann ausserdem noch immer p durch das von Norden nach Süden gerichtete, und an der Büchse der Stundenachse befestigte, Niveau so bestimmen, wie im Vorhergehenden gezeigt worden ist, und α durch den bekannten, terrestrischen Gegenstand, worauf man wieder μ, m und η durch die Methode des Art. 15. erhält.

20.

Ich füge hier hinzu, dass man auch mit einem gut gebauten Aequatoreal die Zeit bestimmen kann, und zwar am Einfachsten nachdem man durch die eben entwickelte Methode q ermittelt hat. Ich rede hier nicht davon, dass man hierauf das Aequatoreal wie ein Passageninstrument behandeln kann, weil ich weiter unten darauf zurück kommen werde, aber wenn die Theilung des Stundenkreises hinreichend fein und genau ist, so kann man, indem man die Drehbarkeit des Aequatoreals um die Stundenachse mit anwendet, in kurzer Zeit die Durchgänge mehrerer Fundamentalsterne, die nicht allzufern vom Aequator sind, beobachten, wobei man jedes Mal den Stundenkreis und wenigstens bei Einem dieser Sterne auch den Declinationskreis ablesen muss. Man wählt am Vortheilhaftesten diese Sterne so, dass man sie nicht allzuweit vom Meridian beobachten kann. Hierauf oder zwischen jenen Beobachtungen muss man einen passenden, vom Pol nicht allzu entfernten Stern beobachten, und wieder beide Kreise ablesen, worauf man durch die Methoden des Art. 12. μ und m erhält, die dort unabhängig vom Stande der Uhr gefunden werden. Aus μ, m und q erhält man hierauf die Collimation des Stundenkreises durch (37), nämlich

$$\eta = q - \mu \sin(m - q) \operatorname{tg} \varphi$$

Nennt man nun α die gerade Aufsteigung irgend eines der beobachteten Sterne, T die Uhrzeit der Beobachtung und ΔT die Correction der Uhr gegen Sternzeit, dann ergiebt sich aus (25) für jeden beobachteten Stern

$$\Delta T = \alpha - T + \tfrac{1}{15}(\tau' + \eta) + \tfrac{1}{15}\mu \operatorname{tg} \delta' \sin(\tau' + m)$$

welche den Stand der Uhr giebt.

21.

Wenn man q durch die Methoden der Art. 18. oder 19. bestimmt hat, und übrigens, wie sonst hier vorausgesetzt wird, den Uhrstand kennt, so kann man auch μ, m und η durch einmalige Beobachtung Eines Sterns finden. Die Gleichung (37) giebt

$$\eta = q - \mu \sin(m - q) \operatorname{tg} \varphi \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (49)$$

und substituirt man diesen Werth von η in die Ausdrücke (3), so erhält man daraus leicht

$$(50) \quad . \quad . \quad \begin{cases} \mu \sin(\tau'+m) = \dfrac{(\tau-\tau'-q)-(\delta-\delta')\,\mathrm{tg}\,\varphi\,\sin(\tau'+q)}{\mathrm{tg}\,\delta'-\mathrm{tg}\,\varphi\,\cos(\tau'+q)} \\ \mu \cos(\tau'+m) = (\delta-\delta') \end{cases}$$

woraus, da τ' bekannt ist, μ und m folgen, worauf η durch (49) erhalten wird. Die (50) zeigen, dass man sich zu dieser Bestimmung weder eines Sterns bedienen darf, welcher dem Zenith, noch eines welcher dem Horizont und dem ersten Vertical nahe ist, da in diesen Fällen der Nenner der ersten derselben klein wird.

22.

Bis jetzt habe ich die wegen der Aufstellung des Aequatoreals erforderlichen Reductionen der Beobachtungen von μ, m und η abhängig gemacht, allein man kann sie auch unmittelbar von α, p und q abhängig machen. Um die hieraus entstehenden Ausdrücke möglichst einfach zu machen werde ich indess nicht α und p selbst, sondern zwei andere damit in enger Verbindung stehende Constanten einführen. Im Art. 15. wurde schon $u = -\alpha \cos\varphi$ gesetzt, setzt man nun hier

$$(51) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} u' = u \cos q + p \sin q \\ p' = -u \sin q + p \cos q \end{cases}$$

so wird zufolge der (36) $\mu \sin m = u'$, $\mu \cos m = p'$, und substituirt man diese sowohl wie (37) in die (3), so ergiebt sich

$$(51^*) \quad . \quad \begin{cases} \tau = \tau' + (q - u\,\mathrm{tg}\,\varphi) + p'\,\mathrm{tg}\,\delta' \sin\tau' + u'\,\mathrm{tg}\,\delta' \cos\tau' \\ \delta = \delta' + p' \cos\tau' - u' \sin\tau' \end{cases}$$

die man, wenn α, p und q im Voraus ermittelt worden sind, auch zur Reduction der Beobachtungen anwenden kann, allein wenn viele Beobachtungen zu reduciren sind, so scheint es vortheilhafter durch die Methode des Art. 15. μ, m und q aus u, p und q zu berechnen, und darauf die Ausdrücke (3) zur Reduction derselben anzuwenden.

Die vorstehenden Gleichungen können übrigens, wenn man die ähnlichen, welche die Beobachtung eines zweiten Sterns liefert, mit anwendet, dienen um u', p' und $q - u\,\mathrm{tg}\,\varphi$, das ist η, unmittelbar aus cölestischen Beobachtungen zu finden. Nennt man, wie in den Artt. 11. und 12. für den zweiten Stern die analogen Grössen t, d, t', d', so bekommt man der ersten Methode des Art. 12. analog

$$(52) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \begin{cases} u' = \dfrac{(\delta-\delta')\cos t' - (d-d')\cos\tau'}{\sin(t'-\tau')} \\ p' = \dfrac{(\delta-\delta')\sin t' - (d-d')\sin\tau'}{\sin(t'-\tau')} \end{cases}$$

worauf η aus einer der beiden folgenden hervorgeht

$$\eta = (\tau - \tau') - p' \operatorname{tg} \delta' \sin \tau' - u' \operatorname{tg} \delta' \cos \tau'$$
$$= (t - t') - p' \operatorname{tg} d' \sin t' - u' \operatorname{tg} d' \cos t'$$

Der zweiten Methode des Art. 12. analog ergiebt sich

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{\left\{(\tau-\tau')-(t-t')\right\}\left\{\cos\tau'-\cos t'\right\}-\left\{(\delta-\delta')-(d-d')\right\}\left\{\operatorname{tg}\delta'\sin\tau'-\operatorname{tg}d'\sin t'\right\}}{2\,(\operatorname{tg}\delta'+\operatorname{tg}d')\sin^2\tfrac{1}{2}(\tau'-t')} \\ p' &= \frac{\left\{(\tau-\tau')-(t-t')\right\}\left\{\sin\tau'-\sin t'\right\}+\left\{(\delta-\delta')-(d-d')\right\}\left\{\operatorname{tg}\delta'\cos\tau'-\operatorname{tg}d'\cos t'\right\}}{2\,(\operatorname{tg}\delta'+\operatorname{tg}d')\sin^2\tfrac{1}{2}(\tau'-t')} \end{aligned}\right\} \quad (53)$$

und η wird wieder aus den obigen Ausdrücken berechnet. Hat man statt der einmaligen Beobachtung zweier Sterne Einen Stern zwei Mal beobachtet, so ändern sich die vorstehenden Ausdrücke in folgende ab:

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{\left\{(\delta-\delta')-(d-d')\right\}\cos\tfrac{1}{2}(t'+\tau')+\left\{(\tau-\tau')-(t-t')\right\}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(d'+\delta')\sin\tfrac{1}{2}(t'+\tau')}{2\sin\tfrac{1}{2}(t'-\tau')} \\ p' &= \frac{\left\{(\delta-\delta')-(d-d')\right\}\sin\tfrac{1}{2}(t'+\tau')-\left\{(\tau-\tau')-(t-t')\right\}\operatorname{cotg}\tfrac{1}{2}(d'+\delta')\cos\tfrac{1}{2}(t'+\tau')}{2\sin\tfrac{1}{2}(t'-\tau')} \end{aligned}\right\} \quad (53^*)$$

Hat man im Voraus q durch eine der Methoden der Artt. 18. oder 19. bestimmt, so bekommt man u' und p' durch die Beobachtung Eines Sterns aus den folgenden Ausdrücken

$$\left.\begin{aligned} u' &= \frac{(\tau-\tau'-q)\cos\tau'-(\delta-\delta')\left\{\operatorname{tg}\delta'\sin\tau'+\operatorname{tg}\varphi\sin q\right\}}{\operatorname{tg}\delta'-\operatorname{tg}\varphi\cos(\tau'+q)} \\ p' &= \frac{(\tau-\tau'-q)\sin\tau'+(\delta-\delta')\left\{\operatorname{tg}\delta'\cos\tau'-\operatorname{tg}\varphi\cos q\right\}}{\operatorname{tg}\delta'-\operatorname{tg}\varphi\cos(\tau'+q)} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (54)$$

und η muss aus der folgenden berechnet werden,

$$\eta = q - u \operatorname{tg} \varphi = q - u' \operatorname{tg} \varphi \cos q + p' \operatorname{tg} \varphi \sin q \quad \ldots \quad (54^*)$$

die leicht aus (51*) hervorgehen.

Alle Ausdrücke dieses Artikels sind aber mehr zusammengesetzt, wie die der Artt. 12. und 21., weshalb sie sich weniger zur Anwendung eignen wie diese.

§. III.

Anwendung und Bestimmung des dritten Systems von Reductionselementen.

23.

Im Vorhergehenden sind zwei Systeme von Reductionselementen eingeführt worden, nämlich einestheils μ, m, γ, i, k, c und anderntheils

α, p, q, i, k, c, es lässt sich aber noch ein drittes System einführen, welches in vielen Fällen mit Nutzen angewandt werden kann; dieses will ich jetzt entwickeln.

Verbindet man das in dieser Abhandlung stets angewandte Ende der Declinationsachse und den Pol des Aequators mit einem Bogen grössten Kreises, nennt die Länge desselben $90^\circ+\lambda$, und den Stundenwinkel, unter welchem er liegt, $90^\circ+\theta$, so entsteht zwischen diesem Ende der Declinationsachse, dem Pol des Aequators und dem des Aequatoreals ein neues sphärisches Dreieck, in welchem die Seiten $90^\circ+\lambda$, $90^\circ+i$ und μ sind, und den beiden erstgenannten dieser bez. die Winkel $90^\circ+\tau''+m$ und $90^\circ-\theta-\gamma$ gegenüber liegen. Dieses Dreieck giebt die Gleichungen

$$(55)\quad \begin{cases} \cos\lambda\cos(\theta+\gamma)=\cos i\cos(\tau''+m) \\ \cos\lambda\sin(\theta+\gamma)=\cos i\cos\mu\sin(\tau''+m)-\sin i\sin\mu \\ \sin\lambda \qquad\qquad\quad =\cos i\sin\mu\sin(\tau''+m)+\sin i\cos\mu \end{cases}$$

welche λ und θ bestimmen. Nennt man den dritten Winkel in diesem Dreieck Δ, so erhält man

$$(56)\quad \begin{cases} \cos\lambda\sin\Delta=\sin\mu\cos(\tau''+m) \\ \cos\lambda\cos\Delta=-\sin\mu\sin i\sin(\tau''+m)+\cos\mu\cos i \end{cases}$$

woraus Δ hervorgeht. Ich füge diesem hinzu, dass λ und Δ immer zwischen den Grenzen $\pm 90^\circ$ bestimmt werden müssen, und dass dem zufolge $\theta+\gamma$ und $\tau''+m$ immer zugleich entweder im ersten und vierten, oder im zweiten und dritten Quadranten liegen.

Durch denselben Bogen $90^\circ+\lambda$ haben wir zwischen dem genannten Ende der Declinationsachse, dem Pol des Aequators und dem Punkt S der Kugeloberfläche ein zweites, neues sphärisches Dreieck erhalten, in welchem die Seiten $90^\circ-k$, $90^\circ-\delta$ und $90^\circ+\lambda$ sind, und den beiden erstgenannten die Winkel $90^\circ+\theta-\tau$ und $90^\circ-c-\delta''-\Delta$ gegenüber liegen. Hiemit ergiebt sich also

$$(57)\quad \begin{cases} \cos\delta\cos(\tau-\theta)=\cos k\cos(\delta''+c+\Delta) \\ \cos\delta\sin(\tau-\theta)=\cos k\sin\lambda\sin(\delta''+c+\Delta)+\sin k\cos\lambda \\ \sin\delta \qquad\qquad\quad =\cos k\cos\lambda\sin(\delta''+c+\Delta)-\sin k\sin\lambda \end{cases}$$

wodurch τ und δ bestimmt werden.

Man kann hiedurch auch die Summe der in den Artt. 3. und 5. eingeführten Winkel π und π' bestimmen, denn man findet leicht, dass der dritte Winkel in dem zuletzt angewandten Dreieck $90^\circ+\pi+\pi'$ ist. Es wird also

$$\left.\begin{aligned}\cos\delta\cos(\pi+\pi') &= \cos\lambda\cos(\delta''+c+\Delta)\\ \cos\delta\sin(\pi+\pi') &= \cos\lambda\sin k\sin(\delta''+c+\Delta)+\sin\lambda\cos k\end{aligned}\right\}\quad(58)$$

welche $\pi+\pi'$ geben. Auf diese Art wird die Reduction der Beobachtungen durch Hülfe der vier Reductionselemente λ, θ, $c+\Delta$ und k ausgeführt, welche unverändert bleiben, so lange der Stundenkreis unverändert stehen bleibt, und auf die Angabe τ'' zeigt, wovon aber die drei ersten sich mit τ'' ändern. Man erkennt leicht die Analogie zwischen diesen Reductionselementen und den beim Gebrauch des Passageninstruments oder des Meridiankreises vorkommenden. Es ist nämlich ohne Rücksicht auf das algebraische Zeichen λ die kleinste Entfernung des Pols des Aequators von dem Kreise, den die auf der Declinationsachse senkrecht stehende Absehenslinie bei einer Drehung des Fernrohrs um diese Achse auf der Kugeloberfläche beschreibt, θ ist der Stundenwinkel, unter welchem dieser Kreis den Aequator schneidet, und k ist die Collimation der Absehenslinie. Das Reductionselement $c+\Delta$ kann mit der Collimation des Kreises am Meridiankreise gegen den Aequator oder den Pol desselben verglichen werden.

Die Gleichungen (55) und (56) geben die Reductionselemente λ, θ und Δ strenge aus μ, m und γ, will man dieselben strenge aus α, φ' und q ableiten, so muss man erst durch Anwendung von (29) und (30) μ, m und γ aus diesen ableiten und dann sich der (55) und (56) bedienen. Es folgen aus denselben leicht die entgegengesetzten Gleichungen, welche μ, m und γ aus λ, θ und Δ geben, die ich aber hier weglasse.

Da δ überhaupt 90° nicht übersteigen kann, so folgt aus den (57), dass bei irgend einer Angabe τ'' des Stundenkreises kein Stern in die Absehenslinie gelangen kann, dessen Declination grösser ist wie

$$90^\circ - k \mp \lambda$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn λ positiv, und das untere, wenn λ negativ ist. Es folgt ferner, dass für dieses Maximum der Declination, die in dieser Stellung des Stundenkreises beobachtet werden kann,

$$\tau - \theta = 90^\circ \text{ oder } = 270^\circ$$

ist, jenachdem λ positiv oder negativ ist. Jeder Stern, dessen Declination kleiner wie dieses Maximum ist, gelangt täglich zwei Mal in die Absehenslinie, und für den einen dieser Durchgänge ist

$$\tau - \theta < 90^\circ \text{ oder bez. } 270^\circ$$

für den andern hingegen ist

$$\tau - \theta > 90^\circ \text{ oder bez. } 270^\circ$$

für den einen Durchgang ist ferner

$$\delta'' + c + \Delta < 90^\circ$$

und für den andern

$$\delta'' + c + \Delta > 90^\circ$$

Man sieht hieraus, dass sehr wohl für beide Durchgänge $\delta'' + c$ entweder grösser oder kleiner wie 90° sein kann.

24.

Wenn μ so klein ist, dass man $\sin\mu = \mu$ und $\cos\mu = 1$ setzen darf, so erhält man folgende genäherte Ausdrücke aus den vorhergehenden strengen. Die (55) und (56) geben

$$(59) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \theta = \tau'' + \eta \\ \lambda = i + \mu \sin(\tau'' + m) \\ \Delta = \mu \cos(\tau'' + m) \end{cases}$$

wo η wieder die Collimation des Stundenkreises bedeutet, und also

$$\eta = m - \gamma$$

ist, und aus den (57) erhält man

$$(60) \quad \ldots \begin{cases} \tau = \tau'' + \eta + \lambda \operatorname{tg}(\delta'' + c) + k \sec(\delta'' + c) \\ \delta = \delta'' + c + \Delta \end{cases}$$

deren Identität mit den (3) und (7) leicht zu erkennen ist, die aber eine andere äussere Form haben. Aus (58) bekommt man ferner

$$(61) \quad \ldots \quad \pi + \pi' = \lambda \sec(\delta'' + c) + k \operatorname{tg}(\delta'' + c)$$

welche mit der Summe aus (5) und (10) übereinstimmt.

Wenn ausser i die Reductionselemente μ, m und η gegeben sind, so erhält man θ, λ und Δ durch die (59), wenn im Gegentheil für irgend einen Werth von τ'' die Reductionselemente i, θ, λ und Δ gegeben sind, so bekommt man η, μ und m aus den folgenden

$$(62) \quad \ldots\ldots \begin{cases} \eta = \theta - \tau'' \\ \mu \sin(\tau'' + m) = \lambda - i \\ \mu \cos(\tau'' + m) = \Delta \end{cases}$$

worauf man durch die (59) zu den Werthen von θ, λ und Δ übergehen kann, die irgend einem andern Werthe von τ'' zukommen. Man kann aber auch bei diesem Uebergange die Berechnung von μ, m und η vermeiden. Nehmen wir an, dass zur Ablesung τ_1'' am Stundenkreise die Reductionselemente θ_1, λ_1 und Δ_1 gehören, so erhält man aus den vorstehenden Gleichungen leicht

$$\left.\begin{aligned}\theta_1 &= \theta + \tau_1'' - \tau'' \\ \lambda_1 &= i + \Delta \sin(\tau_1'' - \tau'') + (\lambda - i)\cos(\tau_1'' - \tau'') \\ \Delta_1 &= \quad \Delta \cos(\tau_1'' - \tau'') - (\lambda - i)\sin(\tau_1'' - \tau'')\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad (63)$$

welche θ_1, λ_1 und Δ_1 unmittelbar aus θ, λ und Δ geben. Will man α, p und q statt μ, m und η aus λ, θ und Δ ableiten, so bekommt man leicht aus der Verbindung von (62) mit (36) und (37)

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \frac{\Delta \sin\theta - (\lambda - i)\cos\theta}{\cos\varphi} \\ p &= \Delta \cos\theta + (\lambda - i)\sin\theta \\ q &= \theta - \tau'' - \alpha \sin\varphi\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (64)$$

und hieraus bekommt man sogleich die Ausdrücke, welche die entgegengesetzte Aufgabe lösen, nämlich

$$\left.\begin{aligned}\theta &= \tau'' + q + \alpha \sin\varphi \\ \lambda &= i - \alpha\cos\varphi\cos\theta + p\sin\theta \\ \Delta &= \quad \alpha\cos\varphi\sin\theta + p\cos\theta\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (65)$$

welche θ, λ und Δ für irgend einen Werth von τ'' geben, nachdem α, p und q auf irgend eine der im Vorhergehenden entwickelten Arten gefunden worden sind.

25.

Wenn μ grösser ist, als dass die Annahme $\sin\mu = \mu$ und $\cos\mu = 1$ zulässig wäre, so folgen dennoch durch Anwendung der eben eingeführten Reductionselemente einfache Formeln für die Reduction der Beobachtungen am Aequatoreal. Nehmen wir immer noch an, dass i und k klein seien, so bekommen wir aus (55) und (56) zur Bestimmung von θ, λ und Δ die folgenden einfachen Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(\theta + \gamma) &= \cos\mu \operatorname{tg}(\tau'' + m) - ri \sin\mu \sec(\tau'' + m) \\ \sin\lambda &= \sin\mu \sin(\tau'' + m) + ri\cos\mu \\ \operatorname{tg}\Delta &= \operatorname{tg}\mu\cos(\tau'' + m) + ri\operatorname{tg}^2\mu\cos(\tau'' + m)\sin(\tau'' + m)\end{aligned}\right\} \quad (66)$$

die in Bezug auf μ strenge sind, und wo $r = \frac{1}{206265''}$ gesetzt werden darf. Aus den (57) ergiebt sich ferner

$$\left.\begin{aligned}\operatorname{tg}(\tau - \theta) &= \sin\lambda \operatorname{tg}(\delta'' + c + \Delta) + rk\cos\lambda\sec(\delta'' + c + \Delta) \\ \delta &= \delta'' + c + \Delta - \tfrac{1}{2}r(k^2 + \lambda^2)\operatorname{tg}(\delta'' + c + \Delta) - rk\lambda\sec(\delta'' + c + \Delta)\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

die den (8) analog sind, und in deren zweiter das vorletzte Glied der Correction entspricht, die man an den Beobachtungen an Meridianinstrumenten wegen der Krümmung der Bahn der Sterne im Felde des Fernrohrs anzubringen pflegt.

Die erste Gleichung (67) ist in Bezug auf λ und Δ strenge, aber die zweite berücksichtigt von λ keine höheren Potenzen wie das Quadrat, und es kann sich daher ereignen, dass sie für extreme Fälle, nämlich für die, wo bei einem grossen Werth von λ der beobachtete Stern während der Beobachtung dem Pol des Aequatoreals sehr nahe war, nicht die gewünschte Genauigkeit giebt. Für diesen Fall zieht man aber aus den (57) die folgenden

$$(68)\quad \ldots \begin{cases} \cos\delta\cos(\tau-\theta) = \cos(\delta''+c+\Delta) \\ \cos\delta\sin(\tau-\theta) = \sin\lambda\sin(\delta''+c+\Delta)+rk\cos\lambda \\ \sin\delta \qquad\qquad\quad = \cos\lambda\sin(\delta''+c+\Delta)-rk\sin\lambda \end{cases}$$

die δ und τ stets mit aller möglichen Sicherheit geben, weil der Pol des Aequatoreals in denselben umgangen ist. Die Gleichungen (66) und (68) sind die, worauf sich die am Ende des Art. 4. befindliche Bemerkung bezieht.

26.

Durch Beobachtung von zwei Sternen bei unverändert gelassener Ablesung am Stundenkreise kann man vermittelst der Gleichungen (57) λ, θ, $c+\Delta$ und k bestimmen. Da aber dabei die Bestimmung von k gemeiniglich nur unsicher ausfällt, so will ich diese Aufgabe nicht ausführen, sondern k durch eine der Methoden der Artt. 9. und 10. als gegeben betrachten. Es sind also λ, θ und $c+\Delta$ zu bestimmen. Die strenge Auflösung dieser Aufgabe kann genau so durchgeführt werden, wie die des Art. 11., weshalb ich nur die Resultate hinschreiben werde. Man berechnet zuerst entweder ζ und χ oder ζ und ψ aus den folgenden Gleichungen

$$(69)\quad \ldots \begin{cases} \cos\zeta\cos\chi = \cos k\sin(\delta''-d'') \\ \cos\zeta\sin\chi = \sin k\cos k\,(1-\cos(\delta''-d'')) \\ \sin\zeta \qquad\;\; = \sin^2 k+\cos^2 k\cos(\delta''-d'') \end{cases}$$

$$(70)\quad \ldots \begin{cases} \cos\zeta\sin\psi = \cos d\sin(\tau-t) \\ \cos\zeta\cos\psi = \cos d\sin\delta\cos(\tau-t)-\sin d\cos\delta \\ \sin\zeta \qquad\;\; = \cos d\cos\delta\cos(\tau-t)+\sin d\sin\delta \end{cases}$$

wo t, d und d'' für den einen Stern dasselbe bedeuten, was τ, δ und δ'' für den andern. Hierauf bekommt man entweder

$$\operatorname{tg}(\pi'' - \chi) = \frac{\cos d \cos \delta \sin(\tau - t)}{\sin \zeta \sin \delta - \sin d} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (71)$$

oder

$$\operatorname{cotg}(\pi'' - \psi) = \frac{\cos^2 k \sin(\delta'' - d'')}{\sin k\,(1 - \sin \zeta)} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (72)$$

oder auch entweder

$$\operatorname{tg}(\pi'' - \chi) = \frac{\sin(\tau - t)}{\sin \delta \cos(\tau - t) - \operatorname{tg} d \cos \delta} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (73)$$

oder

$$\operatorname{tg}(\pi'' - \psi) = \sin k \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\delta'' - d'') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (74)$$

wo $\pi'' = \pi + \pi'$ ist. Man erhält auch nachdem blos χ und ψ durch die beiden ersten (69) und (70) gerechnet worden sind

$$\pi'' = \chi + \psi \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (75)$$

Nachdem π'' berechnet worden ist, ergiebt sich λ und θ aus folgenden

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda \cos(\tau - \theta) &= \cos k \cos \pi'' \\ \cos\lambda \sin(\tau - \theta) &= \cos k \sin \delta \sin \pi'' + \sin k \cos \delta \\ \sin\lambda \quad &= \cos k \cos \delta \sin \pi'' - \sin k \sin \delta \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

und $c + \Delta$ aus folgenden

$$\left.\begin{aligned} \cos k \cos(\delta'' + c + \Delta) &= \cos \delta \cos(\tau - \theta) \\ \cos k \sin(\delta'' + c + \Delta) &= \cos \delta \sin \lambda \sin(\tau - \theta) + \sin \delta \cos \lambda \end{aligned}\right\} \; . \quad (B)$$

oder λ und $c + \Delta$ aus folgenden

$$\left.\begin{aligned} \cos\lambda \cos(\delta'' + c + \Delta) &= \cos \delta \cos \pi'' \\ \cos\lambda \sin(\delta'' + c + \Delta) &= \cos \delta \sin k \sin \pi'' + \sin \delta \cos k \\ \sin\lambda \quad &= \cos \delta \cos k \sin \pi'' - \sin \delta \sin k \end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (C)$$

und θ aus folgenden

$$\left.\begin{aligned} \cos\delta \cos(\tau - \theta) &= \cos k \cos(\delta'' + c + \Delta) \\ \cos\delta \sin(\tau - \theta) &= \cos k \sin \lambda \sin(\delta'' + c + \Delta) + \sin k \cos \lambda \end{aligned}\right\} \; . \quad (D)$$

Man kann auch, nachdem π'' gefunden ist, λ, θ und $c + \Delta$ auf einmal aus folgenden rechnen

$$\left.\begin{aligned} \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) \sin \tfrac{1}{2}(c + \Delta + \theta + \delta'' - \tau) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi'') \sin \tfrac{1}{2}(\delta - k) \\ \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) \cos \tfrac{1}{2}(c + \Delta + \theta + \delta'' - \tau) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi'') \cos \tfrac{1}{2}(\delta + k) \\ \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) \sin \tfrac{1}{2}(c + \Delta - \theta + \delta'' + \tau) &= \sin(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi'') \sin \tfrac{1}{2}(\delta + k) \\ \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\lambda) \cos \tfrac{1}{2}(c + \Delta - \theta + \delta'' + \tau) &= \cos(45^\circ + \tfrac{1}{2}\pi'') \cos \tfrac{1}{2}(\delta - k) \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

Man erkennt leicht, dass die vortheilhafteste Lage der beiden Sterne wieder die ist, dass ζ nahe gleich Null wird, welches eine Entfernung der beiden beobachteten Punkte der Himmelskugel von nahe 90° verlangt.

27.

Man erkennt schon aus der eben abgeleiteten strengen Auflösung, dass man λ und Δ bestimmen kann, ohne den Stand der bei den Beobachtungen angewandten Uhr zu kennen, dasselbe zeigt die genäherte Auflösung auch, die ich jetzt vornehmen werde. Wenn λ und folglich auch Δ so klein sind, dass man ihre Quadrate und Producte übergehen darf, so geben die auf zwei bekannte Sterne angewandten Gleichungen (60)

$$\tau - \theta - k \sec \delta = \lambda \operatorname{tg} \delta$$
$$t - \theta - k \sec d = \lambda \operatorname{tg} d$$

woraus man sogleich

$$(77) \quad \ldots\ldots \quad \lambda = \frac{\tau - t - k \sec \delta + k \sec d}{\operatorname{tg} \delta - \operatorname{tg} d}$$

erhält, und da hierin nur der Unterschied der beiden Stundenwinkel vorkommt, so wird λ unabhängig vom Stande der Uhr gefunden. Dieser Ausdruck für λ ist dem gleich, der für die Bestimmung derselben Grösse beim Passageninstrument und dem Meridiankreise angewandt wird. Die (60) geben ferner

$$(78) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \Delta = \delta - \delta'' - c \\ \Delta = d - d'' - c \end{cases}$$

aus welchen man das arithmetische Mittel nehmen kann, nachdem c durch die Methoden der Artt. 9. und 10. gefunden worden ist. Wenn man nicht Δ selbst, sondern nur $\Delta + c$ kennen lernen will, so ist sogleich

$$(78^*) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \Delta + c = \delta - \delta'' \\ \Delta + c = d - d'' \end{cases}$$

Kennt man den Uhrstand, so kann man aus denselben Beobachtungen auch θ bestimmen, denn alsdann kann man aus den beobachteten Zeiten τ und t berechnen, und die obigen Gleichungen geben

$$(79) \quad \ldots\ldots \quad \begin{cases} \theta = \tau - k \sec \delta - \lambda \operatorname{tg} \delta \\ = t - k \sec d - \lambda \operatorname{tg} d \end{cases}$$

Hat man durch die Methode des Art. 19. q bestimmt, wozu die Kenntniss von i erforderlich ist, die man immer mit der von c und k zugleich erlangen kann, so kann man auf die folgende Art θ berechnen, und durch dieselben Beobachtungen den Uhrstand bestimmen. Verbindet man die Gleichungen (59) mit der ersten (36) und der (37), so findet man

$$(80) \quad \theta = \tau'' + q - (\lambda - i) \operatorname{tg} \varphi \cos (\tau'' + q) + \Delta \operatorname{tg} \varphi \sin (\tau'' + q)$$

nennt man nun die beobachteten Uhrzeiten T und T_1, die graden Aufsteigungen der beiden Sterne α und α_1 und die Correction der Uhr ΔT, so ergiebt sich aus (79)

$$\left.\begin{aligned}\Delta T &= \alpha - T + \tfrac{1}{15}(\theta + \lambda \operatorname{tg} \delta + k \sec \delta) \\ &= \alpha_1 - T_1 + \tfrac{1}{15}(\theta + \lambda \operatorname{tg} d + k \sec d)\end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

Alle diese Ausdrücke sind denen, die beim Gebrauch des Passageninstruments angewandt werden, analog, nur braucht hier nicht die Declinationsachse, welche die Drehungsachse des Passageninstruments vertritt, horizontal zu sein, sondern kann jede beliebige, übrigens mögliche, Neigung gegen den Horizont haben.

§. IV.

Einführung von mehreren Absehenslinien, und Reduction der an denselben angestellten Beobachtungen.

28.

Bis jetzt habe ich angenommen, dass das Aequatoreal nur Eine Absehenslinie habe, deren Lage gegen die Declinationsachse und den Nullpunkt des Declinationskreises durch die Reductionselemente c und k bestimmt wurde, allein es ist jedenfalls dienlich im Brennpunkt des Objectivs ein solches Fadennetz einziehen zu lassen, wie das in den Meridiankreisen befindliche, wodurch man mehrere Absehenslinien erhält, die man alle bei den Durchgängen der Sterne zur Erzielung einer grösseren Genauigkeit benutzen kann. Sei daher in der durch die Achse des Declinationskreises und den Mittelpunkt des Objectivs gehenden Ebene in der Brennweite des letzteren Ein Faden, oder besser ein. wenige Secunden von einander abstehendes, Paar paralleler Fäden eingezogen, um dazwischen die Sterne in Bezug auf die Declination einzustellen, und senkrecht darauf eine ungrade Anzahl Fäden, die in passenden Intervallen von einander abstehen, um bei unverrücktem Stande des Stundenkreises die Durchgangszeiten der Sterne zu beobachten; diese werde ich die Stundenfäden, und die Mitte zwischen jenem Paar paralleler Fäden den Declinationsfaden nennen.

Durch die Durchschnittspunkte der Stundenfäden mit dem Declinationsfaden werden eben so viele Absehenslinien gebildet, und ich nehme im Folgenden an, dass man nur an diesen beobachtet habe. Ich setze daher voraus, dass man während des Durchganges eines Sterns, bei welchem der Stundenkreis unverändert stehen geblieben ist, dem Fernrohr die kleine Bewegung um die Declinationsachse mitgetheilt habe, die nöthig ist, um den Stern in so weit zwischen dem Paar paralleler Fäden zu erhalten, dass man die Antritte an die Stundenfäden so betrachten kann, als wären sie genau in den oben genannten Durchschnittspunkten erfolgt. Es versteht sich von selbst, dass man desto weniger Sorgfalt hierauf zu verwenden braucht, je genauer der Perpendicularismus eines jeden Stundenfadens zum Declinationsfaden hergestellt worden ist.

Stellt man an jedem Stundenfaden, oder an mehreren derselben, den Stern genau zwischen die Declinationsfäden ein, und hat man in der Zwischenzeit hinreichende Zeit zum Ablesen des Declinationskreises, so kann man auch während Eines Durchganges eines Sterns mehrere Declinationsbeobachtungen erhalten. Man könnte diese Bestimmungen dadurch erleichtern und vervielfältigen, dass man den Declinationsfaden beweglich einrichtete, und mit einer Micrometerschraube versähe, worauf man die Durchgänge der Sterne bei auch unverändert gelassenem Declinationskreise beobachten könnte. Ich werde aber hierauf im Folgenden keine Rücksicht nehmen, da die hiefür nöthige Abänderung der Formeln leicht zu finden ist, und bemerke nur, dass wenn bei dieser Einrichtung nicht alle Stundenfäden genau senkrecht auf dem Declinationsfaden stehen, die Reductionen mehr zusammengesetzt werden.

Die durch den mittleren Stundenfaden bestimmte Absehenslinie soll die sein, worauf sich die Reductionselemente c und k beziehen, und wenn der Declinationsfaden in der oben bezeichneten Ebene liegt, so ist klar, dass c sich auch auf alle übrigen Absehenslinien bezieht. Läge derselbe nicht genau in der genannten Ebene, sondern machte mit derselben den, in Theilen des Kreisradius auszudrückenden, kleinen Winkel i', so wäre für die Seitenfäden nicht c, sondern $c + i'f$ das eine bestimmende Element, wenn f den in Theilen des grössten Kreises auf der Kugeloberfläche auszudrückenden Abstand des Seitenfadens vom Mittelfaden bezeichnet. Das andere Element, welches zur Bestimmung der durch einen Seitenfaden gehenden Absehenslinie erfordert wird, ist $f + k$.

Für die an der einen Seite des Mittelfadens liegenden Seitenfäden ist f positiv, und für die an der andern Seite liegenden negativ. Um über das Zeichen von f zu unterscheiden richte man das Fernrohr des beiläufig normal aufgestellt gedachten Aequatoreals so, dass sowohl Stunden- wie Declinationskreis nahe Null angeben müssen, dann ist f positiv für die Fäden, die in der Wirklichkeit östlich, und negativ für die, welche westlich vom Mittelfaden liegen; dieses folgt leicht aus der von k im Art. 4. gegebenen Definition, und es folgt ferner daraus, dass jeder Faden sein auf diese Art bestimmtes Zeichen, Plus oder Minus, unter allen Umständen beibehält. Es wird nach dieser Anordnung stets jeder Stern die negativen Fäden zuerst berühren, wenn $\delta'' + c + \Delta$ zwischen $\pm 90^\circ$ liegt, und jeder Stern wird im Gegentheil die positiven Fäden zuerst berühren, wenn $\delta'' + c + \Delta$ diese Grenzen übersteigt.

29.

Die Aufgabe, die auf die eben beschriebene Art angestellten Beobachtungen zu reduciren, ist im Vorhergehenden vollständig gelöst, in so fern man jeden beobachteten Antritt an einen Stundenfaden und jede Einstellung und Ablesung der Declination als einzelne Beobachtung betrachtet, und es ist nichts weiter an den Formeln zu ändern, als allenthalben $c + i'f$ statt c, und $f + k$ statt k darin zu substituiren. Man muss, nachdem die Reductionen einzeln zu Ende geführt worden sind, aus allen erhaltenen Werthen von τ und δ das arithmetische Mittel nehmen, welches alsdann für das arithmetische Mittel aus den Beobachtungszeiten gilt.

Allein dieses Verfahren lässt sich vereinfachen und dahin führen, dass man alle beobachteten Antritte an die Stundenfäden, und alle eingestellten und abgelesenen Declinationen so zu Einem Resultat vereinigen kann, wie es bei den beobachteten Durchgängen am Passageninstrument und am Meridiankreise gebräuchlich ist, und zwar kann dieses auf mehrere Arten geschehen. Wenn λ sehr klein ist, so sind diese Reductionen von wenigem Belange, aber wenn dieses nicht der Fall ist, ein Umstand, welcher in dieser Abhandlung immer mit betrachtet worden ist, so können sie wesentlich werden.

30.

Es ist von selbst einleuchtend, dass man sich in jedem Falle eine gewisse, durch den Declinationsfaden gehende, Absehenslinie denken kann, in welcher der durch das Feld des Fernrohrs gehende Stern in dem Zeitmoment gesehen wird, welches dem arithmetischen Mittel aus allen beobachteten Antritten (gleichviel ob an allen vorhandenen Stundenfäden beobachtet worden ist oder nicht) gleich ist, wenn man daher im Voraus die Lage dieser Absehenslinie sucht, und darauf durch Hülfe der dieselbe bestimmenden Elemente, die ich mit K und $c+i'(K-k)$ bezeichnen werde, nebst den übrigen, unverändert zu lassenden, Reductionselementen von den Ablesungen an den Kreisen des Aequatoreals zu τ und δ übergeht, so sind es schon diese, die dem arithmetischen Mittel aus den beobachteten Zeiten angehören. Von dieser Aufgabe werde ich zwei Auflösungen entwickeln.

Wenn man τ überhaupt den Stundenwinkel bedeuten lässt, welcher irgend einem der beobachteten Antritte an die Stundenfäden angehört, so findet zufolge des Vorhergehenden für jeden Fadenantritt überhaupt die folgende Gleichung statt,

$$\sin(f+k) = -\sin\delta\sin\lambda + \cos\delta\cos\lambda\sin(\tau-\theta) \tag{81*}$$

die durch Multiplicationen mit $\cos\lambda$ und $\sin\lambda$ und Subtraction aus den beiden letzten (57) hervorgeht. Wendet man diese auf n Fädenantritte an, und nimmt aus denselben das arithmetische Mittel, so bekommt man, nachdem für $\sin(f+k)$ der Bogen gesetzt worden ist, welches hier für alle Werthe, die f in unsern Fernröhren annehmen kann, erlaubt ist,

$$k + \frac{1}{n}\Sigma f = -\sin\delta\sin\lambda + \cos\delta\cos\lambda\,\frac{1}{n}\Sigma\sin(\tau-\theta)$$

Bezeichnet man das arithmetische Mittel aus allen beobachteten Stundenwinkeln mit Θ, und den Unterschied eines jeden derselben von diesem Mittel mit h, so dass überhaupt

$$\tau = \Theta + h$$

wird, so bekommt man, weil $\Sigma h = 0$ ist,

$$\frac{1}{n}\Sigma\sin(\tau-\theta) = \sin(\Theta-\theta)\frac{1}{n}\Sigma\cos h + \cos(\Theta-\theta)\frac{1}{n}\Sigma(h-\sin h)$$

und die vorstehende Gleichung geht über in

$$k + \frac{1}{n}\Sigma f + \cos\delta\cos\lambda\left\{\sin(\Theta-\theta)\frac{2}{n}\Sigma\sin^2\tfrac{1}{2}h - \cos(\Theta-\theta)\frac{1}{n}\Sigma(h-\sin h)\right\}$$
$$= -\sin\delta\sin\lambda + \cos\delta\cos\lambda\sin(\Theta-\theta)$$

Zufolge der Definition von K ist aber die rechte Seite dieser Gleichung gleich $\sin K$ oder bez. gleich K, folglich ist

$$= k + \frac{1}{n}\Sigma f + \cos\delta\cos\lambda\left\{\sin(\Theta-\theta)\frac{2}{n}\Sigma\sin^2\tfrac{1}{2}h - \cos(\Theta-\theta)\frac{1}{n}\Sigma(h-\sin h)\right\} \quad (82)$$

Die Grössen $\sin^2\frac{1}{2}h$ und $h - \sin h$ kann man ein für alle Mal in Tafeln bringen, die h oder $\frac{1}{15}h$ zum Argument haben, und solche Tafeln befinden sich schon von Bessel berechnet im 6. Bande der Astr. Nachr. Wenn daher δ und Θ gegeben sind, so kann man durch den Ausdruck (82) leicht K berechnen, und damit die ferneren Reductionen statt mit k ausführen. Wenn ein bekannter Stern beobachtet worden ist, so ist δ unmittelbar gegeben, und Θ lässt sich leicht berechnen. Sei die grade Aufsteigung dieses Sterns α, die Correction der nach Sternzeit gehenden Uhr ΔT, und die beobachteten Zeitmomente der Fädenantritte T, T_1, etc., dann sind die dazu gehörigen Stundenwinkel

$$\tau = 15\,(T + \Delta T - \alpha)$$
$$\tau_1 = 15\,(T_1 + \Delta T - \alpha)$$
etc.

und hieraus folgt

$$\Theta = 15\left\{\frac{1}{n}\,\Sigma T + \Delta T - \alpha\right\}$$

worauf man

$$h = 15\left(T - \frac{1}{n}\,\Sigma T\right)$$
$$h_1 = 15\left(T_1 - \frac{1}{n}\,\Sigma T\right)$$
etc.

bekommt. Wenn es ein unbekannter Stern ist, welchen man beobachtet hat, dann kann man zwar δ durch die vorhergehenden Formeln immer noch mit einer hinreichenden Genauigkeit erhalten, aber die hinreichend genaue Bestimmung von Θ verursacht, namentlich in den Fällen, wo der beobachtete Stern dem im Art. 23. erklärten Maximum der Declination nahe liegt, oft Schwierigkeiten, weil sie wesentlich mit von K abhängt. Diese Methode K zu finden lässt daher in der Anwendung manches zu wünschen übrig. Es giebt indess einen ausgedehnten Fall, in welchem man sie bequem anwenden kann, und dieser ist derjenige, wo λ so klein ist, dass man für die Bestimmung von K mit der ersten Potenz davon ausreicht. Die Gleichungen (60) geben in diesem Falle

$$\Theta - \theta = \lambda\,\mathrm{tg}\,\delta + K\sec\delta$$

und hiemit geht (82) über in

$$(83) \quad . \quad . \quad K = \frac{k + \frac{1}{n}\Sigma f + \lambda \sin\delta \frac{2}{n}\Sigma \sin^2\tfrac{1}{2}h - \cos\delta \frac{1}{n}\Sigma(h - \sin h)}{1 - \frac{2}{n}\Sigma \sin^2\tfrac{1}{2}h}$$

in welcher häufig der Nenner gleich Eins gesetzt werden kann. Zufolge des Art. 24 ist
$$\lambda = i + \mu \sin(\tau'' + m)$$
in welchem Ausdruck man für den jetzigen Zweck i immer wird übergehen können.

31.

Die zweite Auflösung der in Rede stehenden Aufgabe, die ich jetzt entwickeln werde, ist von den Stundenwinkeln selbst unabhängig, und verlangt nur deren Unterschiede, die durch die Beobachtungen der Fädenantritte unmittelbar gegeben sind.

Wenden wir die Gleichung (81*) auf die beiden durch K und $f+k$ bestimmten Absehenslinien an, und schreiben zur Abkürzung ω und Ω bez. für $\tau - \theta$ und $\Theta - \theta$, so entstehen
$$\sin K \quad = \cos\lambda \cos\delta \sin\Omega - \sin\lambda \sin\delta$$
$$\sin(f+k) = \cos\lambda \cos\delta \sin\omega - \sin\lambda \sin\delta$$
Diese geben durch Addition und Subtraction, und wenn man für $\sin K$ und $\sin(f+k)$ die Bögen setzt, welches hier erlaubt ist,
$$(84) \quad \begin{cases} f+k+K+2\sin\lambda\sin\delta = 2\cos\lambda\cos\delta\sin\tfrac{1}{2}(\omega+\Omega)\cos\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega) \\ f+k-K \qquad\qquad\quad = 2\cos\lambda\cos\delta\cos\tfrac{1}{2}(\omega+\Omega)\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega) \end{cases}$$
Wenn man hieraus $\omega+\Omega$ eliminirt, so erhält man zur Bestimmung von K die folgende quadratische Gleichung,
$$(85) \; K^2 - 2\{f+k-2(f+k)\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega) - 2\sin\delta\sin\lambda\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega)\}K$$
$$+ (f+k)^2 - 4\{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda) - (f+k)\sin\delta\sin\lambda\}\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega) + 4\cos^2\delta\cos^2\lambda\sin^4\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega) =$$
deren Auflösung
$$K = f+k-2(f+k+\sin\delta\sin\lambda)\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega)$$
$$\pm \sin(\omega-\Omega)\sqrt{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda) - 2(f+k)\sin\delta\sin\lambda - (f+k)^2}$$
giebt. Nennen wir nun die in Bogentheile verwandelten Zeitmomente der n verschiedenen, beobachteten Fädenantritte ω, ω_1, etc., so ist
$$\Omega = \frac{1}{n}(\omega + \omega_1 + \text{etc.})$$
und es wird
$$h = \omega - \Omega$$
$$h_1 = \omega_1 - \Omega$$
etc.

wo h, h_1, etc. dieselbe Bedeutung haben wie im vor. Art. Mit Uebergehung der Summen

$$\frac{1}{n}\Sigma f \sin^2\tfrac{1}{2}h,\ \frac{1}{n}\Sigma f^2 \sin h, \text{ etc.}$$

die nie merklich werden können, giebt nun die obige Gleichung für K,

$$= k + \frac{1}{n}\Sigma f - \sin\delta \sin\lambda \frac{2}{n}\Sigma \sin^2\tfrac{1}{2}h$$

$$\pm \sqrt{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda)}\cdot\frac{1}{n}\Sigma(h-\sin h) \pm \frac{\sin\delta\sin\lambda}{\sqrt{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda)}}\cdot\frac{1}{n}\Sigma f \sin h \quad (86)$$

und es ist leicht zu erkennen, dass in diesem Ausdruck die oberen Zeichen angewandt werden müssen, wenn $\delta'' + c + \Delta$ zwischen $\pm 90^\circ$ liegt, die unteren Zeichen hingegen, wenn $\delta'' + c + \Delta$ diese Grenzen übersteigt.

Die Grösse $f \sin h$ kann für jedes gegebene Aequatoreal ein für alle Mal, und für so lange als nichts an den Stundenfäden geändert wird, in Tafeln mit dem Argument h oder $\frac{1}{15}h$ gebracht werden. Diese Art K zu finden setzt, wie man sieht, nur δ als bekannt voraus, und diese Grösse kann man immer leicht mit hinreichender Genauigkeit im Voraus berechnen, wenn es sich nicht etwa um einen bekannten Stern handelt, in welchem Falle δ unmittelbar gegeben ist.

32.

Im Vorhergehenden ist blos gezeigt worden, wie man K findet, und es ist daher noch übrig anzugeben, wie man die in den verschiedenen Absehenslinien eingestellten und abgelesenen Declinationen auf die Ablesung hinführt, die in der durch K bestimmten Absehenslinie statt findet. Wenn λ klein ist und der Stern dem Maximum der Declination nicht nahe ist, dann kann diese Reduction zwar durch die oben entwickelten Ausdrücke ausgeführt werden, aber wenn λ nicht klein ist, und der Stern dem Maximum der Declination nahe ist, so kann es sich ereignen, dass die sonst dazu anwendbaren zweiten Ausdrücke (8) oder (67) nicht ausreichen.

Die auf beide Absehenslinien angewandte dritte Gleichung (57) giebt, wenn man die zu der durch K bestimmten Absehenslinie gehörige Ablesung am Declinationskreise mit D'' bezeichnet,

$$\sin\delta = \cos K \cos\lambda \sin(D'' + c + i'(K-k) + \Delta) - \sin K \sin\lambda$$

$$\sin\delta = \cos(f+k)\cos\lambda \sin(\delta'' + c + i'f + \Delta) - \sin(f+k)\sin\lambda$$

und hieraus bekommt man zuerst, wenn man nur auf die Quadrate von K und $f+k$ Rücksicht nimmt,

$$\sin(D''+c+i'(K-k)+\Delta)-\sin(\delta''+c+i'f+)=\Delta$$
$$-(f+k-K)\,\mathrm{tg}\,\lambda-\tfrac{1}{2}r\{(f+k)^2-K^2\}\sin(\delta''+c+i'f+\Delta)$$

wo wie oben $r=\frac{1}{206265''}$ gesetzt werden darf. Aus dieser Gleichung bekommt man auf bekannte Art, wenn man fortwährend von den eben genannten Grössen die Potenzen, welche die zweite übersteigen, weglässt,

$$(87)\quad D''=\delta''+i'(f+k-K)-(f+k-K)\,\mathrm{tg}\,\lambda\sec(\delta''+c+i'f+\Delta)$$
$$+\tfrac{1}{2}r(f+k-K)^2\,\mathrm{tg}^2\lambda\sec^2(\delta''+c+i'f+\Delta)\,\mathrm{tg}(\delta''+c+i'f+\Delta)$$
$$-\tfrac{1}{2}r\{(f+k)^2-K^2\}\,\mathrm{tg}(\delta''+c+i'f+\Delta)$$

wodurch die Reduction der Ablesungen am Declinationskreise immer sicher ausgeführt werden kann. In den Fällen, in welchen man einen hinreichend genäherten Werth von D'' im Voraus kennt, kann diese Gleichung auch wie folgt geschrieben werden,

$$(88)\quad D''=\delta''+i'(f+k-K)-(f+k-K)\,\mathrm{tg}\,\lambda\sec\{\tfrac{1}{2}(D''+\delta'')+c+\Delta\}$$
$$-\tfrac{1}{2}r\{(f+k)^2-K^2\}\,\mathrm{tg}\{\tfrac{1}{2}(D''+\delta'')+c+\Delta\}$$

Es lässt sich für diese Reduction noch ein anderer, von den Zwischenzeiten der Beobachtungen abhängiger, Ausdruck ableiten. Durch Multiplicationen mit $\sin\lambda$ und $\cos\lambda$, und durch Additionen und Subtractionen erhält man aus den, auf beide im Vorhergehenden betrachteten Absehenslinien angewandten, Gleichungen (57)

$$\cos K\cos(D''+c+i'(K-k)+\Delta)=\cos\delta\cos\Omega$$
$$\cos K\sin(D''+c+i'(K-k)+\Delta)=\cos\delta\sin\lambda\sin\Omega+\sin\delta\cos\lambda$$
$$\sin K=\cos\delta\cos\lambda\sin\Omega-\sin\delta\sin\lambda$$
$$\cos(f+k)\cos(\delta''+c+i'f+\Delta)=\cos\delta\cos\omega$$
$$\cos(f+k)\sin(\delta''+c+i'f+\Delta)=\cos\delta\sin\lambda\sin\omega+\sin\delta\cos\lambda$$
$$\cos(f+k)=\cos\delta\cos\lambda\sin\omega-\sin\delta\sin\lambda$$

Durch Multiplicationen und Additionen dieser Gleichungen unter einander ergiebt sich leicht

$$\cos K\cos(k+f)\cos(D''-\delta''-i'(f+k-K))+\sin K\sin(f+k)=$$
$$\cos^2\delta\cos(\omega-\Omega)+\sin^2\delta$$

woraus durch Einführung der Sinusse der halben Winkel

$$\cos K\cos(f+k)\sin^2\tfrac{1}{2}(D''-\delta''-i'(f+k-K))=\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega)\cos^2\delta-\sin^2\tfrac{1}{2}(f+k-$$

folgt. Aus dieser zieht man leicht

$$(89)\quad D''=\delta''+i'(f+k-K)\mp 2\sqrt{\left\{\tfrac{1}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega)\cos\delta+\tfrac{1}{2}(f+k-K)\right\}\left\{\tfrac{1}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\Omega)\cos\delta-\tfrac{1}{2}(f+k-\right.}$$

in welcher ω und Ω dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 31. Vorausgesetzt dass $\lambda > \frac{1}{2}(f+k+K)$ ist, folgen durch Vergleichung mit (87) und (88) für die Anwendung der doppelten Zeichen folgende Regeln.

1) Wenn $\delta'' + c + \Delta < 90°$ ist,

so muss das obere Zeichen angewandt werden, wenn λ und $f+k-K$ gleiche, und das untere, wenn diese beiden Grössen ungleiche Zeichen haben.

2) Wenn $\delta'' + c + \Delta > 90°$ ist,

so muss das obere Zeichen angewandt werden, wenn λ und $f+k-K$ ungleiche, und das untere, wenn diese beiden Grössen gleiche Zeichen haben.

Dieser Ausdruck (89), welcher wenn λ gross ist, für Sterne, deren Declination dem im Art. 23. erklärten Maximum derselben nahe ist, sehr leicht und sicher angewandt werden kann, verliert jedoch seine Anwendbarkeit, wenn λ klein ist, oder der Stern von diesem Maximum weit entfernt ist.

33.

Das im Vorhergehenden entwickelte Verfahren zur Reduction der verschiedenen, bei einem und demselben Durchgange eines Sterns erhaltenen Zeitmomente und Ablesungen am Declinationskreise ist, wenn ein unbekannter Stern beobachtet worden ist, strenge genommen indirect, da es wenigstens die Declination δ verlangt, die erst nach den übrigen Reductionen erhalten wird. Wenn gleich in fast allen Fällen ein hinreichend genäherter Werth von δ ohne grosse Mühe erlangt werden kann, so ist es doch wünschenswerth eine directe Methode zu besitzen, und ich werde daher hier eine solche entwickeln, die leicht aus den schon abgeleiteten Gleichungen erlangt werden kann. Diese Methode führt auf folgende Vorschriften zur Reduction der Beobachtungen. Vermittelst der Ablesung am Stundenkreise τ'' und der an irgend einer der Absehenslinien eingestellten und abgelesenen Declination, die ich δ''_0 nennen will, führt man die Reduction durch irgend ein System der dazu passenden, im Vorhergehenden entwickelten, und auf nur Eine Absehenslinie sich beziehenden Gleichungen vollständig aus, so dass man einen Werth von τ und δ erhält. Ausser den übrigen Reductionselementen müssen natürlich hiebei die Reductionselemente angewandt werden, die sich auf dieselbe Absehenslinie beziehen, die man stets kennt, und die

ich mit k_0 und $c + i'(k_0 - k)$ bezeichnen will. Es ist klar dass k_0 einem der vorhandenen Werthe von $f + k$ gleich ist. Es ist ferner einleuchtend, dass diese Werthe von τ und δ der an derselben Absehenslinie beobachteten Durchgangszeit ω_0 angehören. Nachdem diese Reduction ausgeführt ist, reducirt man alle übrigen beobachteten Durchgangszeiten auf das Zeitmoment ω_0, und nimmt aus allen so erhaltenen Zeiten das arithmetische Mittel, und dasselbe führt man in Bezug auf die übrigen eingestellten und abgelesenen Declinationen aus. Die Vorschriften für den letzten Theil dieses Verfahrens müssen noch entwickelt werden.

Da man zufolge der vorstehenden Erklärungen, wenn man dahin kommt, dass die Reduction der Durchgangszeiten vorgenommen werden muss, schon die zum Zeitmoment ω_0 gehörigen Werthe von τ und δ kennt, so kann man aus der zweiten Gleichung (84) schon eine Reductionsformel für die obigen Durchgangszeiten ableiten. Schreibt man in dieser k_0 statt K, ω_0 statt Ω, und lässt überhaupt ω irgend eine der beobachteten Durchgangszeiten bedeuten, so bekommt man sogleich

$$(90) \quad . \quad . \quad \sin \tfrac{1}{2} (\omega - \omega_0) = \frac{r\,(f + k - k_0)}{2 \cos \lambda \cos \delta \cos [\tau - \theta + \frac{1}{2} (\omega - \omega_0)]}$$

welche in den Fällen anwendbar ist, in welchen man im Nenner den beobachteten Werth von $\omega - \omega_0$ substituiren darf. In den Fällen aber, in welchen diese Reduction die grössten Werthe erhält, das ist in den Fällen, wo die Declination des beobachteten Sterns dem Maximum derselben nahe ist, kann diese Anwendung des beobachteten Unterschiedes der Durchgangszeiten misslich werden, weil er nicht mit grosser Genauigkeit zu erlangen ist, und zugleich $\tau - \theta$ in der Nähe von 90° oder 270° liegt. Der obige Ausdruck bietet daher nur eine beschränkte Anwendung dar.

34.

Um andere Ausdrücke für die in Rede stehende Reduction zu erhalten nehme ich die Gleichung (85) vor, und ordne sie in Bezug auf $\omega - \omega_0$. Sie stellt sich dadurch wie folgt:

$$0 = 4 \cos^2\delta \cos^2\lambda \sin^4 \tfrac{1}{2} (\omega - \omega_0)$$
$$- 4 \{\cos(\delta + \lambda) \cos(\delta - \lambda) - (f + k + k_0) \sin\delta \sin\lambda - (f + k) k_0\} \sin^2 \tfrac{1}{2} (\omega - \omega_0) + (f + k - k_0)^2$$

welche, wenn man k und k_0 gleich Null macht, dieselbe ist, die ich schon im 6. Bande der Astr. Nachr. für die Reduction der an ver-

schiedenen Fäden beobachteten Antritte der Sterne bei den Breitenbestimmungen durchs Passageninstrument entwickelt habe. Setzt man zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned} a &= \cos\delta \cos\lambda \\ b &= \sin\delta \sin\lambda \\ A &= \cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda) = a^2-b^2 \\ g &= f+k \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (91)$$

so wird diese Gleichung

$$0 = 4a^2 \sin^4 \tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0) - 4\{A-(g+k_0)b-g\,k_0\}\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0) + (g-k_0)^2 \quad (92)$$

und man zieht zuerst die folgende daraus,

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0) = \pm \frac{r\,(g-k_0)}{2\sqrt{A-r\,(g+k_0)\,b-r^2 g\,k_0-a^2\sin^2\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)}} \quad \ldots \quad (93)$$

wo auch im Nenner der beobachtete Werth von $\omega-\omega_0$ angewandt werden darf, und mit weit mehr Sicherheit geschehen kann wie in (90), weil hier nur das Quadrat davon vorkommt, während dort in den kritischen Fällen die erste Potenz davon zur Geltung kommt. Durch die strenge Auflösung der Gleichung (92) bekommt man die folgenden Formeln,

$$\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0) = \pm \frac{r\,(g-k_0)}{2\sqrt{\{A-r\,(g+k_0)\,b-r^2 g k_0\}\cos\frac{1}{2}\chi}} \quad \ldots \quad (94)$$

wo der Hülfswinkel χ aus dem folgenden Ausdruck berechnet werden muss,

$$\sin\chi = \frac{r\,(g-k_0)\,a}{A-r\,(g+k_0)\,b-r^2 g\,k_0} \quad \ldots\ldots \quad (95)$$

Ich führe noch an, dass in allen diesen Ausdrücken wie oben $r = \frac{1}{206265''}$ ist.

35.

Man wird selten oder nie in die Veranlassung kommen von den eben entwickelten strengen Ausdrücken Gebrauch machen zu müssen, sondern fast immer mit den ersten Gliedern einer Reihentwickelung ausreichen, ich werde daher diese suchen. Man kommt auf eine einfache und regelmässige Form der Coefficienten der unendlichen Reihe, wenn man nicht $\sin\frac{1}{2}(\omega-\omega_0)$ sondern $\sin(\omega-\omega_0)$ entwickelt, setzt man zu diesem Zweck

$$4\sin^2\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0) = y\,\frac{(g-k_0)^2}{A}$$

so wird die quadratische Gleichung

$$\tfrac{1}{4}a^2(g-k_0)^2 y^2 - A\{A-(g+k_0)b-g\,k_0\}\,y + A^2 = 0$$

Setzt man ferner

$$\sin^2(\omega-\omega_0) = z^2\,\frac{(g-k_0)^2}{A}$$

so bekommt man

$$z^2 = y - y^2\,\frac{(g-k_0)^2}{4A}$$

und es ist z in eine nach den aufsteigenden Potenzen und Producten von g und k_0 fortschreitende Reihe zu entwickeln. Differentiirt man die vorstehenden Gleichungen mehrmals, und setzt nach den Differentiationen $g=0$ und $k_0=0$, so bekommt man leicht die folgenden Gleichungen,

$$y=1$$

$$A\frac{dy}{dg}=b$$

$$A^2\frac{d^2y}{dg^2}=2Ab\frac{dy}{dg}+\tfrac{1}{2}a^2$$

$$A^2\frac{d^3y}{dg^3}=3Ab\frac{d^2y}{dg^2}+3a^2\frac{dy}{dg}$$

$$A^2\frac{d^4y}{dg^4}=4Ab\frac{d^3y}{dg^3}+6a^2\frac{d^2y}{dg^2}+6a^2\left(\frac{dy}{dg}\right)^2$$

etc.

$$A\frac{dy}{dk_0}=b$$

$$A^2\frac{d^2y}{dk_0\,dg}=Ab\frac{dy}{dg}+Ab\frac{dy}{dk_0}+A-\tfrac{1}{2}a^2$$

$$A^2\frac{d^3y}{dk_0\,dg^2}=Ab\frac{d^2y}{dg^2}+2Ab\frac{d^2y}{dk_0\,dg}+2(A-a^2)\frac{dy}{dg}+a^2\frac{dy}{dk_0}$$

etc.

$$A^2\frac{d^2y}{dk_0^2}=2Ab\frac{dy}{dk_0}+\tfrac{1}{2}a^2$$

etc.

$$z=\sqrt{y}=\pm 1$$

$$z\frac{dz}{dg}=\tfrac{1}{2}\frac{dy}{dg}$$

$$z\frac{d^2z}{dg^2}=-\left(\frac{dz}{dg}\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dg^2}-\frac{1}{4A}$$

$$z\frac{d^3z}{dg^3}=-3\frac{dz}{dg}\frac{d^2z}{dg^2}+\tfrac{1}{2}\frac{d^3y}{dg^3}-\frac{3}{2A}\frac{dy}{dg}$$

$$z\frac{d^4z}{dg^4}=-4\frac{dz}{dg}\frac{d^3z}{dg^3}-3\left(\frac{d^2z}{dg^2}\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{d^4y}{dg^4}-\frac{3}{A}\frac{d^2y}{dg^2}-\frac{3}{A}\left(\frac{dy}{dg}\right)^2$$

etc.

$$z\frac{dz}{dk_0}=\tfrac{1}{2}\frac{dy}{dk_0}$$

$$z\frac{d^2z}{dk_0\,dg}=-\frac{dz}{dg}\frac{dz}{dk_0}+\tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dk_0\,dg}+\frac{1}{4A}$$

$$z\frac{d^3z}{dk_0\,dg^2}=-2\frac{dz}{dg}\frac{d^2z}{dk_0\,dg}-\frac{d^2z}{dg^2}\frac{dz}{dk_0}+\tfrac{1}{2}\frac{d^3y}{dk_0\,dg^2}-\frac{1}{2A}\frac{dy}{dk_0}+\frac{1}{A}\frac{dy}{dg}$$

etc.

$$z\frac{d^2z}{dk_0^2}=-\left(\frac{dz}{dk_0}\right)^2+\tfrac{1}{2}\frac{d^2y}{dk_0^2}-\frac{1}{4A}$$

etc.

und hieraus durch eine leichte Elimination

$$\imath(\omega-\omega_0)=\pm\frac{r(g-k_0)}{\sqrt{A}}\Big\{1+\frac{b}{2A}rg+\frac{b^2}{2A^2}r^2g^2+\left[\frac{5b^3}{8A^3}+\frac{b}{8A^2}\right]r^3g^3+\left[\frac{7b^4}{8A^4}+\frac{3b^2}{8A^3}\right]r^4g^4+\text{etc.}$$
$$+\frac{b}{2A}rk_0+\left[\frac{b^2}{2A^2}+\frac{1}{2A}\right]r^2gk_0+\left[\frac{7b^3}{8A^3}+\frac{9b}{8A^2}\right]r^3g^2k_0+\text{etc.}$$
$$+\frac{b^2}{2A^2}r^2k_0^2+\text{etc.}\Big\}\quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (96)$$

Ich habe hier mehr Glieder wie nöthig werden entwickelt um ihre einfache Form zu zeigen; man wird fast immer mit dem ersten oder den beiden ersten Gliedern ausreichen, und kann in den meisten Fällen für $\sin(\omega-\omega_0)$ den Bogen setzen, in welchem Falle der allgemeine Factor r der rechten Seite weggelassen werden muss.

In den Fällen wo λ sehr klein ist, kann man den obigen Ausdruck noch auf eine andere Art abkürzen. Erwägt man dass

$$A=\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda)=\cos^2\delta-\sin^2\lambda$$

ist, und behält nur die Glieder niedrigster Ordnung bei, so wird

$$\sin(\omega-\omega_0)=\pm\frac{r(g-k_0)}{\cos\delta}\left\{1+\frac{\sin^2\lambda}{2\cos^2\delta}+\frac{\sin\delta\sin\lambda}{2\cos^2\delta}r(g+k_0)\right\}\;.\;.\;(97)$$

Durch die Ausdrücke (93), (94), (96) oder (97) kann man alle beobachteten Fädenantritte so auf den zur Zeit ω_0 gehörigen, für welchen man schon τ und δ aus τ'' und δ_0'' durch Hülfe von k_0 und der übrigen Reductionselemente berechnet hat, reduciren wie man am Passageninstrument oder am Meridiankreise die Antrittszeiten an die Seitenfäden durch den Ausdruck $f\sec\delta$ auf den Mittelfaden zu reduciren pflegt.*) Man findet in der That aus allen eben entwickelten Ausdrücken, wenn man $\lambda=0$ macht,

$$\sin(\omega-\omega_0)=\pm r(g-k_0)\sec\delta$$

---

*) Um zu zeigen, wie kleine Werthe von λ schon bei Beobachtungen am Passageninstrument oder am Meridiankreise auf die Reduction der Durchgänge des Polaris auf den Mittelfaden merkliche Wirkung äussern, will ich annehmen, dass die Entfernung zweier Seitenfäden vom Mittelfaden $\pm 40^s$, und die kleinste Entfernung der senkrechten Absehenslinie vom Pol des Aequators 2^s beträgt. Dieses sind Grössen die in der Praxis oft vorkommen. Setzt man nun $k_0=0$, $g=\pm 10'$, $\lambda=30''$, $\delta=88^\circ\,32'$, so giebt die Gleichung (97) für die Zeitintervalle, die ein Stern, dessen Declination sehr nahe die des Polaris ist, gebraucht um von diesen Seitenfäden an den Mittelfaden oder umgekehrt zu gelangen,

$$26^m\,6^s,6 \text{ und } 26^m\,5^s,6$$

also schon einen Unterschied von einer ganzen Zeitsecunde, während diese Intervalle einander gleich sind wenn $\lambda=0$ ist.

36.

Es ist noch übrig zu zeigen, wie unter den gegenwärtigen Annahmen die an andern Absehenslinien, wie die wozu k_0 gehört, eingestellten und abgelesenen Declinationen reducirt werden müssen. Es ist leicht zu finden, dass die obigen zu ähnlichem Zwecke entwickelten Ausdrücke (87), (88) oder (89) nach einer kleinen Abänderung auch hiezu dienen. Bezeichnet man vorzugsweise die schon als berechnet angenommene, aus τ'' und δ_0'' hervorgegangene Declination mit δ_0, und irgend eine der aus den Einstellungen an den übrigen Absehenslinien sich ergebenden Declinationen allgemein mit δ, bezeichnet man ferner die dazu gehörige, auf die Absehenslinie für welche k_0 gilt, reducirte Ablesung mit D'', so darf man in jedem Falle die Gleichung

$$\delta - \delta_0 = D'' - \delta_0''$$

als strenge geltend annehmen, und hiemit folgt leicht aus (87)

$$(98)\quad \delta = \delta_0 + \delta'' - \delta_0'' + i'(g-k_0) - (g-k_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda\,\sec(\delta''+c+\Delta) - \tfrac{1}{2}r(g^2-k_0^2)\,\mathrm{tg}\,(\delta''+c+\ldots$$
$$+ \tfrac{1}{2}r(g-k_0)^2\,\mathrm{tg}^2\lambda\,\sec^2(\delta''+c+\Delta)\,\mathrm{tg}\,(\delta''+c+\Delta)$$

aus (88)

$$(99)\quad \delta = \delta_0 + \delta'' - \delta_0'' + i'(g-k_0) - (g-k_0)\,\mathrm{tg}\,\lambda\,\sec\{\tfrac{1}{2}(\delta_0''+\delta'') + c + \Delta\}$$
$$- \tfrac{1}{2}r(g^2-k_0^2)\,\mathrm{tg}\,\{\tfrac{1}{2}(\delta_0''+\delta'') + c + \Delta\}$$

und aus (89)

$$(100)\ \delta = \delta_0 + \delta'' - \delta_0'' + i'(g-k_0) \mp 2\sqrt{\left\{\tfrac{1}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0)\cos\delta_0 + \tfrac{1}{2}(g-k_0)\right\}\left\{\tfrac{1}{r}\sin\tfrac{1}{2}(\omega-\omega_0)\cos\delta_0 - \tfrac{1}{2}\ldots\right.}$$

Für jede Beobachtung bekommt man auf diese Art einen Werth von δ, und aus allen diesen nebst δ_0 muss man das arithmetische Mittel nehmen.

Wenn am Mittelfaden die Durchgangszeit sowohl wie die Declination beobachtet worden ist, so ist es vortheilhaft k_0 für diesen Faden gelten zu lassen, und also $k_0 = k$ zu setzen. Aber wenn k klein ist, so darf man sich erlauben $k_0 = 0$ zu setzen, wodurch die Rechnung vereinfacht wird, indem nicht nur in den Reductionsformeln für die Fädenantritte und die Declinationen mehrere Glieder wegfallen, sondern auch bei der Reduction von τ'' und δ_0'' auf τ und δ_0 in den betreffenden Ausdrücken $k=0$ gesetzt werden m u s s, wodurch diese sich auch vereinfachen. Es kommt dieses Verfahren nämlich auf dahin hinaus, alle Beobachtungen auf die auf der Declinationsachse senkrecht stehende Absehenslinie zu reduciren.

§. V.
Von der Wirkung der Biegung, der Strahlenbrechung und der Excentricität des Fernrohrs

37.

Ich komme jetzt auf ein Reductionselement, welches ich im Vorhergehenden gänzlich unberücksichtigt gelassen habe, auf die Biegung. Ich betrachte blos die Biegung des Fernrohrs, in welcher aber eine etwanige Biegung der beiden Kreise oder ihrer Alhidaden inbegriffen sein kann, da diese in demselben Sinne wirkt wie jene. Die Biegungen von Achsen u. s. w. des Aequatoreals lasse ich unberücksichtigt, da diese durch zweckmässige Anordnung der einzelnen Theile und ihrer Gegengewichte immer aufgehoben werden können. Auch das Fernrohr und seine Verbindung mit der Declinationsachse kann so eingerichtet werden, dass laterale Biegungen nicht vorhanden sein können, und nur die in der Richtung des Verticals, in welchem sich das Fernrohr grade befindet, wirkende übrig bleibt. Auch in Bezug auf diese kommt es nicht auf die absolute Biegung der beiden Rohrenden an, sondern nur auf den Unterschied derselben, welcher, wenn er nicht Null ist, doch stets klein sein wird. Die Wirkung der Biegung geschieht also in demselben oder im entgegengesetzten Sinne wie die der Strahlenbrechung, und hierin liegt ein bisher, wie es scheint, übersehenes Mittel zur einfachen und leichten Berücksichtigung derselben, da die Strahlenbrechung doch jedenfalls bei der Reduction der Beobachtungen berechnet werden muss.

Die im Vorhergehenden entwickelten, einfachen Formeln für die Reduction der mit einem Aequatoreal angestellten Beobachtungen, und die zur Berechnung der Reductionselemente, würden durch unmittelbare Hinzufügung der die Wirkung der Biegung ausdrückenden Glieder ihre Einfachheit verlieren, und ihre Anwendung würde mühsam werden, man vermeidet aber diese Weitläuftigkeiten, wenn man in Folge der obigen Bemerkung die Biegung des Fernrohrs mit entgegengesetztem Zeichen der Strahlenbrechung hinzufügt, und rückwärts auf die Oerter der Sterne überträgt. Für die Strahlenbrechung nehme ich die oft angewandte Form $\varrho \operatorname{tg} z$ an, wo z die Zenithdistanz bedeutet, und ϱ in der That eine Function von z ist, sich aber nur wenn z gross ist, merklich ändert. Die Biegung ist dem Sinus der Zenithdistanz proportional, und soll daher durch $\beta \sin z$

ausgedrückt werden. Der Coefficient β kann für Ein Aequatoreal positiv und für ein anderes negativ sein, je nachdem das eine oder das andere Ende des Fernrohrs dasjenige ist, welches sich am Meisten biegt. Das eben angenommene Gesetz der Biegung wird stets ohne merklichen Fehler vom Zenith bis zu einer gewissen Grösse der Zenithdistanz statt finden, sollte es aber für grössere Zenithdistanzen nicht mehr ausreichen, so ist kein Hinderniss vorhanden, um β gleichwie ϱ als eine Function von z betrachten zu können; diese Function muss in diesem Falle durch Anwendung der bekannten Interpolationsmethoden auf die Beobachtungen bestimmt werden.

Bezeichnen wir nun überhaupt die Veränderung einer Grösse durch ein derselben vorgesetztes Δ, dann ist, wenn man von den wahren zu den scheinbaren Oertern übergeht,

$$\Delta z = -\varrho \operatorname{tg} z - \beta \sin z$$

Nennt man aber die in Zeit ausgedrückte grade Aufsteigung eines Sterns α, seine Declination wie oben δ, und den Winkel am Stern zwischen dem Vertical- und dem Declinationskreise ε, so ist

$$\begin{aligned} 15\Delta\alpha . \cos\delta &= -\Delta z \sin\varepsilon \\ \Delta\delta &= -\Delta z \cos\varepsilon \end{aligned}$$

und ausserdem

$$\begin{aligned} \sin z \sin\varepsilon &= \sin\eta \\ \sin z \cos\varepsilon &= \cos\eta \cos(\delta+\zeta) \\ \cos z &= \cos\eta \sin(\delta+\zeta) \end{aligned}$$

wo die Hülfswinkel η und ζ aus folgenden Ausdrücken berechnet werden müssen,

$$(101) \quad \ldots\ldots \quad \left\{\begin{aligned} \cos\eta \cos\zeta &= \sin\varphi \\ \cos\eta \sin\zeta &= \cos\varphi \cos\tau \\ \sin\eta &= \cos\varphi \sin\tau \end{aligned}\right.$$

φ die Polhöhe des Beobachtungsorts, und τ wie oben der Stundenwinkel, oder wenn man mit T die Sternzeit der Beobachtung bezeichnet,

$$(102) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \tau = 15\,(T-\alpha)$$

ist. Hieraus ergiebt sich leicht

$$(103) \quad \ldots \quad \left\{\begin{aligned} 15\Delta\alpha &= \varrho \frac{\operatorname{tg}\eta}{\sin(\delta+\zeta)\cos\delta} + \beta \frac{\sin\eta}{\cos\delta} \\ \Delta\delta &= \varrho \operatorname{cotg}(\delta+\zeta) + \beta \cos\eta \cos(\delta+\zeta) \end{aligned}\right.$$

Den Coefficienten ϱ geben mehrere Strahlenbrechungstafeln unmittelbar, und die Hülfsmittel η und ζ kann man für jede gegebene Polhöhe in einfache Tafeln bringen die τ oder $\frac{1}{15}\tau$ zum Argument haben.

38.

Man darf annehmen, dass für ein gegebenes Aequatoreal β, so lange man nichts am Fernrohr ändert, sich auch nicht ändert, und kann daher die Bestimmung dieser Grösse mit der ersten Bestimmung oder den ersten Bestimmungen der Reductionselemente μ, m und η, oder λ, θ und Δ zugleich ausführen. Hat man diese durch irgend eine der in dieser Abhandlung entwickelten Methoden vermittelst der Beobachtung bekannter Fixsterne bestimmt, so wird man vermöge der Ausdrücke (101), (102), (103) dieselben in Function von β erhalten haben, indem die in diesen Methoden vorkommenden Grössen τ, δ, t, d vermöge dieser Ausdrücke zu Functionen von β gemacht worden sind. Sind nun für diese Bestimmungen eine mehr wie hinreichende und nöthige Anzahl von Sternen in möglichst verschiedenen Zenithdistanzen gewählt worden, so kann man daraus den Werth oder die Werthe von β berechnen. Am einfachsten wird diese Bestimmung, wenn man die dazu dienlichen Sterne in der Nähe des Meridians beobachtet, indem die Bestimmung von β sich alsdann fast nur auf die Vergleichung der durch das Aequatoreal erhaltenen Declinationsunterschiede mit den wahren reducirt.

Ich mache noch darauf aufmerksam, dass alle in dieser Abhandlung entwickelten Bestimmungen der Reductionselemente μ, m, η, i, k, c, oder α, p, q, i, k, c, oder λ, θ, Δ, k durch terrestrische Gegenstände, Collimator und Niveaus, so wie die im Art. 10. erklärte Bestimmung von i, k, c durch cölestische Beobachtungen unabhängig von der Biegung des Fernrohrs erlangt werden, oder mit andern Worten, dass die Biegung des Fernrohrs keinen Einfluss auf die durch diese Methoden erlangten Resultate hat.

39.

Auf die im Vorhergehenden entwickelten Methoden zur Reduction aller, während des Durchganges eines Sterns beobachteten, Fädenantritte auf Ein Moment übt die Strahlenbrechung eine Wirkung aus, die unter Umständen sehr merklich werden kann, und daher rührt, dass eben wegen derselben die Unterschiede der Stundenwinkel $\omega - \omega_0$ nicht der Zeit proportional sind; der Strahlenbrechung wegen bedürfen ebenfalls die auf Ein Moment reducirten Declinationen einer kleinen Verbesserung.

Nehmen wir um jene Wirkung zu entwickeln die Gleichung (96) vor, und stellen sie wie folgt,

$$\sin(\omega-\omega_0)=\pm\frac{r(g-k_0)H}{\sqrt{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda)}}$$

wo also H die Summe der unendlichen Reihe dieser Gleichung bedeutet. Da H immer sehr nahe gleich Eins ist, so darf man sie bei den folgenden Entwickelungen unberührt lassen, und es reicht hin die übrigen veränderlichen Grössen zu betrachten; es wird sich übrigens zeigen, dass das Resultat wenigstens näherungsweise auf H ausgedehnt werden kann.

Ich bemerke, dass der obige Ausdruck, so wie die übrigen Ausdrücke für $\omega-\omega_0$ verlangen, dass man für δ die scheinbare, von der Strahlenbrechung afficirte Declination des Sterns in sie substituire, und dass sie darauf, indem sie $\omega-\omega_0$ bestimmen, den Unterschied zwischen den gleichfalls von der Strahlenbrechung afficirten Stundenwinkeln geben, unter welchen sich der Stern in den beiden Absehenslinien befand. Dieser Unterschied ist aber wegen der Strahlenbrechung nicht der Zeit proportional, die der Stern gebraucht hat um ihn zu durchlaufen. Nennen wir diese Zeit t, und die Wirkung der Strahlenbrechung auf den Stundenwinkel $\Delta\tau$, wo unter τ entweder das Mittel aus den beiden Stundenwinkeln verstanden werden kann, in welchen sich der Stern in den beiden Absehenslinien befand, oder einer dieser Stundenwinkel selbst, und nehmen wir nur auf die erste Potenz der Strahlenbrechung Rücksicht, welches stets ausreicht, so ist

$$\omega-\omega_0=15t\left(1+\frac{d\Delta\tau}{d\tau}\right)$$

Schreiben wir ferner in den Ausdrücken für $\omega-\omega_0$, $\delta+\Delta\delta$ statt δ, wo $\Delta\delta$ die Wirkung der Strahlenbrechung auf die Declination bedeutet, so dürfen wir in denselben unter δ die Declination verstehen, die ohne Rücksicht auf die Strahlenbrechung statt findet, und es ist klar, dass beides $\Delta\tau$ und $\Delta\delta$ die Zeichen bekommen müssen, die statt finden, wenn man von den wahren zu den scheinbaren Oertern übergeht. Substituiren wir nun diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für $\sin(\omega-\omega_0)$, so wird

$$\sin\left\{15t\left(1+\frac{d\Delta\tau}{d\tau}\right)\right\}=\pm\frac{r(g-k_0)H}{\sqrt{\cos(\delta+\lambda+\Delta\delta)\cos(\delta-\lambda+\Delta\delta)}}$$

und wenn man diesen entwickelt, bei der ersten Potenz der Strahlenbrechung stehen bleibt, und auch das Product von $\sin^2 15t$ in die Strahlenbrechung übergeht, so ergiebt sich

$$(104)\quad\ldots\quad \sin 15t=\pm\frac{r(g-k_0)FH}{\sqrt{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda)}}$$

wo

$$F=1-\frac{d\Delta\tau}{d\tau}+\frac{\sin\delta\cos\delta}{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda)}\Delta\delta$$

ist.

40.

Aus den Ausdrücken (103) folgt

$$\Delta\tau = -\rho \frac{\operatorname{tg}\eta}{\sin(\delta+\zeta)\cos\delta}$$

$$\Delta\delta = -\rho \operatorname{cotg}(\delta+\zeta)$$

$$\frac{d\Delta\tau}{d\tau} = -\rho \frac{\sin\zeta}{\sin(\delta+\zeta)\cos\delta} - \rho \frac{\operatorname{tg}^2\eta}{\sin^2(\delta+\zeta)}$$

Substituirt man diese in den eben für F gefundenen Ausdruck, so bekommt man nach einer leichten Reduction

$$F = 1 + \rho\left\{1 + \frac{\operatorname{tg}\delta \sin^2\lambda \operatorname{cotg}(\delta+\zeta)}{\cos(\delta+\lambda)\cos(\delta-\lambda)} + \frac{\operatorname{tg}^2\eta}{\sin^2(\delta+\zeta)}\right\} \quad . \quad . \quad (105)$$

Bis zur Zenithdistanz von 60° bis 70° herab kann man, ohne merklichen Fehler befürchten zu müssen, in bei Weitem den meisten Fällen, in diesem Ausdruck

$$\log \rho = 6{,}4380 - 10$$

annehmen, und für grössere Zenithdistanzen ist ρ kleiner. Man sieht aus diesem numerischen Werth, dass der Factor F nur dann merkliche Wirkung äussern kann, wenn in dem Ausdruck (105) desselben die Divisoren klein werden, ohne dass zugleich die Zähler klein oder kleiner sind. Wenn nicht der Winkel λ über die Maassen gross ist, welches einen wenigstens eben so grossen Werth von μ bedingt, so kann das vorletzte Glied in (105) nur in ganz besonderen Fällen so gross werden, dass es merkliche Wirkung äussern könnte, weil $\sin^2\lambda$ im Zähler desselben vorkommt. Man wird aus diesem Grunde dieses Glied in den meisten Fällen übergehen können. Dieses vorausgesetzt sei

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\operatorname{tg}\eta}{\sin(\delta+\zeta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

dann wird

$$F = 1 + \rho \sec^2\psi \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105^*)$$

Diesen einfachen Ausdruck habe ich schon im zweiten Bande der Astr. Nachr. unter andern abgeleitet.

Da zufolge des eben entwickelten Ausdrucks von F der Winkel λ keine oder doch nur geringe Wirkung in dieser Reduction äussert, so kann man die Wirkung der Strahlenbrechung auf $\omega - \omega_0$ überhaupt dadurch berücksichtigen, dass man in der Gleichung (96) allenthalben

$$F(g - k_0) \text{ statt } g - k_0$$

schreibt.

41.

Die an die verschiedenen, bei Einem Durchgange eines Sterns erlangten, Werthe von δ wegen der Strahlenbrechung anzubringende Verbesserung kann auf die Grösse $\frac{d\Delta\delta}{d\tau}(\omega-\omega_0)$ beschränkt werden, und aus dem Ausdruck (103) für $\Delta\delta$ findet man leicht, wenn man diese Verbesserung mit (δ) bezeichnet,

$$(107) \quad . \quad . \quad (\delta)=\varrho\,\frac{\operatorname{tg}\eta}{\sin^2(\delta+\zeta)}(\omega-\omega_0)=\varrho\,\frac{\operatorname{tg}\psi}{\sin(\delta+\zeta)}(\omega-\omega_0)$$

Wenn der beobachtete Stern dem Horizont nicht gar zu nahe ist, so kann man während des Durchganges eines Sterns F sowohl wie $\frac{(\delta)}{\omega-\omega_0}$ jedenfalls constant annehmen, und für den Stundenwinkel berechnen, welcher dem Durchgange des Sterns durch den Mittelfaden entspricht. In der Nähe des Horizonts aber, wo diese Annahme wohl eine Ausnahme erleiden könnte, sind wiederum sowohl die Strahlenbrechung selbst wie die Beobachtungen so unsicher, dass es sich wohl nicht der Mühe lohnen möchte davon abzugehen. Während eines solchen Durchganges sind daher immer noch die in Betracht kommenden Unterschiede der Stundenwinkel den entsprechenden Zeitunterschieden proportional, nur verhält sich die Zeit nicht zum Bogen wie 1 zu 15, und dieses Verhältniss ist überhaupt für verschiedene Punkte der Himmelskugel anders.

Es folgt aber hieraus, dass die Wirkung der Strahlenbrechung auf die Durchgänge der Sterne verschwindet, wenn die Absehenslinien, in welchen beobachtet wird, zu beiden Seiten des mittleren Fadens symmetrisch vertheilt sind, dass aber wohl eine merkliche Wirkung entstehen kann, wenn dieses nicht der Fall ist. Es folgt ferner hieraus, dass diese Wirkung unmerklich ist, wenn man die Reduction der Beobachtungen nach den Methoden ausführt, die das Resultat des beobachteten Durchganges für das arithmetische Mittel aus den Beobachtungszeiten geben.

Es wäre hier noch die Wirkung einer eigenen Bewegung des beobachteten Sterns auf das Resultat des an mehreren Absehenslinien beobachteten Durchganges desselben zu erörtern, allein da man diese Bewegung immer während eines Durchganges der Zeit proportional annehmen kann, so verschwindet ihre Wirkung in denselben bei der Strahlenbrechung eben angemerkten Fällen, und ausserdem ist ihre Berücksichtigung so einfach, dass sie hier wohl nicht braucht aus einander gesetzt zu werden.

42.

Da alle, oder wenigstens die meisten, der in Deutschland gebauten Aequatoreale so eingerichtet sind, dass das Fernrohr in Bezug auf die Stundenachse excentrisch angebracht ist, und diese Einrichtung viele Vorzüge besitzt, so muss derselben schliesslich auch gedacht werden. Natürlich hat diese Anordnung auf die Einstellung cölestischer Gegenstände keinen Einfluss, allein sie kann auf die Einstellungen terrestrischer Gegenstände merkliche Wirkung äussern. Nennt man die Entfernung der Absehenslinie des Fernrohrs von der Stundenachse r, die Entfernung des eingestellten Gegenstandes von derselben R, und die Entfernung desselben von dem Punkt, in welchem sich die (verlängerte) Declinationsachse und die Absehenslinie schneiden, R_1; nimmt man ferner τ' und δ' in der Bedeutung auf, die sie immer in dieser Abhandlung gehabt haben, und nennt die analogen Winkel, unter welchen der Gegenstand von der Absehenslinie aus gesehen wird, τ_1 und δ_1, so findet man leicht die strengen Gleichungen

$$\begin{aligned} R_1 \cos\delta_1 \cos(\tau'-\tau_1) &= R\cos\delta' \pm r\sin(\tau'-\tau_1) \\ R_1 \cos\delta_1 \sin(\tau'-\tau_1) &= \mp r\cos(\tau'-\tau_1) \\ R_1 \sin\delta_1 &= R\sin\delta' \end{aligned}$$

woraus sich, wenn blos die erste Potenz von $\frac{r}{R}$ berücksichtigt wird,

$$\tau'-\tau_1 = \pm\frac{r}{R}\sec\delta',\quad \delta'-\delta_1 = 0$$

ergiebt. Die Verbesserung der Ablesung am Declinationskreise ist also zwar Null, aber den Ablesungen am Stundenkreise muss die Grösse

$$\pm\frac{r}{R}\,206265''.\sec\delta' \quad \ldots\ldots \quad (108)$$

hinzugefügt werden, wenn δ' wie in dieser Abhandlung überhaupt die durch die Collimation c verbesserte A b l e s u n g am Declinationskreise bedeutet.

Ueber die Anwendung des oberen oder unteren Zeichens dieses Ausdrucks muss der Bau des Aequatoreals entscheiden. Man denke sich das Fernrohr im Meridian und auf den Aequator auf die Art gerichtet, dass beide Kreise Null zeigen müssen, befindet sich nun bei dieser Einstellung das Fernrohr w e s t l i c h von der Stundenachse, so muss im Ausdruck (108) i m m e r das o b e r e Zeichen angewandt werden, ist im Gegentheil das Aequatoreal so gebaut, dass in der genannten Einstellung sich das Fernrohr ö s t l i c h von der Stundenachse befindet, so muss im Ausdruck (108) i m m e r das u n t e r e Zeichen angewandt werden.

Man erkennt nun leicht, dass die Bestimmung der Reductionselemente i und k durch die Ausdrücke (17), und die des Azimuths α durch (35) oder (35*) von dem Einfluss der Excentricität des Fernrohrs

$$SS_1 = 90^\circ - \zeta$$
$$S_1SP = 180^\circ + \psi$$
$$QSS_1 = \chi - 90^\circ$$
$$EQS_1 = 90^\circ - d''$$

$$QS_1 = 90^\circ - f - k$$
$$QPS_1 = 90^\circ - \omega$$
$$QS = 90^\circ - K$$
$$S_1QS = D'' - \delta'' - i''(f + k - K)$$
$$S_1PS = \omega - \Omega$$

ÜBER DIE

RATIONALITÄT DER TANGENTEN-VERHÄLTNISSE TAUTOZONALER KRYSTALLFLÄCHEN.

VON

C. F. NAUMANN.

ÜBER DIE RATIONALITÄT DER TANGENTEN-VERHÄLTNISSE TAUTOZONALER KRYSTALLFLÄCHEN.

§. 1. Einleitung.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass in einer jeden Krystallreihe die Tangenten der gegenseitigen Neigungswinkel aller tautozonalen, d. h. zu einer und derselben Zone gehörigen Flächen in rationalen Verhältnissen zu einander stehen.*) Diese Thatsache hat nicht nur ein praktisches, sondern auch ein theoretisches Interesse. Sie ist nämlich von praktischem Werthe, weil sie allen unseren Ableitungs-Constructionen zu Grunde liegt, und weil sie uns bei der Berechnung der verschiedenen Kantenwinkel einer und derselben Zone ein sehr leichtes und sicheres Anhalten gewährt. Sie hat aber auch eine theoretische Bedeutung, weil sie uns lehrt, dass das Verhältniss der Grund-Dimensionen einer jeden Krystallreihe wohl am richtigsten durch Quadratwurzelzahlen darzustellen ist, und weil sie uns einige Kriterien für die Beurtheilung der Zulässigkeit schiefwinkeliger Axensysteme darbietet.

Obgleich nämlich die Nothwendigkeit eines irrationalen Verhältnisses der Grund-Dimensionen für die verschiedenen Krystallreihen eines und desselben Krystallsystems schon *a priori* gefolgert werden kann, weil nur dadurch jeder Uebergang aus einer Krystallreihe in die andere, und das Zusammenfallen aller zu einem und demselben Systeme gehörigen Krystallreihen in einen einzigen Complex commensurabeler Formen unmöglich gemacht wird; so lässt doch diese Folgerung die Frage noch gänzlich unbeantwortet, in welcher Weise jener irrationale Charakter aufzufassen sei; ob es also Quadratwurzeln, Cubikwurzeln, oder irgend andere irrationale Zahlen sind, durch welche das

*) Es ist jedenfalls nützlich und bequem, für alle zu einer und derselben Zone gehörige Flächen einen sie gemeinschaftlich begreifenden Namen zu gebrauchen, weshalb ich sie tautozonale Flächen nenne; eben so verstehe ich unter tautozonalen Kanten alle zu einer und derselben Zone gehörigen Kanten.

Verhältniss der Grund-Dimensionen dargestellt werde. Die Thatsache der rationalen Verhältnisse der Tangenten aller Kantenwinkel einer und derselben Zone macht es aber höchst wahrscheinlich, dass meist nur Quadratwurzelgrössen der Natur entsprechen können, ohne dass jedoch rationale Zahlenwerthe gänzlich ausgeschlossen sind; ja, in den schiefwinkeligen Axensystemen scheint es sogar möglich, dass die Grund-Dimensionen ein rationales Verhältniss besitzen, weil schon die Verschiedenheit der schiefen Neigungswinkel der Axen die verschiedenen Krystallreihen incommensurabel macht.

Besonders aber dürfte das Gesetz der Rationalität der Tangenten-Verhältnisse eine theoretische Wichtigkeit für die Beantwortung der Frage gewinnen, ob den klinoëdrischen oder schiefwinkeligen Krystallsystemen, welche noch von so manchen ausgezeichneten Krystallographen als blose hemiëdrische oder tetartoëdrische Modificationen des rhombischen Systemes betrachtet werden, eine wirkliche Selbstständigkeit zugestanden werden könne, oder nicht. In diesen Systemen gewinnt nämlich, unter Voraussetzung schiefwinkeliger Axen, der allgemeine Ausdruck für die Tangenten der Neigungswinkel tautozonaler Flächen eine solche Gestalt, dass daraus gewisse Bedingungen gefolgert werden können, unter denen die schiefen Winkel der Axen und die Grund-Dimensionen stehen müssen, dafern die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse erhalten bleiben soll. Da nun an der Erhaltung dieses Gesetzes auch in dem monoklinoëdrischen und triklinoëdrischen Systeme gar nicht gezweifelt werden kann, so kommt es nur darauf an, zu prüfen, ob auch jene Bedingungen für die verschiedenen Krystallreihen dieser Systeme wirklich in Erfüllung gebracht sind. Sollte sich diess bestätigen, so würde wohl eines der wesentlichsten Bedenken gehoben sein, welches vom krystallographischen Standpunkte aus noch gegen die Anerkennung schiefwinkeliger Axensysteme geltend gemacht werden kann. Wir werden aber weiter unten an einigen Beispielen zeigen, dass die Krystallreihen des monoklinoëdrischen und triklinoëdrischen Systemes den Bedingungen recht wohl entsprechen, welche für die Elemente ihrer Axensysteme gefordert werden, und dass z. B. das Vorkommen gleich geneigter aber krystallographisch und physikalisch ungleichwerthiger Flächen in manchen Krystallreihen des monoklinoëdrischen Systemes, wie des Orthoklases und Pyroxenes, eine nothwendige Folge jener Bedingungen ist.

So viel mir bekannt, haben bis jetzt nur Weiss, Neumann und Kupffer, diese drei Koryphäen unter den Krystallographen, Beweise für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kantenwinkel geliefert. Da sie aber ihre Beweisführung unter gewissen beschränkenden Bedingungen gaben, wie denn z. B. Neumann nur auf orthoëdrische und hexagonale Formen Rücksicht nimmt,*) während Kupffer, obgleich von dem triklinoëdrischen Systeme ausgehend, doch nur die Tangenten-Verhältnisse solcher Zonen discutirt, deren Zonenlinie einer der Coordinat-Ebenen parallel ist,**) so schien es mir nicht überflüssig, in den folgenden Betrachtungen denselben Gegenstand von einem ganz allgemeinen Gesichtspunkte aus zu behandeln.

§. 2. Allgemeine Bedingung für tautozonale Flächen in allen Krystallsystemen.

Wir denken uns ein beliebiges, rechtwinkeliges oder schiefwinkeliges Axensystem, und in den drei Axen desselben die Parameter der Grundform, oder die Grund-Dimensionen a, b und c gegeben, welche zu einander in irgend einem rationalen oder irrationalen Verhältnisse stehen mögen. Dabei setzen wir voraus, dass a in der (aufrechten) Axe der x, b in der Axe der y, und c in der Axe der z liege. Wir denken uns ferner zwei verschiedene, in den Octanten der positiven Halbaxen fallende Flächen F und F', durch welche die zu betrachtende Zone bestimmt wird, und deren Parameter Multipla oder Submultipla jener Grund-Dimensionen nach rationalen Zahlen m, n, r und m', n', r' sind, so dass also

für die Fläche F die Parameter ma, nb und rc,

für die Fläche F' die Parameter $m'a$, $n'b$ und $r'c$

gelten. Diese rationalen Zahlen m, n u. s. w. sind bekanntlich die Ableitungszahlen der Krystallographie, von denen in der Wirklichkeit allemal eine mit dem Werthe 1 zu nehmen ist.

Die Gleichungen der beiden Flächen F und F' werden demnach

$$\frac{x}{ma} + \frac{y}{nb} + \frac{z}{rc} = 1$$

$$\text{und } \frac{x}{m'a} + \frac{y}{n'b} + \frac{z}{r'c} = 1$$

*) Neumann, Beiträge zur Krystallonomie, Heft I, 1823, S. 19 ff.

**) Kupffer, Handbuch der rechnenden Krystallonomie, 1831, S. 498 ff.

Wir können uns aber diese (so wie alle fernerhin zu berücksichtigenden) Flächen, ohne dadurch die Allgemeinheit unserer Betrachtung zu beschränken, auf den Mittelpunkt des Axensystemes verlegt denken, und daher rechter Hand vom Gleichheitszeichen 0 statt 1 schreiben.

Die Zonenlinie der zu betrachtenden Zone ist nun keine andere, als die gleichfalls auf den Mittelpunkt verlegte Durchschnittslinie der beiden Flächen F und F'; ihre Gleichungen werden daher:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{Ma} - \frac{y}{Nb} &= 0 \\ \frac{z}{Rc} - \frac{x}{Ma} &= 0 \\ \frac{y}{Nb} - \frac{z}{Rc} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

indem wir zur leichteren Uebersicht die rationalen, und für eine und dieselbe Zone constanten Factoren von a, b und c, nämlich

$$mm'(nr' - n'r) \text{ mit } M$$
$$nn'(rm' - r'm) \text{ mit } N$$
$$\text{und } rr'(mn' - m'n) \text{ mit } R$$

bezeichnen. Diese Grössen M, N und R sind es, welche in der ganzen Zonenlehre eine so wichtige Rolle spielen, dass es zweckmässig erscheint, sie mit einem besonderen Namen zu belegen, um sich kurz und bestimmt über sie aussprechen zu können; wir wollen sie dem gemäss die Coëfficienten der Zonengleichung nennen. Die Zonengleichung aber, oder die Bedingungsgleichung, welcher eine jede andere, der Zonenlinie parallele, und folglich derselben Zone angehörige Fläche F'' Genüge leisten muss, ist

$$\frac{M}{m''} + \frac{N}{n''} + \frac{R}{r''} = 0 \quad (2)$$

wenn m'', n'' und r'' die auf die Grund-Dimensionen a, b und c bezüglichen Ableitungszahlen dieser dritten Fläche bedeuten.

Da nun die Zonenlinie auch als die Durchschnittslinie dieser Fläche F'' mit einer der anderen beiden Flächen, z. B. mit F, vorgestellt werden kann, so müssen sich ihre Gleichungen auch folgendermaassen schreiben lassen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{x}{M'a} - \frac{y}{N'b} &= 0 \\ \frac{z}{R'c} - \frac{x}{M'a} &= 0 \\ \frac{y}{N'b} - \frac{z}{R'c} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

in welchen abermals, der leichteren Uebersicht wegen,

$$mm''(nr''-n''r)=M'$$
$$nn''(rm''-r''m)=N'$$
und $$rr''(mn''-m''n)=R'$$

gesetzt wird. Die Zonenlinie ist aber doch nur eine einzige Linie, welche wir auf den Mittelpunkt des Axensystems verlegt haben. Da es nun bei solchen durch den Mittelpunkt gehenden Linien lediglich auf das Verhältniss der Parameter ankommt, so muss nothwendig

$$M:N=M':N'$$
$$R:M=R':M'$$
$$N:R=N':R'$$

sein, wenn durch beide jene Systeme von Gleichungen, nämlich durch (1) und (3) eine und dieselbe Linie dargestellt werden soll. Hieraus ergiebt sich denn aber auch ferner, dass

$$M:N:R=M':N':R'$$

oder, weil alle diese Grössen rationale Zahlwerthe haben, dass

$$M'=kM,\ N'=kN,\ R'=kR \quad (4)$$

was so viel bedeutet, dass M', N' und R' Multipla oder Submultipla von M, N und R nach irgend einer und derselben rationalen Zahl k sind.*)

Dieses ist ein allgemeines Gesetz, welches alle tautozonalen Flächen beherrscht, und gänzlich unabhängig von der Beschaffenheit des Krystallsystems ist; wie denn überhaupt die bisherigen Betrachtungen für alle Krystallsysteme in gleicher Weise Giltigkeit haben. Dasselbe lässt sich freilich nicht mehr von den nun folgenden Betrachtungen behaupten.

Um nämlich die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kantenwinkel beweisen zu können, dazu bedürfen wir zuvörderst des allgemeinen Ausdruckes für die Tangente des Neigungswinkels W irgend zweier Flächen. Da nun dieser Ausdruck in den verschiedenen Krystallsystemen, nach Maassgabe ihres geometrischen Grundcharakters, eine

*) Man kann diess auch so ausdrücken: die Coëfficienten der Zonengleichung, wie solche aus irgend zwei Flächen einer Zone folgen, sind gleiche und rationale Multipla der, aus zwei beliebigen anderen Flächen derselben Zone abgeleiteten Coëfficienten. Die Richtigkeit dieser Folgerung wird übrigens noch dadurch bestätigt, dass je zwei der Gleichungen $M'=kM$, $N'=kN$, oder $R'=kR$ für sich auf die Zonengleichung (2) gelangen lassen, welche daher auch aus diesen Bedingungen gefolgert werden kann.

sehr verschiedene Gestalt erhält, so dürfte es zweckmässig sein, unsere ferneren Untersuchungen für die verschiedenen Krystallsysteme besonders durchzuführen.

§. 3. Rationalität der Tangenten-Verhältnisse in den orthoëdrischen Krystallsystemen.

In den orthoëdrischen Krystallsystemen, also in dem tesseralen, tetragonalen und rhombischen Systeme, sind alle drei Axen rechtwinkelig auf einander, und es bestehen für sie nur noch die Verschiedenheiten der Grund-Dimensionen, für welche im Tesseralsysteme

statt $a:b:c$ die Werthe $1:1:1$,

m Tetragonalsysteme

statt $a:b:c$ die Werthe $a:1:1$

Giltigkeit haben, während im rhombischen Systeme die Ungleichheit aller drei Dimensionen ohne Weiteres durch das Verhältniss $a:b:c$ dargestellt wird. Da nun die für das tesserale und das tetragonale System giltigen Dimensions-Verhältnisse nur als besondere Fälle des allgemeinen Verhältnisses $a:b:c$ zu betrachten sind, so wollen wir bei unseren Betrachtungen zunächst dieses Verhältniss zu Grunde legen.

Gehen wir von dem bekannten Werthe des Cosinus des Neigungswinkels aus, welcher in einem rechtwinkeligen Axensysteme für irgend zwei, durch ihre Parameter a, b und c, a', b' und c' bestimmte Flächen durch

$$\cos W = -\frac{aa'bb' + cc'aa' + bb'cc'}{\sqrt{a^2b^2 + c^2a^2 + b^2c^2}\,\sqrt{a'^2b'^2 + c'^2a'^2 + b'^2c'^2}}$$

gegeben ist, so ergiebt sich, dass für zwei abgeleitete Krystallflächen F und F' mit den Parametern ma, nb und rc, $m'a$, $n'b$ und $r'c$, die Tangente ihres Neigungswinkels folgenden Werth erhält:

$$\operatorname{tang} W = \frac{abc\sqrt{M^2a^2 + N^2b^2 + R^2c^2}}{mm'nn'a^2b^2 + rr'mm'c^2a^2 + nn'rr'b^2c^2} = abc\frac{\sqrt{P}}{Q}$$

worin M, N und R die Coëfficienten der durch F und F' bestimmten Zonengleichung sind. Bezeichnen wir nun mit W' den Neigungswinkel der Fläche F gegen eine dritte Fläche F'' von den Parametern $m''a$, $n''b$ und $r''c$, so folgt eben so:

$$\operatorname{tang} W' = \frac{abc\sqrt{M'^2a^2 + N'^2b^2 + R'^2c^2}}{mm''nn''a^2b^2 + rr''mm''c^2a^2 + nn''rr''b^2c^2} = abc\frac{\sqrt{P'}}{Q'}$$

worin M', N' und R' die Coëfficienten der durch F und F'' bestimmten Zonengleichung sind. Nun sollen aber die drei Flächen F, F' und F''

tautozonal sein; folglich muss, nach (4) in §. 2, $M' = kM$, $N' = kN$ und $R' = kR$ gesetzt werden können, und es wird daher

$$\text{tang } W' = abc \frac{k\sqrt{P}}{Q'}$$

woraus sich denn ergiebt:

$$\text{tang } W : \text{tang } W' = \frac{1}{Q} : \frac{k}{Q'}$$

oder, indem man einen der drei Werthe von k einsetzt,

$$\text{tang } W : \text{tang } W' = \frac{M}{Q} : \frac{M'}{Q'} = \frac{N}{Q} : \frac{N'}{Q'} = \frac{R}{Q} : \frac{R'}{Q'}$$

welches das gesuchte Verhältniss der Tangenten in allen orthoëdrischen Krystallsystemen ist.

Dieses Verhältniss wird aber jedenfalls rational sein, sobald a, b und c, oder die Grund-Dimensionen der betreffenden Krystallreihe, entweder rationale Zahlenwerthe oder Quadratwurzelwerthe haben, weil ja die Ableitungszahlen m, n, r u. s. w., eben so wie die Grössen M und M' lauter rationale Zahlenwerthe haben. Nun können aber die Grund-Dimensionen wenigstens nicht allgemein durch rationale Zahlen dargestellt werden, weil dann zwischen den einzelnen Krystallreihen eines jeden Systems alle Schranken fallen würden, wie solches zwar im Tesseralsysteme, in den übrigen Systemen aber gewiss nicht der Fall ist. Da nun die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse eine durch alle Beobachtungen bestätigte Thatsache ist, so liefert sie auch den Beweis für die Richtigkeit der von Weiss geltend gemachten Ansicht, dass die Grund-Dimensionen der verschiedenen orthoëdrischen Krystallreihen allgemein nur in Quadratwurzelgrössen ihren naturgemässen Ausdruck finden können, ohne dass jedoch rationale Zahlwerthe gänzlich ausgeschlossen sind.

§. 4. Cosinus des Neigungswinkels zweier Flächen im triklinoëdrischen Krystallsysteme.

Von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus lässt sich auch das Hexagonalsystem den klinoëdrischen Krystallsystemen beirechnen, weil dasselbe, nach Elimination der einen Nebenaxe, ein dreizähliges Axensystem darstellt, in welchem sich zwei Coordinat-Ebenen unter 60° schneiden, während die dritte Ebene auf beiden rechtwinkelig ist. Wir werden von dieser Ansicht weiter unten Gebrauch machen, nachdem wir vorher die eigentlich so genannten klinoëdrischen Krystallsysteme in Betrachtung gezogen haben.

Um diese Betrachtung möglichst allgemein zu begründen, beginnen wir mit dem triklinoëdrischen Krystallsysteme, weil aus den Resultaten, auf welche wir in diesem Systeme gelangen, auch diejenigen Resultate gefolgert werden können, welche im diklinoëdrischen und monoklinoëdrischen Systeme Giltigkeit haben.

Es sei uns also eine triklinoëdrische Krystallreihe durch ihre Axen und durch die an diesen Axen anliegenden Neigungswinkel der Coordinat-Ebenen A, B und C, so wie durch die den Axen gegenüberliegenden Mittelpunktswinkel α, β und γ gegeben; so entsteht uns zuvörderst die Aufgabe, den allgemeinen Ausdruck für die Tangente des Neigungswinkels W irgend zweier Flächen F und F' zu finden, von denen die eine durch die Parameter a, b und c, die andere durch die Parameter a', b' und c' bestimmt wird. Zur Lösung dieser Aufgabe wollen wir erst den Cosinus dieses Winkels aufsuchen, wobei wir uns der bekannten Methode bedienen, den Cosinus des Neigungswinkels der Centronormalen beider Flächen, d. h. der aus dem Mittelpunkte des Axensystems auf sie gefällten Normalen, zu bestimmen, welcher Winkel ja derselbe ist, den die beiden Flächen selbst mit einander bilden. *)

Die Gleichungen der beiden Flächen F und F' seien:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1 \text{ und } \frac{x}{a'}+\frac{y}{b'}+\frac{z}{c'}=1$$

Nennen wir ihre Centronormalen N und N', und setzen wir, die Gleichungen seien:

$$\text{für } N:\ \frac{x}{p}-\frac{y}{q}=0 \text{ und } \frac{z}{s}-\frac{x}{p}=0$$

$$\text{für } N':\ \frac{x}{p'}-\frac{y}{q'}=0 \text{ und } \frac{z}{s'}-\frac{x}{p'}=0$$

so ist in diesen Gleichungen

$$\left.\begin{array}{ll}\text{für } N: & p=bc\sin^2\alpha-abB'-caC'\\ & q=ca\sin^2\beta-bcC'-abA'\\ & s=ab\sin^2\gamma-caA'-bcB'\\ \text{für } N': & p'=b'c'\sin^2\alpha-a'b'B'-c'a'C'\\ & q'=c'a'\sin^2\beta-b'c'C'-a'b'A'\\ & s'=a'b'\sin^2\gamma-c'a'A'-b'c'B'\end{array}\right\}\quad(5)$$

*) Dieses Problem ist zwar schon lange in den Lehrbüchern der analytischen Geometrie so wie in Kupffer's Handbuch der rechnenden Krystallonomie S. 48 f., auch neuerdings auf eine eigenthümliche Weise von Müller (in Poggendorff's Annalen, B. 84, S. 439 ff.) gelöst worden; indessen glauben wir es hier einschalten zu müssen, weil wir es in einer, unserer Schreibart der Gleichungen entsprechenden, ziemlich einfachen Weise zu lösen versucht haben.

wenn wir nämlich, der leichteren Uebersicht wegen,

$$\left.\begin{array}{l} \cos A \sin\beta \sin\gamma = A' \\ \cos B \sin\gamma \sin\alpha = B' \\ \cos C \sin\alpha \sin\beta = C' \end{array}\right\} \quad (6)$$

setzen. Der Neigungswinkel beider Normalen bestimmt sich aber aus ihren vorstehenden Gleichungen, nach bekannten Regeln, durch

$$\cos W = \frac{pp' + qq' + ss' + (qs' + q's)\cos\alpha + (sp' + s'p)\cos\beta + (pq' + p'q)\cos\gamma}{\sqrt{p^2+q^2+s^2+2qs\cos\alpha+2sp\cos\beta+2pq\cos\gamma}\,\sqrt{p'^2+q'^2+s'^2+2q's'\cos\alpha+2s'p'\cos\beta+2p'q\cos\gamma}}$$

oder $\cos W = \frac{H}{\sqrt{KK'}}$

Substituirt man in diesem Ausdrucke für p, q und s, p', q' und s' ihre oben bei (5) angegebenen Werthe, so gelangt man auf den eigentlich gesuchten Werth von $\cos W$. Es würde jedoch diese Substitution eine ziemlich weitläufige Rechnung erfordern, wenn man dabei den Zähler und Nenner von $\cos W$ ohne Weiteres in ihrer vorstehenden Form zu Grunde legen wollte. Weit schneller gelangt man zum Ziele, wenn man vorher den ganzen Ausdruck von $\cos W$ einer Reduction unterwirft, welche sich dadurch ergiebt, dass man sowohl den Zähler H, als auch die beiden Factoren K und K' des Nenners in einer anderen Weise schreibt. Es ist nämlich:

$$H = p(p' + q'\cos\gamma + s'\cos\beta) + q(q' + s'\cos\alpha + p'\cos\gamma) + s(s' + p'\cos\beta + q'\cos\alpha)$$

oder auch, auf ähnliche Art ausgedrückt:

$$H = p'(p + q\cos\gamma + s\cos\beta) + q'(q + s\cos\alpha + p\cos\gamma) + s'(s + p\cos\beta + q\cos\alpha)$$

und es ist eben so:

$$K = p(p + q\cos\gamma + s\cos\beta) + q(q + s\cos\alpha + p\cos\gamma) + s(s + p\cos\beta + q\cos\alpha)$$
$$K' = p'(p' + q'\cos\gamma + s'\cos\beta) + q'(q' + s'\cos\alpha + p'\cos\gamma) + s'(s' + p'\cos\beta + q'\cos\alpha)$$

Sucht man nun zuvörderst die eingeklammerten Grössen durch Substitution der obigen Werthe von p, q, s, p', q' und s' zu bestimmen, so findet man, wenn

$$1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta - \cos^2\gamma + 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma = E$$

gesetzt wird,

$$\begin{array}{l} p + q\cos\gamma + s\cos\beta = bcE \\ q + s\cos\alpha + p\cos\gamma = caE \\ s + p\cos\beta + q\cos\alpha = abE \\ p' + q'\cos\gamma + s'\cos\beta = b'c'E \\ q' + s'\cos\alpha + p'\cos\gamma = c'a'E \\ s' + p'\cos\beta + q'\cos\alpha = a'b'E \end{array}$$

woraus sich denn ergiebt, dass

$$H = (pb'c' + qc'a' + sa'b')E, \quad \text{oder auch} = (p'bc + q'ca + s'ab)E$$
$$K = (pbc + qca + sab)E$$
$$K' = (p'b'c' + q'c'a' + s'a'b')E$$

Demgemäss reducirt sich der obige Ausdruck von $\cos W$ auf:

$$\left.\begin{array}{l} \cos W = \dfrac{pb'c' + qc'a' + sa'b'}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}} \\ \text{oder auch } \cos W = \dfrac{p'bc + q'ca + s'ab}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}} \end{array}\right\} = \frac{\mathfrak{H}}{\sqrt{\mathfrak{K}\mathfrak{K}'}} \qquad (7.$$

Führt man nun in den einen oder anderen dieser Ausdrücke abermals die oben stehenden Werthe von p, q, s, p', q' und s' ein, so wird:

$$\mathfrak{H} = bb'cc'\sin^2\alpha + cc'aa'\sin^2\beta + aa'bb'\sin^2\gamma - aa'(bc' + b'c)A' - bb'(ca' + c'a)B' - cc'(ab' + a'b)C'$$
$$\mathfrak{K} = b^2c^2\sin^2\alpha + c^2a^2\sin^2\beta + a^2b^2\sin^2\gamma - 2a^2bcA' - 2b^2caB' - 2c^2abC'$$
$$\mathfrak{K}' = b'^2c'^2\sin^2\alpha + c'^2a'^2\sin^2\beta + a'^2b'^2\sin^2\gamma - 2a'^2b'c'A' - 2b'^2c'a'B' - 2c'^2a'b'C'$$

in welchen Formeln man nur noch die bei (6) stehenden Werthe von A', B' und C' zu substituiren braucht, um den definitiven Ausdruck für $\cos W$, als eine Function der Parameter beider Flächen F und F' und der sechs Grundwinkel des Axensystemes zu erhalten.

§. 5. Tangente des Neigungswinkels zweier Flächen im triklinoëdrischen Krystallsysteme.

Aus dem zweifachen Ausdrucke, auf welchen wir in §. 4 für den Cosinus des Neigungswinkels W zweier Flächen F und F' gelangt sind, nämlich aus

$$\cos W = \frac{pb'c' + qc'a' + sa'b'}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}}$$

$$\text{und } \cos W = \frac{p'bc + q'ca + s'ab}{\sqrt{pbc + qca + sab}\,\sqrt{p'b'c' + q'c'a' + s'a'b'}}$$

gelangen wir nun sehr leicht zu der Bestimmung von $\cos^2 W$; indem wir nämlich diese beiden Ausdrücke mit einander multipliciren, ergiebt sich:

$$\cos^2 W = \frac{(pb'c' + qc'a' + sa'b')\,(p'bc + q'ca + s'ab)}{(pbc + qca + sab)\,(p'b'c' + q'c'a + s'a'b')}$$

woraus sich denn ebenfalls mit Leichtigkeit der Sinus, und endlich die Tangente von W mit folgendem Werthe ergiebt:

$$\operatorname{tang} W = \frac{\sqrt{[aa'(bc' - b'c)\,(q's - qs') + bb'(ca' - c'a)\,(s'p - sp') + cc'(ab' - a'b)\,(p'q - pq')]}}{pb'c' + qc'a' + sa'b'}$$

Dieses ist ein einfacher und übersichtlicher Ausdruck für die Tangente des Neigungswinkels zweier Flächen, in welchem solche als eine Function

der Parameter beider Flächen und der Parameter ihrer beiden Centronormalen erscheint. Man braucht nur noch für p, q, s, p', q' und s' ihre in §. 4 bei (5) stehenden Werthe zu substituiren, um diesen Ausdruck so umzugestalten, dass er sich auch als eine Function der Winkel A, B, C, α, β und γ darstellt. Führt man diese Substitution aus, so gelangt man, nach den erforderlichen Reductionen und unter Berücksichtigung des Umstandes, dass $\sin C \sin\alpha \sin\beta = \sin B \sin\gamma \sin\alpha = \sin A \sin\beta \sin\gamma$ ist, zuvörderst auf die Werthe von

$$q's - qs' = \sin^2 A \sin^2\beta \sin^2\gamma\,[aa'(bc'-b'c) + bb'(ca'-c'a)\cos\gamma + cc'(ab'-a'b)\cos\beta]$$
$$s'p - sp' = \sin^2 B \sin^2\gamma \sin^2\alpha\,[bb'(ca'-c'a) + cc'(ab'-a'b)\cos\alpha + aa'(bc'-b'c)\cos\gamma]$$
$$p'q - pq' = \sin^2 C \sin^2\alpha \sin^2\beta\,[cc'(ab'-a'b) + aa'(bc'-b'c)\cos\beta + bb'(ca'-c'a)\cos\alpha]$$

und dann auf folgenden definitiven Ausdruck:

$$\operatorname{tang} W = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{R}^2 + 2\mathfrak{M}\mathfrak{N}\cos\gamma + 2\mathfrak{R}\mathfrak{M}\cos\beta + 2\mathfrak{N}\mathfrak{R}\cos\alpha)}}{aa'bb'\sin^2\gamma + cc'aa'\sin^2\beta + bb'cc'\sin^2\alpha - aa'(bc'+b'c)A' - bb'(ca'+c'a)B' - cc'(ab'+a'b)C'}$$

oder $$\operatorname{tang} W = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{P}}{Q}$$

in welchem, der besseren Uebersicht wegen, einstweilen

$$aa'(bc'-b'c) = \mathfrak{M}$$
$$bb'(ca'-c'a) = \mathfrak{N}$$
$$cc'(ab'-a'b) = \mathfrak{R}$$

und, wie oben in §. 4,

$$\cos A \sin\beta \sin\gamma = A'$$
$$\cos B \sin\gamma \sin\alpha = B'$$
$$\cos C \sin\alpha \sin\beta = C'$$

gesetzt worden ist.

§. 6. Verhältniss der Tangenten zweier tautozonaler Kanten im triklinoëdrischen Krystallsysteme.

Aus dem allgemeinen Ausdrucke für tang W lässt sich nun leicht das Verhältniss bestimmen, in welchem die Tangenten irgend zweier tautozonaler Kanten zu einander stehen müssen. Wie sich nämlich für die beiden Flächen F und F'

$$\operatorname{tang} W = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{(\mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 + \mathfrak{R}^2 + 2\mathfrak{M}\mathfrak{N}\cos\gamma + 2\mathfrak{R}\mathfrak{M}\cos\beta + 2\mathfrak{N}\mathfrak{R}\cos\alpha)}}{aa'bb'\sin^2\gamma + cc'aa'\sin^2\beta + bb'cc'\sin^2\alpha - aa'(bc'+b'c)A' - bb'(ca'+c'a)B' - cc'(ab'+a'b)C'}$$
$$= \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{P}}{Q} \quad (8)$$

bestimmt, so wird für den Neigungswinkel W' der ersten Fläche F zu irgend einer dritten Fläche F'', deren Parameter a'', b'' und c'' sind:

$$\operatorname{tang} W' = \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{(\mathfrak{M}'^2 + \mathfrak{N}'^2 + \mathfrak{R}'^2 + 2\mathfrak{M}'\mathfrak{N}'\cos\gamma + 2\mathfrak{R}'\mathfrak{M}'\cos\beta + 2\mathfrak{N}'\mathfrak{R}'\cos\alpha)}}{aa''bb''\sin^2\gamma + cc''aa''\sin^2\beta + bb''cc''\sin^2\alpha - aa''(bc''+b''c)A' - bb''(ca''+c''a)B' - cc''(ab''+a''b)C'}$$

$$= \frac{\sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{P'}}{Q'}$$

in welchem Ausdrucke, der besseren Uebersicht wegen,

$$aa''(bc''-b''c) = \mathfrak{M}'$$
$$bb''(ca''-c''a) = \mathfrak{N}'$$
$$cc''(ab''-a''b) = \mathfrak{R}'$$

gesetzt ist, während A', B' und C' dieselbe Bedeutung haben, wie zu Ende des vorhergehenden Paragraphen.

Sollen nun aber die drei Flächen F, F' und F'' tautozonal sein, so wird für sie, auf ähnliche Weise wie solches in §. 2 gezeigt wurde, nothwendig erfordert, dass

$$\mathfrak{M}' = k\mathfrak{M},\quad \mathfrak{N}' = k\mathfrak{N},\quad \mathfrak{R}' = k\mathfrak{R};$$

folglich wird

$$\operatorname{tang} W' = \frac{k \sin A \sin\beta \sin\gamma \sqrt{P}}{Q'} \qquad (9)$$

woraus sich denn endlich für die Tangenten der beiden tautozonalen Winkel W und W' das Verhältniss ergiebt:

$$\operatorname{tang} W : \operatorname{tang} W' = \frac{1}{Q} : \frac{k}{Q'}$$

Jetzt müssen wir noch die gefundenen Resultate in einer, unserer krystallographischen Ableitungsmethode entsprechenden Weise schreiben, indem wir die drei Flächen F, F' und F'' als abgeleitete Flächen auf irgend eine, durch das Parameter-Verhältniss $a:b:c$ bestimmte Grundform beziehen. Zu dem Ende haben wir

für a, b und c die Grössen ma, nb und rc,
für a', b' und c' die Grössen $m'a$, $n'b$ und $r'c$,
für a'', b'' und c'' die Grössen $m''a$, $n''b$ und $r''c$

einzusetzen; dadurch wird zuvörderst:

$$\mathfrak{M} = a^2bcM \quad \mathfrak{N} = b^2caN \quad \mathfrak{R} = c^2abR$$
$$\mathfrak{M}' = a^2bcM' \quad \mathfrak{N}' = b^2caN' \quad \mathfrak{R}' = c^2abR'$$

in welchen Werthen M, N und R, M', N' und R' die oben in §. 2 stehenden Coëfficienten der Zonengleichung sind. Nach erfolgter Substitution dieser Werthe erhalten wir für die im Zähler und Nenner der beiden Tangentenwerthe (8) und (9) stehenden Grössen

$$P = (a^2M^2 + b^2N^2 + c^2R^2 + 2abMN\cos\gamma + 2caRM\cos\beta + 2bcNR\cos\alpha)\,a^2b^2c^2$$

$$\left.\begin{aligned} Q &= mm'nn'a^2b^2\sin^2\gamma + rr'mm'c^2a^2\sin^2\beta + nn'rr'b^2c^2\sin^2\alpha - mm'a^2(nr'+n'r)\,bcA' \\ &\qquad - nn'b^2(rm'+r'm)\,caB' - rr'c^2(mn'+m'n)\,abC' \\ Q' &= mm''nn''a^2b^2\sin^2\gamma + rr''mm''c^2a^2\sin^2\beta + nn''rr''b^2c^2\sin^2\alpha - mm''a^2(nr''+n''r)\,bcA' \\ &\qquad - nn''b^2(rm''+r''m)\,caB' - rr''c^2(mn''+m''n)\,abC' \end{aligned}\right\}\quad(10)$$

und schliesslich, als definitiven Ausdruck für das gesuchte Tangenten-Verhältniss:

$$\text{tang}\,W : \text{tang}\,W' = \frac{M}{Q} : \frac{M'}{Q'} = \frac{N}{Q} : \frac{N'}{Q'} = \frac{R}{Q} : \frac{R'}{Q'}$$

in welchem Q und Q' die bei (10) stehenden Werthe haben, in Betreff welcher nur noch die in §. 4 bei (6) angegebene Bedeutung der Buchstaben A', B' und C' zu berücksichtigen ist.

Hiermit hätten wir denn eine Basis gewonnen, auf welche wir unsere ferneren Betrachtungen zu gründen haben. Wir könnten nun sofort zur Erörterung der Bedingungen verschreiten, unter welchen die Werthe von Q und Q' im triklinoëdrischen Systeme rational sein werden, verschieben jedoch diese Betrachtung auf einen der folgenden Paragraphen, um zunächst aus den gewonnenen Resultaten die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse für das monoklinoëdrische und diklinoëdrische System zu erschliessen.

§. 7. Bedingung für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse im monoklinoëdrischen Krystallsysteme.

Wollen wir die in §. 6 gefundenen Resultate für das monoklinoëdrische Krystallsystem benutzen, so haben wir zu berücksichtigen, dass in diesem Systeme

$$A = 90^\circ \quad \alpha = 90^\circ$$
$$B = 90^\circ \quad \beta = 90^\circ$$
$$\text{und } \gamma = C$$

ist. Führen wir diese Werthe in dem allgemeinen Ausdrucke von tang W ein, so ergiebt sich

$$\text{tang}\,W = \frac{abc\sin C\,\sqrt{(a^2M^2+b^2N^2+c^2R^2+2abMN\cos C)}}{mm'nn'a^2b^2\sin^2 C + rr'mm'c^2a^2 + nn'rr'b^2c^2 - rr'c^2(mn'+m'n)\,ab\cos C}$$
$$= \frac{abc\sin C\,\sqrt{P}}{Q}$$

Setzt man hierin M', N' und R', oder kM, kN und kR statt M, N und R, so wie m'', n'' und r'' statt m', n' und r', so erhält man den Ausdruck von

$$\text{tang}\,W' = \frac{abck\sin C\,\sqrt{(a^2M^2+b^2N^2+c^2R^2+2abMN\cos C)}}{mm''nn''a^2b^2\sin^2 C + rr''mm''c^2a^2 + nn''rr''b^2c^2 - rr''c^2(mn''+m''n)\,ab\cos C}$$
$$= \frac{abck\sin C\,\sqrt{P}}{Q'}$$

und findet demnach für die beiden, das Tangenten-Verhältniss wesentlich bestimmenden Grössen Q und Q' die Werthe:

$$Q = mm'nn'a^2b^2\sin^2C + rr'mm'c^2a^2 + nn'rr'b^2c^2 - rr'c^2(mn' + m'n)\,ab\cos C$$
$$Q' = mm''nn''a^2b^2\sin^2C + rr''mm''c^2a^2 + nn''rr''b^2c^2 - rr''c^2(mn'' + m''n)\,ab\cos C$$

In diesen beiden Werthen stehen lauter rationale Grössen, mit alleiniger Ausnahme des noch zweifelhaften Productes $ab\cos C$. Die Bedingung für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse wird also für das monoklinoëdrische Krystallsystem darin gegeben sein, dass das Product $ab\cos C$ einen rationalen Zahlwerth liefern muss. Wir können mit Kupffer, welcher zuerst auf dieses Resultat gelangte,*) dieselbe Bedingung auch in der Weise erfüllt denken, dass $b\cos C = ha$ sein muss, wobei h eine rationale Zahl ist. Damit wäre uns denn ein bestimmtes Verhältniss angezeigt, welches zwischen den beiden Linear-Dimensionen a und b, oder zwischen der Hauptaxe und Klinodiagonale der Grundform, und dem schiefen Neigungswinkel C obwalten muss. Fällen wir nämlich von dem Endpunkte der Klinodiagonale b eine Normale auf die Hauptaxe a, so muss der durch solche Normale abgeschnittene Theil der Hauptaxe (denn das ist $b\cos C$) ein rationaler Bruchtheil von dieser Hauptaxe sein. Dabei scheint jedoch, nach Analogie anderer in der Krystallwelt herrschender Zahlen, für h nicht nur ein rationaler, sondern auch ein ziemlich einfacher Bruchwerth gefordert zu werden, weil sich bei Zulassung sehr complicirter, d. h. solcher Bruchwerthe, deren Zähler und Nenner durch grosse Zahlen dargestellt werden, jedenfalls ein der Beobachtung entsprechender rationaler Näherungswerth von h auffinden lassen würde.

Wir wollen nun an einer Anzahl von Beispielen versuchen, wie weit dieses Gesetz in einigen monoklinoëdrischen Krystallreihen erfüllt ist.

Im Glaubersalze ist nach den Messungen von Mohs:

$$a:b = 1{,}109:1 \text{ und } C = 72^\circ\,15'$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}2749\,a$, oder $h = \frac{11}{40}$.

Im Glauberite ist nach Messungen von Phillips und mir:

$$a:b = 0{,}8381:1 \text{ und } C = 68^\circ\,16'$$

folglich wird $b\cos C = 0{,}4418\,a$, oder $h = \frac{4}{9}$.

---

*) Handbuch der rechnenden Krystallonomie S. 501.

Im **Eisenvitriole** ist nach den von Miller mitgetheilten Winkeln:

$a:b = 1,311:1$ und $C = 75^\circ\ 40'$

folglich wird $b \cos C = 0,18883\,a$, oder $h = \frac{17}{90}$.

In der **Kupferlasur** ist nach den Messungen von Mohs:

$a:b = 2,079:1$ und $C = 87^\circ\ 39'$

folglich wird $b \cos C = 0,0197\,a$, oder $h = \frac{1}{50}$.

Im **Rothbleierze** ist nach den Messungen von Kupffer:

$a:b = 0,9568:1$ und $C = 78^\circ\ 1'$

folglich wird $b \cos C = 0,217\,a$, oder $h = \frac{13}{60}$.

Im **Gypse** ist nach den von Miller angegebenen Winkeln:

$a:b = 0,5981:1$ und $C = 80^\circ\ 36'$

folglich wird $b \cos C = 0,2731\,a$, oder $h = \frac{3}{11}$.

Im **Lazulithe** ist nach den Messungen von Prüfer:

$a:b = 1,755:1$ und $C = 88^\circ\ 2'$

folglich wird $b \cos C = 0,01956\,a$, oder $h = \frac{1}{51}$.

Im **Laumontite** ist, wenn wir in Miller's Figur $m = \infty P$, $x = 0P$ und $r = -P$ setzen, nach seinen Winkelangaben:

$a:b = 0,5171:1$ und $C = 68^\circ\ 40'$

folglich wird $b \cos C = 0,703\,a$, oder $h = \frac{7}{10}$.

Im **Titanite** ist nach den Messungen von Gustav Rose:

$a:b = 1,537:1$ und $C = 85^\circ\ 6'$

folglich wird $b \cos C = 0,05557\,a$, oder $h = \frac{1}{18}$.

Im **Amphibole** ist nach den Messungen von Phillips:

$a:b = 0,5401:1$ und $C = 75^\circ\ 10'$

folglich wird $b \cos C = 0,474\,a$, oder $h = \frac{9}{19}$.

Im **Klinochlor** ist nach den Messungen v. Kokscharow's, wenn wir die von ihm mit o bezeichneten Flächen $= \infty P$, und die mit M bezeichneten Flächen $= P$ setzen:

$a:b = 1,354:1$ und $C = 76^\circ\ 4'$

folglich wird $b \cos C = 0,1779\,a$, oder $h = \frac{8}{45}$.

Im **Freieslebenite** ist nach den Messungen von Miller:

$a:b = 1,580:1$ und $C = 87^\circ\ 46'$

folglich wird $b \cos C = 0,02467\,a$, oder $h = \frac{1}{40}$.

Im **monoklinoëdrischen Schwefel** ist nach Mitscherlich's Messungen:

$a:b = 0,9923:1$ und $C = 84^\circ\ 14'$

folglich wird $b \cos C = 0,1012\,a$, oder $h = \frac{1}{10}$.

Diese Beispiele, in welchen meistentheils der Werth von h den Beobachtungen sehr genau entspricht, dürften wohl hinreichen, um die Realität monoklinoëdrischer Axensysteme darzuthun. Für den **Pyroxen** und für gewisse Varietäten des **Orthoklases** muss das einfache Gesetz $h = \frac{1}{4}$ Giltigkeit haben, wie die Zwillingskrystalle des Fassaites und jene des Feldspathes von Elba beweisen. Uebrigens würde uns in dem Gesetze $b \cos C = ha$ auch eine Art von Controle für die Richtigkeit der Messungen geboten sein.

§. 8. Bedingungen für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse im diklinoëdrischen Krystallsysteme.

Da im diklinoëdrischen Krystallsysteme $A = 90°$ ist, während B, C, α, β und γ schiefe Winkel sind, so erhalten wir für Q und Q' folgende Werthe:

$$Q = mm'nn'a^2b^2 \sin^2\gamma + rr'mm'c^2a^2 \sin^2\beta + nn'rr'b^2c^2 \sin^2\alpha - nn'b^2(rm' + r'm)\, ca \cos B \sin \ldots$$
$$- rr'c^2(mn' + m'n)\, ab \cos C \sin \ldots$$

$$Q' = mm''nn''a^2b^2 \sin^2\gamma + rr''mm''c^2a^2 \sin^2\beta + nn''rr''b^2c^2 \sin^2\alpha - nn''b^2(rm'' + r''m)\, ca \cos B \sin \ldots$$
$$- rr''c^2(mn'' + m''n)\, ab \cos C \sin \ldots$$

Diese Werthe enthalten lauter unzweifelhaft rationale Grössen, mit Ausnahme der beiden Producte $ca \cos B \sin\gamma \sin\alpha$ und $ab \cos C \sin\alpha \sin\beta$. Soll also die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse auch in diesem Krystallsysteme bestehen, so müssen den Producten $ca \cos B \sin\gamma \sin\alpha$ und $ab \cos C \sin\alpha \sin\beta$ rationale Zahlwerthe entsprechen. Wir wollen diess für die Krystallreihe des unterschwefeligsauren Kalkes prüfen, von welcher uns Mitscherlich sehr genaue Messungen geliefert hat. Aus seinen Messungen ergeben sich folgende Elemente:

$$a : b : c = 1{,}533 : 1 : 0{,}7849$$

$$B = 98°\,21' \qquad \alpha = 87°\,25'$$
$$C = 107\;\;2 \qquad \beta = 98\;\;44$$
$$\gamma = 107\;\;13$$

aus diesen Elementen des Axensystems folgt aber:

$$ca \cos B \sin\gamma \sin\alpha = 0{,}1667 = \tfrac{1}{6}$$
$$ab \cos C \sin\alpha \sin\beta = 0{,}4434 = \tfrac{4}{9}$$

Wir erhalten also wirklich ein paar sehr einfache rationale Zahlwerthe mit einer Genauigkeit, welche gar nichts zu wünschen übrig lässt, indem die gemessenen Winkel nur um 1 bis 2′ geändert zu werden brauchen, um jene Producte genau auf die Zahlen $\frac{1}{6}$ und $\frac{4}{9}$ zu bringen. Demnach sind wir wohl berechtigt, das von Mitscherlich für den unterschwefeligsauren Kalk eingeführte Axensystem als hinreichend begründet anzusehen.

Es scheinen aber auch die Producte $ca \sin\gamma \sin\alpha$ und $ab \sin\alpha \sin\beta$ für sich rationalen Zahlen zu entsprechen; denn man findet

$$ca \sin\gamma \sin\alpha = 1{,}148, \text{ oder sehr nahe } = \tfrac{23}{20}$$

$$ab \sin\alpha \sin\beta = 1{,}514, \text{ oder sehr nahe } = \tfrac{41}{27}$$

woraus denn weiter folgen würde, dass auch $\cos B$ und $\cos C$ rationale Werthe haben; denn

$$\text{wenn } \tfrac{23}{20} \cos B = \tfrac{1}{6}, \text{ so ist } \cos B = \tfrac{10}{69},$$

$$\text{und wenn } \tfrac{41}{27} \cos C = \tfrac{4}{9}, \text{ so ist } \cos C = \tfrac{12}{41};$$

hiernach findet man $C = 107^\circ\, 1'$, und $B = 98^\circ\, 20'$, was bis auf 1′ mit den von Mitscherlich gemessenen Winkeln übereinstimmt.

Noch genauer wird auch das Product $bc \sin\beta \sin\gamma$ durch eine rationale Zahl ausgedrückt; man findet nämlich

$$bc \sin\beta \sin\gamma = 0{,}7413, \text{ oder } = \tfrac{20}{27}$$

Diess würde zur Berechnung der Linear-Dimensionen a, b und c gelangen lassen, indem man das Product aus $ca \sin\gamma \sin\alpha$ und $ab \sin\alpha \sin\beta$ durch $bc \sin\beta \sin\gamma$ dividirt, dabei deren Werthe $\frac{23}{10}$, $\frac{41}{27}$ und $\frac{20}{27}$ zu Grunde legt, und so zuvörderst die Grösse $a \sin\alpha$, dann aber, durch Division mit $a \sin\alpha$, die Grössen $b \sin\beta$ und $c \sin\gamma$ bestimmt, und endlich, durch Division dieser drei Grössen beziehendlich mit $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$, die Werthe von a, b und c findet. Führt man diese Rechnung aus, so erhält man

$$a : b : c = 1{,}5370 : 1{,}0006 : 0{,}7843$$

was äusserst wenig von demjenigen Verhältnisse abweicht, welches aus den Messungen von Mitscherlich folgt.

§. 9. Bedingungen für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse im triklinoëdrischen Krystallsysteme.

Für die triklinoëdrischen Krystallreihen werden die in §. 6 bei (10) stehenden Werthe von Q und Q' unmittelbare Giltigkeit haben, und man ersieht aus diesen Werthen sogleich, dass die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse nur dann bestehen kann, wenn jedes der drei Producte

$$bcA', \text{ oder } bc \cos A \sin \beta \sin \gamma$$
$$caB', \text{ oder } ca \cos B \sin \gamma \sin \alpha$$
$$\text{und } abC', \text{ oder } ab \cos C \sin \alpha \sin \beta$$

für sich einen rationalen Zahlwerth hat. Wir gelangen also in diesem Krystallsysteme auf drei Bedingungen von derselben Art, wie deren im diklinoëdrischen Systeme nur zwei erfüllt zu sein brauchen, und es kommt blos noch darauf an, ein paar der bekannten triklinoëdrischen Krystallreihen darauf zu prüfen, ob diese Bedingungen für sie wirklich in Erfüllung gebracht sind. Wir wählen dazu die Krystallreihen des Albites und Anorthites.

Prüfung der Krystallreihe des Albites.

Aus den von G. Rose mitgetheilten Messungen ergeben sich für den Albit folgende Elemente:

$$a:b:c = 0,887:1:1,627$$
$$A = 88^\circ\, 39' \qquad \alpha = 86^\circ\, 45'$$
$$B = 86\;\; 24 \qquad \beta = 85\;\; 20$$
$$C = 63\;\; 34 \qquad \gamma = 63\;\; 25$$

Aus diesen Elementen folgt:

$$bc \cos A \sin \beta \sin \gamma = 0,03417 = \tfrac{1}{29}$$
$$ca \cos B \sin \gamma \sin \alpha = 0,0809 = \tfrac{3}{37}$$
$$ab \cos C \sin \alpha \sin \beta = 0,3929 = \tfrac{13}{33}$$

Es ist nun merkwürdig, dass auch hier wiederum die Producte $bc \sin \beta \sin \gamma$, $ca \sin \gamma \sin \alpha$ und $ab \sin \alpha \sin \beta$ sehr nahe durch rationale Zahlen dargestellt werden; man findet nämlich:

$$bc \sin \beta \sin \gamma = 1,452 = \tfrac{42}{29}$$
$$ca \sin \gamma \sin \alpha = 1,288 = \tfrac{48}{37}$$
$$ab \sin \alpha \sin \beta = 0,883 = \tfrac{39}{44}$$

woraus denn folgen würde, dass auch $\cos A$, $\cos B$ und $\cos C$ für sich rationale Werthe haben; in der That wird

$$\cos A = \tfrac{1}{42}, \quad \cos B = \tfrac{1}{16}, \quad \cos C = \tfrac{4}{9}.$$

Berechnet man nach diesen Werthen die Winkel, so ergiebt sich

$$A = 88^\circ\, 38', \quad B = 86^\circ\, 25', \quad C = 63^\circ\, 37'$$

welche nur um 1 bis 3' von denen der Beobachtung entsprechenden Winkeln abweichen.

Die Linear-Dimensionen bestimmen sich, auf ähnliche Weise wie im diklinoëdrischen Systeme:

$$a : b : c = 0{,}8917 : 1{,}001 : 1{,}629$$

was ebenfalls den Beobachtungen sehr nahe entspricht.

Prüfung der Krystallreihe des Anorthites.

Aus den von G. Rose angestellten Messungen bestimmen sich als Elemente dieser Krystallreihe:

$$a : b : c = 0{,}866 : 1 : 1{,}570$$

$A = 87^\circ\ 0'$	$\alpha = 88^\circ\ 42'$
$B = 85\ \ 48$	$\beta = 86\ \ 48$
$C = 63\ \ 37$	$\gamma = 63\ \ 25$

Aus diesen Elementen folgt:

$$bc \cos A \sin\beta \sin\gamma = 0{,}07358 = \tfrac{7}{95}$$
$$ca \cos B \sin\gamma \sin\alpha = 0{,}08928 = \tfrac{11}{123}$$
$$ab \cos C \sin\alpha \sin\beta = 0{,}3841 = \tfrac{5}{13}$$

Auch die Producte $bc \sin\beta \sin\gamma$ u. s. w. lassen sich recht genau durch rationale Zahlen darstellen; es wird nämlich

$$bc \sin\beta \sin\gamma = 1{,}406 = \tfrac{7}{5}$$
$$ca \sin\gamma \sin\alpha = 1.219 = \tfrac{11}{9}$$
$$ab \sin\alpha \sin\beta = 0{,}8644 = \tfrac{45}{52}$$

Daraus ergiebt sich denn

$$\cos A = \tfrac{1}{19}, \quad \cos B = \tfrac{3}{41}, \quad \cos C = \tfrac{4}{9}$$

welchen die Winkelwerthe

$$A = 86^\circ\, 59', \quad B = 85^\circ\, 48', \quad C = 63^\circ\, 37'$$

entsprechen, die mit den beobachteten Winkeln vollkommen übereinstimmen. Die Verhältnisse beider Krystallreihen beweisen aber jedenfalls so viel, dass das allgemeine Gesetz der Rationalität der Tangenten

tautozonaler Kanten auch in ihnen erhalten bleibt, wenn sie auf schiefwinkelige Axensysteme bezogen, d. h. als triklinoëdrische Krystallreihen betrachtet werden.

§. 10. Bedingung für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse im hexagonalen Krystallsysteme.

Die in §. 6 gefundenen Resultate lassen sich auch benutzen, um die Bedingung zu finden, welche im Hexagonalsysteme für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse gefordert wird. In diesem Systeme ist nämlich

$$\begin{array}{ll} A = 60° & \alpha = 60° \\ B = 90 & \beta = 90 \\ C = 90 & \gamma = 90 \end{array}$$

Setzt man diese Werthe in den allgemeinen Ausdruck von Tangente W, so findet man:

$$\tan W = \frac{abc\sqrt{12}\sqrt{(a^2M^2 + b^2N^2 + c^2R^2 + bcNR)}}{3nn'rr'b^2c^2 + 2mm'(2nn'b^2 + 2rr'c^2 - nr'bc - n'rbc)a^2} = \frac{abc\sqrt{12}\sqrt{P}}{Q}$$

Der Ausdruck für tang W' folgt aus dem vorstehenden, wenn man darin M', N' und R', oder auch kM, kN und kR statt M, N und R, so wie m'', n'' und r'' statt m', n' und r' schreibt. Man erhält so:

$$\tan W' = \frac{abck\sqrt{12}\sqrt{P}}{Q'}$$

Die beiden Grössen Q und Q', durch welche das Verhältniss dieser Tangenten wesentlich bestimmt wird, bestehen nun aber aus lauter rationalen Factoren, sobald das Product bc rational ist. Diese Bedingung wird jedenfalls erfüllt sein, wenn $b = c$, d. h. wenn die Nebenaxen einander gleich sind. Bekanntlich findet aber diese Gleichheit der Nebenaxen im Hexagonalsysteme wirklich Statt; folglich ist auch in ihm die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten durchweg in Erfüllung gebracht.

Wenn wir mit Miller, dem sich auch später Pettko angeschlossen hat,*) die hexagonalen Formen nicht auf das gewöhnliche vierzählige

---

*) In Haidinger's Naturwissenschaftlichen Abhandlungen, B. IV, 1851, 4. Abth. S. 16 ff. Bekanntlich hat Miller dieselbe Ansicht schon im Jahre 1839, in seinem *Treatise on Crystallography*, durchgeführt, nachdem sich Grassmann bereits im Jahre 1829, in seinem Werke: Zur physischen Krystallonomie, Heft I, S. 114 ff. für sie erklärt hatte.

Axensystem, sondern auf ein schiefwinkelig-dreizähliges Axensystem beziehen wollen, dessen Axen unter einander gleich geneigt und gleich gross sind, so erhalten wir folgende Elemente: es ist

$$b = c = a = 1,$$
$$B = C = A, \text{ und } \beta = \gamma = \alpha.$$

Setzen wir diese Werthe in den allgemeinen Ausdruck von tang W, so wird

$$\operatorname{tang} W = \frac{\sin A \sqrt{[M^2 + N^2 + R^2 + 2\cos\alpha\,(MN + RM + NR)]}}{mm'nn' + rr'mm' + nn'rr' - \cos A\,[mm'(nr' + n'r) + nn'(rm' + r'm) + rr'(mn' + m'n)]}$$

und man sieht leicht, wie die Bedingung für die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Kanten wesentlich darauf hinausläuft, dass $\cos A$ einen rationalen Zahlwerth haben muss. Diese Bedingung ist aber wirklich erfüllt, sobald die auf den Mittelpunkt verlegten Polkanten eines der vorhandenen Rhomboëder als Axen zu Grunde gelegt werden.

§. 11. Folgerung und Beispiel der Anwendung.

Wir haben nun unser Problem durch alle Krystallsysteme verfolgt, und sind dabei auf die Resultate gelangt, dass in dem tesseralen, tetragonalen, rhombischen und hexagonalen Systeme die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse (wie schon früher bekannt war) an sehr einfache Bedingungen geknüpft ist, während in den klinoëdrischen Systemen etwas complicirtere und auch um so mehre Bedingungen erfüllt sein müssen, je unregelmässiger der geometrische Grundcharakter derselben ist. Wir haben aber an einigen Beispielen gezeigt, dass diese Bedingungen wirklich erfüllt sind, und glauben dadurch eines von denjenigen Bedenken beseitigt zu haben, welche gegen die Annahme schiefwinkeliger Axensysteme geltend gemacht werden könnten.

Dass und wie übrigens die gefundenen Resultate bei der Berechnung tautozonaler Kanten zu benutzen sind, diess mag beispielsweise an einer der wichtigsten Zonen des Tesseralsystems, nämlich an der Diagonalzone des Oktaëders erläutert werden.

Da in diesem Krystallsysteme die Grund-Dimensionen das Verhältniss 1 : 1 : 1 haben, so erhält der in §. 3 stehende Ausdruck für tang W folgenden Werth:

$$\operatorname{tang} W = \frac{\sqrt{M^2 + N^2 + R^2}}{mm'nn' + rr'mm' + nn'rr'},$$

Es ist jedoch zweckmässig, ihn folgendermaassen zu schreiben:

$$\tang W = \frac{\sqrt{M^2+N^2+R^2}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

weil die in der Bezeichnung der Formen gebrauchten Ableitungszahlen m und n bald auf diese, bald auf jene Axe zu beziehen sind, und daher die Ableitungszahlen besser ganz allgemein durch die Buchstaben a, b und c, a', b' und c' dargestellt werden, je nachdem sie in die Axe der x, y oder z fallen. Demgemäss ist auch $M = aa'(bc' - b'c)$ zu schreiben, u. s. w.

Wählen wir nun diejenige Diagonale der Oktaëderfläche $x+y+z=1$, welche von der Axe der x ausläuft, zur Zonenlinie, so werden die Gleichungen der letzteren

$$\frac{x}{2}+y=0 \text{ und } y-z=0$$

welche, verglichen mit den allgemeinen Gleichungen dieser Linie, auf die Folgerungen führen, dass

$$M = -2N \text{ und } R = N$$

sein muss. Daher wird denn der allgemeine Ausdruck für die Tangente des Neigungswinkels irgend zweier Flächen dieser Zone:

$$\tang W = \frac{bb'(ca'-c'a)\sqrt{6}}{aa'bb'+cc'aa'+bb'cc'}$$

welcher auch noch anders geschrieben werden kann, weil jede Fläche dieser Zone der Gleichung $-\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0$ Genüge leisten muss.

DIE

THEORIE DER KREISVERWANDTSCHAFT

IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG

VON

A. F. MÖBIUS.

DIE THEORIE DER KREISVERWANDTSCHAFT

IN REIN GEOMETRISCHER DARSTELLUNG.

Mit Anwendung einer im Jahre 1852*) von mir mitgetheilten Methode, welche von Sätzen der Longimetrie durch das Gebiet des Imaginären zu Sätzen der Planimetrie führt, hat sich mir, wie ich bereits am Schlusse jenes Aufsatzes bemerkt habe, durch Uebertragung der Collineationsverwandtschaft zwischen geradlinigen Systemen von Punkten auf Systeme von Punkten in Ebenen eine neue Art von Verwandtschaft zwischen ebenen Figuren ergeben. Die Haupteigenschaften dieser Verwandtschaft habe ich in einem spätern Aufsatze**) mittelst jener Methode entwickelt, sie selbst aber Kreisverwandtschaft genannt, weil bei je zwei auf solche Art verwandten Figuren jedem Kreise der einen Figur ein Kreis in der andern entspricht.

Durch fortgesetzte Beschäftigung mit diesen Untersuchungen, insonderheit durch Ausdehnung derselben auf den Raum von drei Dimensionen, bin ich zu Resultaten gekommen, die mir der Veröffentlichung gleichfalls nicht unwerth scheinen, und die ich deshalb in Verbindung mit den früher mitgetheilten, hier jedoch auf andere Weise entwickelten, zum Theil auch erweiterten Sätzen über die Kreisverwandtschaft in vorliegender Abhandlung zusammengestellt habe. Namentlich habe ich gegenwärtig von jener das Imaginäre zu Hülfe nehmenden Methode keinen Gebrauch gemacht, sondern bin unmittelbar von der Definition der Kreisverwandtschaft durch Kreise ausgegangen.

---

*) I. Heft der Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellsch. der Wissensch. i. J. 1852.

**) I. Heft der Berichte etc. i. J. 1853.

Die Darstellungsweise, deren ich mich hier bedient habe, ist die rein geometrische, wobei ich jedoch, wie schon in meinem «barycentrischen Calcul», die Allgemeinheit, welche die analytische Methode gewährt, mit der Anschaulichkeit der rein geometrischen dadurch zu verbinden gesucht habe, dass ich in den Ausdrücken für Raumgrössen durch Nebeneinanderstellung von Buchstaben, welche deren Begrenzung bezeichnen, auf die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben stets die gehörige Rücksicht genommen habe.*)

---

*) Diese Rücksicht auf die Folge der Buchstaben in Ausdrücken von Abschnitten einer Geraden, so wie von Winkeln in einer Ebene, hat in letzter Zeit auch ein französischer Geometer in einem umfänglicheren Werke genommen und consequent durchgeführt, Herr Chasles in seinem sehr werthvollen *Traité de Géométrie supérieure*, Paris 1852. Wenn aber Herr Chasles in dieser Beziehung auf Seite III der Vorrede sich also ausspricht:

> *Jusq' à présent on n'a point introduit, d'une manière générale et systématique, en Géométrie, le principe des signes, pour marquer la direction des segments ou des angles, excepté dans la Géométrie analytique et dans quelques questions particulières, telles que la théorie des centres des moyennes distances et des moyennes harmoniques, où l'on ne considère que des segments formés sur une seule droite.*

und weiterhin auf Seite IX:

> *On a donc beaucoup perdu à ne pas introduire systématiquement dans la Géométrie pure, le principe des signes; les progrès de la science en ont été nécessairement retardés.*

so kann ich ihm bloss insofern beipflichten, als noch in keinem eigentlichen *Lehrbuche der Geometrie*, sein Werk selbst ausgenommen, das Princip der Zeichen bis jetzt Aufnahme gefunden hat. Ich wenigstens habe dasselbe nicht nur in meinem auch von Herrn Ch. angeführten bar. Calcul, wo ich es an die Spitze gestellt (§. 1.) und auch auf Flächen (§. 17. u. §. 165. Anmerk.) und körperliche Räume (§. 19.) ausgedehnt habe, sondern auch in allen seitdem (seit 1827) von mir veröffentlichten Schriften geometrischen und mechanischen Inhalts stets streng befolgt.

Der Sache selbst willen sei es mir noch gestattet, über eine mir nicht ganz richtig scheinende Bemerkung des H. Ch. auf S. IX ebendaselbst Einiges hinzuzufügen. H. Ch. behauptet dort nämlich, dass mehrere Sätze der Elementargeometrie, namentlich der Satz vom Quadrate der Hypotenuse, der Satz von der Proportionalität homologer Seiten in ähnlichen Dreiecken und der von der Proportionalität der Seiten eines Dreiecks mit den Sinussen der gegenüberstehenden Winkel, keine Anwendung des Princips der Zeichen gestatten.

Allerdings kommt bei dem pythagoräischen Satze das Princip der Zeichen nicht in Berücksichtigung, weil die diesen Satz darstellende Formel bloss Quadrate von Linien enthält, und weil, wenn A und B die Endpunkte einer Linie sind, AB^2 immer positiv ist, mag die positive Richtung der Linie von A nach B, oder von B nach A gehend genommen werden. Allein nicht eben so verhält es sich in Betreff der beiden andern Sätze.

Nicht unerwähnt darf ich noch lassen, dass schon in einer im Jahre 1833 im 8ten Bande des Crelle'schen Journals für Mathematik er-

Denn sind a, b, c drei beliebig in einer Ebene gezogene Gerade, von denen sich b und c in A, c und a in B, a und b in C schneiden, bestimmt man willkührlich die positiven Richtungen von a, b, c, und hiernach die Zeichen der Segmente BC, CA, AB, setzt man hierauf noch von den zwei Sinnen, nach welchen eine Linie in der Ebene gedreht werden kann, den einen, etwa den von der Linken nach der Rechten, als positiven fest und bestimmt hiernach die Winkel bc, ca, ab also, dass bc den Winkel ausdrückt, um welchen die Gerade b um A nach *rechts* gedreht werden muss, bis ihre positive Richtung mit der positiven Richtung von c identisch wird u. s. w.: so verhält sich immer, *auch den Zeichen nach:*

$$BC : CA : AB = \sin bc : \sin ca : \sin ab\,.$$

Dass H. Ch. bei dieser Proportion das Princip der Zeichen nicht anwendbar findet, hat darin seinen Grund, dass er, statt, wie jetzt geschehen, *alle* Winkel einer und derselben Ebene nach einerlei Sinne zu rechnen, bloss diejenigen Winkel, die eine gemeinsame Spitze haben, nach einerlei Sinne schätzt, dagegen von Winkeln, deren Spitzen verschieden sind, die Sinne als unabhängig von einander betrachtet. (S. X. oben.) Eine solche Annahme kommt aber fast auf dasselbe hinaus, als wenn man von Abschnitten einer und derselben Geraden nur solche, die einen gemeinschaftlichen Anfangspunkt haben, in Bezug auf ihre Richtungen mit einander vergleichen, hingegen die Richtungen von Abschnitten, deren Anfangspunkte verschieden sind, als unabhängig von einander ansehen wollte.

Was endlich die Proportionen zwischen homologen Seiten zweier ähnlichen Dreiecke betrifft, so lassen sich die Hauptsätze dieser Lehre (Euclid. VI, 4. bis 7.) unter Beobachtung des Princips der Zeichen etwa folgendergestalt fassen:

Haben a, b, c, A, B, C dieselbe Bedeutung wie vorhin, werden $a', b', \ldots C'$ in analoger Bedeutung für ein zweites Dreieck genommen, und werden noch die positiven Richtungen der Geraden $a, b, \ldots c'$, und der Sinn, nach welchem bei jedem der beiden Dreiecke für sich die Winkel gerechnet werden sollen, nach Willkühr festgesetzt, so sind, wenn sich die Abschnitte

$$\text{I.}\quad B'C' : C'A' : A'B' = BC : CA : AB$$

verhalten, die Winkel $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ resp. $= bc, ca, ab$, oder auch resp. $= cb, ac, ba$; und umgekehrt. — Unmittelbar folgt hieraus, indem man von einer der Geraden, etwa von a, die vorher negative Richtung zur positiven nimmt, dass, wenn sich

$$\text{II.}\quad B'C' : C'A' : A'B' = CB : CA : AB$$

verhalten, die Winkel $b'c'$, $c'a'$, $a'b'$ resp. $= bc$, $ca + 180°$, $ab + 180°$, oder auch resp. $= cb$, $ac + 180°$, $ba + 180°$ sind; und umgekehrt.

Verhält sich ferner $C'A' : A'B' = CA : AB$, und ist $b'c' = bc$, so hat eine der beiden Doppelproportionen I. und II. mit ihren Folgen statt; unbestimmt aber bleibt es, welche, und man muss daher, um beide zusammenzufassen, schreiben:

$$B'C'^2 : C'A'^2 = BC^2 : CA^2,\quad 2\,c'a' = 2\,ca,\quad 2\,a'b' = 2\,ab.$$

Wenn endlich $C'A' : A'B' = CA : AB$, und $c'a' = ca$ ist, und wenn die Winkel ab und $a'b'$ in einerlei Quadranten fallen, so sind sie auch einander gleich, sowie $b'c' = bc$, und es verhält sich $B'C' : C'A' = BC : CA$.

schienenen Abhandlung des Herrn J. L. Magnus in Berlin *nouvelle méthode pour découvrir des théorèmes de géometrie*, sowie in Desselben Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie. Berlin 1833. S. 236 u. S. 290. eine mit meiner Kreisverwandtschaft identische gegenseitige Beziehung zweier ebenen Systeme von Punkten, als ein specieller Fall einer noch allgemeineren Beziehung aufgestellt wird, wonach im Allgemeinen einer Geraden ein Kegelschnitt, einem Kegelschnitte eine Linie der vierten Ordnung, und überhaupt einer Linie der *n*ten Ordnung eine Linie der 2*n*ten entspricht, und wodurch man, wie Herr Magnus an einigen sehr merkwürdigen Beispielen zeigt, in den Stand gesetzt wird, aus Eigenschaften von Linien niederer Ordnung entsprechende Eigenschaften für Linien höherer Ordnung abzuleiten. Auch wird an dem zuletzt citirten Orte die Bemerkung, jedoch nur vorübergehends, hinzugefügt, dass, wenn, wie im Vorliegenden, die den Geraden der einen Ebene entsprechenden Kegelschnitte in der andern insgesammt Kreise sind, einem Kreise wiederum ein Kreis, nicht eine Linie der vierten Ordnung entspricht. Dass aber alsdann gewisse Doppelverhältnisse zwischen Linien und gewisse Summen oder Differenzen von Winkeln von der einen Figur zur andern ihre Werthe nicht ändern, finde ich von Herrn Magnus nicht bemerkt. Gleichwohl sind diese schon in meinem früheren Berichte erwiesenen Sätze und die neue daraus entspringende Classe von Aufgaben, wie es mir scheint, eben Dasjenige, wodurch die Kreisverwandtschaft, die einfachste nach den in meinem baryc. Calcul betrachteten fünf Verwandtschaften, für die Elemente der Geometrie einen ähnlichen Werth und Bedeutung, wie jene fünf früheren, erhält; weshalb ich auch diesen Sätzen und den daraus zu ziehenden Folgerungen vorzugsweise meine Aufmerksamkeit zugewendet habe.

Kreisverwandtschaft ebener Figuren.

§. 1. Angenommen, dass in zwei Ebenen jedem Punkte der einen ein Punkt, und nicht mehr als einer, in der andern dergestalt entspricht, dass von je vier Punkten der einen, welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in der andern gleichfalls in einem Kreise enthalten sind, so sollen jedes System von Punkten der einen Ebene und das von den entsprechenden Punkten in der andern gebildete System, also auch jede Linie der einen und die Linie der andern, welche die den Punkten

der erstern Linie entsprechenden Punkte verbindet, einander kreisverwandt heissen.

Dabei machen wir, dem Princip der Stetigkeit gemäss, noch die Voraussetzung, dass von je zwei einander unendlich nahen Punkten der einen Ebene die entsprechenden in der andern gleichfalls — wenigstens im Allgemeinen — einander unendlich nahe sind.

§. 2. Im Folgenden wollen wir Punkte der einen Ebene mit nicht accentuirten Buchstaben, und die ihnen nach der Kreisverwandtschaft entsprechenden in der andern mit den gleichnamigen accentuirten Buchstaben bezeichnen; die zwei Ebenen selbst mögen resp. p und p' heissen.

Hiernach wird dem in p durch die Punkte A, B, C zu beschreibenden Kreise der Kreis $A'B'C'$ in p' entsprechen; und wenn D ein Punkt des erstern Kreises ist, so wird D' ein Punkt des letztern sein.

Bewegt sich ein Punkt X in einem Kreise mit ungeändertem Sinne, so bewegt sich X' im entsprechenden Kreise ebenfalls ohne Aenderung des Sinnes. Denn wo nicht, so würde ein und derselbe Punkt des letztern Kreises, auf welchen X' zuerst bei vorwärts- und später bei rückwärtsgehender Bewegung käme, den zwei verschiedenen Punkten des erstern Kreises entsprechen, in denen X gleichzeitig bei seiner stets vorwärtsgehenden Bewegung einträfe. — Ist daher $ABCD$ die Aufeinanderfolge von vier Punkten eines Kreises, so wird man auch im entsprechenden Kreise, von A' ausgehend, nach der einen Seite hin zunächst auf B', nach der andern zunächst auf D' treffen.

Eben so ist klar, dass, jenachdem zwei Kreise in p einander entweder schneiden, oder berühren, oder gar nicht begegnen, dasselbe jedesmal auch die zwei entsprechenden Kreise in p' thun, und dass im Falle des Scheidens oder des Berührens die zwei Schneidepunkte oder der Berührungspunkt des einen Paares den zwei Schneidepunkten oder dem Berührungspunkte des andern entsprechen.

§. 3. Im Allgemeinen wird jedem in endlicher Entfernung liegenden Punkte der einen Ebene ein endlich entfernter Punkt in der andern entsprechen. Es kann aber auch geschehen, dass einem gewissen endlich gelegenen Punkte der einen Ebene, es sei dem M in p, ein unendlich entfernter M' in der andern p' entspricht. Alsdann wird auch einem in p unendlich entfernten Punkte N ein endlich gelegener N' in p' entsprechen. Denn seien A und B zwei endlich entfernte mit M nicht in einer Geraden

[illegible]

[illegible] Angenommen also, dass dem [illegible] unendlich entfernten Punkte N der in p' unendlich entfernte N' entspr[illegible] [illegible]

1) dem Kreise *ABN* der Kreis *A'B'N'*, d. i. jeder Geraden der einen Ebene eine Gerade in der andern.

2) Zwei parallelen Geraden der einen Ebene entsprechen zwei parallele in der andern. Denn wäre der gegenseitige Durchschnitt der letztern Geraden ein endlich entfernter Punkt, so müsste es auch (vor. §.) der Durchschnitt der erstern sein.

3) Einem Parallelogramme entspricht daher ein Parallelogramm.

4) Lässt sich durch die vier Ecken des einen Parallelogramms ein Kreis beschreiben, so liegen auch die vier Ecken des andern in einem Kreise, d. h. einem Rechteck entspricht ein Rechteck, und folglich

5) einem rechten Winkel ein rechter Winkel.

6) Schneiden sich daher die zwei Diagonalen des einen Rechtecks rechtwinklig, so müssen, weil ihnen die Diagonalen des andern entsprechen, auch letztere sich rechtwinklig schneiden; d. h. einem Quadrate entspricht ein Quadrat. — Hieraus lässt sich leicht weiter folgern, dass

7) je zwei einander entsprechende Rechtecke einander ähnlich sind. Denn sei *ABCD* ein Rechteck, dessen Seiten *AB* und *BC* sich wie zwei ganze Zahlen *m* und *n* verhalten. Man theile *AB* in *m* und *BC* in *n* gleiche Theile, ziehe durch die Theilpunkte Parallelen mit der jedesmal andern Seite und zerlege somit das Rechteck in *mn* Quadrate. Die dieser Figur entsprechende Figur wird daher ein auf gleiche Weise aus *mn* Quadraten zusammengesetztes Rechteck sein, also ein Rechteck *A'B'C'D'*, dessen Seiten *A'B'* und *B'C'* sich wie *m* und *n* verhalten, d. i. ein dem *ABCD* ähnliches Rechteck.

Dass Aehnlichkeit zwischen beiden auch dann noch statt findet, wenn das Verhältniss *AB* : *BC* irrational ist, wird hieraus auf bekannte Art weiter geschlossen.

8) Es ist daher auch das dem bei *B* rechtwinkligen Dreiecke *ABC* entsprechende Dreieck *A'B'C'* dem erstern ähnlich. Und da jedes schiefwinklige Dreieck in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt werden kann, so sind je zwei einander entsprechende Dreiecke überhaupt, und folglich auch je zwei einander entsprechende Systeme von mehr als drei Punkten, einander ähnlich.

§. 5. Unter der Annahme, dass einem unendlich entfernten Punkte der einen Ebene ein unendlich entfernter in der andern entspricht, ist demnach die Kreisverwandtschaft mit der Verwandtschaft der Aehnlichkeit identisch. Da wir also durch diese Annahme zu keiner neuen Ver-

wandtschaft geführt werden, so wollen wir die nach §. 3. hier noch zulässige Hypothese in Untersuchung nehmen, dass nämlich gewissen zwei endlich gelegenen Punkten M und N' in p und p' zwei unendlich entfernte M' und N in p' und p entsprechen. Diese Untersuchung wird sich aber mittelst des für die vorige Annahme gewonnenen Resultats sehr leicht erledigen lassen.

In der That beruhten die im vor. §. gemachten Schlüsse auf der Voraussetzung, dass die Punkte N und N' von den in Betracht gezogenen zwei Figuren — sie mögen f und f' heissen — in Entfernungen liegen, die gegen die Dimensionen dieser Figuren, welche wir uns als endliche dachten, unendlich gross sind. Dieselben Schlüsse werden daher auch noch Geltung haben, wenn f und f' unendlich klein sind, und die Punkte M' und N' sich in endlichen Entfernungen von ihnen befinden, oder auch nur N' von f' endlich, N aber von f unendlich entfernt ist. Denn obwohl dann die durch N' und Punkte von f' gehenden Kreise vollkommen construirbar sind, so lassen sich doch die hier allein zu berücksichtigenden Theile derselben von Geraden nicht unterscheiden.

Angenommen also, dass unter der zuletzt gemachten und von jetzt an allein noch in Betracht kommenden Hypothese Kreisverwandtschaft in der That möglich ist, — eine Möglichkeit, die im Folgenden streng bewiesen werden wird, — so werden je zwei nach dieser Verwandtschaft einander entsprechende Figuren, wenn die Dimensionen der einen und damit nach dem Gesetz der Stetigkeit, im Allgemeinen wenigstens, auch die der andern unendlich klein sind, einander ähnlich sein. Je zwei einander kreisverwandte endliche Figuren sind folglich in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

§. 6. Die endlich gelegenen Punkte M und N' der Ebenen p und p', welche den unendlich entfernten Punkten M' und N in p' und p entsprechen, wollen wir die Centralpunkte der Ebenen p und p' nennen. Aus dieser Definition ergeben sich mittelst des Bisherigen nachstehende Eigenschaften dieser Punkte.

a. Jedem in der einen Ebene durch ihren C.punkt beschriebenen Kreise (MAB) entspricht in der andern Ebene eine nicht durch ihren C.punkt gehende Gerade ($M'A'B'$), und umgekehrt jeder in der einen Ebene nicht durch ihren C.punkt gelegten Geraden (NAB) in der andern ein durch ihren C.punkt gehender Kreis ($N'A'B'$).

b. Jeder in der einen Ebene durch ihren C.punkt gezogenen Ge-

raden (***MAN***) entspricht in der andern eine durch ihren C.punkt gehende Gerade (***M'A'N'***). Liegen daher zwei Punkte *A* und ***B*** der einen Ebene mit deren C.punkte in einer Geraden, so sind auch die entsprechenden Punkte *A'* und ***B'*** der andern Ebene mit dem C.punkte ***N'*** derselben in einer Geraden. Denkt man sich diese Geraden als unendlich grosse Kreise, und ist ***MABN*** die Aufeinanderfolge der Punkte in dem einen Kreise, so ist ***M'A'B'N'*** die Aufeinanderfolge im andern (§. 2.). Wenn demnach die zwei Punkte der einen Ebene auf einerlei Seite des C.punktes der Ebene liegen, so sind auch die entsprechenden Punkte in der andern auf einerlei Seite ihres C.punktes, und zwar entspricht der dem C.punkte ***M*** in der einen Ebene nähere Punkt *A* der vom C.punkte *N'* in der andern entferntere *A'*. Bewegt sich daher ein Punkt in der einen Ebene geradlinig auf ihren C.punkt zu, so bewegt sich in der andern der entsprechende Punkt geradlinig von ihrem C.punkte abwärts, und wenn der erstere Punkt dem C.punkte unendlich nahe kommt, so entfernt sich der letztere in das Unendliche. — Eben so leicht sieht man, dass, wenn die zwei Punkte der einen Ebene auf entgegengesetzten Seiten des C.punktes liegen, dasselbe beziehungsweise auch von den entsprechenden Punkten gilt.

c. Wird ein Kreis *k* in *p* von einer durch ***M*** gelegten Geraden *a* in *A* und ***B*** geschnitten, so liegen *A* und ***B*** auf einerlei oder verschiedenen Seiten von ***M***, jenachdem ***M*** vom Kreise aus- oder eingeschlossen wird. Dasselbe gilt in Bezug auf *N'* von den Punkten *A'* und ***B'***, in denen die der *a* entsprechende Gerade den dem *k* entsprechenden Kreis schneidet. Nach vorigem Satze ***werden*** daher ***von zwei einander entsprechenden Kreisen die C.punkte ihrer Ebenen entweder beide aus- oder beide eingeschlossen.***

d. Aehnlicherweise erhellet aus *b.*, ***dass bei zwei einander entsprechenden die C.punkte ihrer Ebenen einschliessenden Kreisen jedem Punkte innerhalb des einen ein Punkt ausserhalb des andern entspricht, und dass, wenn die zwei Kreise die C.punkte ihrer Ebenen ausschliessen, jedem Punkte innerhalb oder ausserhalb des einen ein resp. innerhalb oder ausserhalb des andern liegender Punkt entspricht.***

§. 7. Beim Ausdrucke eines Kreises durch Nebeneinanderstellung dreier Buchstaben, welche irgend drei Punkte desselben bezeichnen, soll durch die Aufeinanderfolge dieser Buchstaben zugleich der Sinn dargestellt werden, nach welchem man sich den Kreis durch die Bewegung eines Punktes beschrieben zu denken hat.

Seien nun *ABC* und *XYZ* zwei in der Ebene *p* enthaltene unendlich kleine, einander unendlich nahe und von *M* endlich entfernte Kreise, also auch die Kreise *A'B'C'* und *X'Y'Z'* in *p'* unendlich klein, einander unendlich nahe und von *N'* endlich entfernt (§. 6. *b*.). Dabei werden die Figuren *ABCXYZ* und *A'....Z'*, wegen ihrer unendlichen Kleinheit, einander ähnlich sein (§. 5.), woraus unmittelbar folgt, dass, jenachdem die durch die Folgen *ABC* und *XYZ* ausgedrückten Sinne einerlei, oder einander entgegengesetzt sind, auch die Sinne von *A'B'C'* und *X'Y'Z'* einerlei sind, oder nicht.

Wenn daher — so können wir weiter schliessen — nach Festsetzung des positiven Sinnes in jeder der beiden Ebenen *p* und *p'* gewisse zwei einander entsprechende unendlich kleine Kreise *ABC* und *A'B'C'* gleichnamigen Sinnes sind, d. h. der Sinn des *A'B'C'* positiv oder negativ ist, jenachdem das eine oder das andere der Sinn des *ABC* ist, so sind auch von je zwei andern einander entsprechenden unendlich kleinen und den erstern unendlich nahen Kreisen *XYZ* und *X'Y'Z'* die Sinne gleichnamig.

Man sieht aber leicht, dass dieser Satz auch dann noch gelten muss, wenn letztere zwei Kreise von den zwei erstern endlich entfernt liegen. Denn man kann sich alsdann zwischen *ABC* und *XYZ* eine Reihe unendlich vieler unendlich kleiner Kreise *DEF*, *GHJ*,... *UVW* construirt denken, von denen je zwei nächstfolgende einander, und überdies der erste *DEF* dem *ABC* und der letzte *UVW* dem *XYZ*, keiner aber dem *M*, unendlich nahe liegen. Die dieser Reihe entsprechende Reihe in *p'* wird von derselben Beschaffenheit sein, und es lässt sich nun wie vorhin aus dem gleichnamigen Sinne von *ABC* und *A'B'C'* auf den gleichnamigen von *DEF* und *D'E'F'*, aus diesem auf den von *GHJ* und *G'H'J'*, u. s. w. und zuletzt aus dem von *UVW* und *U'V'W'* auf den von *XYZ* und *X'Y'Z'* schliessen.

Im Folgenden soll nach willkührlicher Festsetzung des positiven Sinnes in *p* der positive Sinn in *p'* stets also bestimmt werden, *dass von zwei gewissen einander entsprechenden unendlich kleinen Kreisbewegungen, und damit* nach dem eben Erwiesenen *auch von je zwei andern dergleichen die Sinne gleichnamig werden.* — Dass keiner von beiden Kreisen dem C.punkte seiner Ebene unendlich nahe liegen darf, braucht hier nicht zugesetzt zu werden, weil im gegentheiligen Falle nicht beide Kreise zugleich unendlich klein sein können.

Untersuchen wir noch das gegenseitige Verhalten der Sinne zweier entsprechenden Kreisbewegungen ABC und $A'B'C'$, wenn die zwei Kreise von endlicher Grösse sind. Sei D ein vierter auf C folgender und dem A vorangehender Punkt des Kreises ABC, und E ein innerhalb des Kreises in seiner Ebene p liegender Punkt, wonach, wie man leicht wahrnimmt, die zwei Kreisbewegungen $ABCD$ und CDE einerlei Sinne haben. In p' liegt alsdann, jenachdem von den zwei Kreisen ABC und $A'B'C'$ die C.punkte ihrer Ebenen aus- oder eingeschlossen werden, E' innerhalb oder ausserhalb des Kreises $A'B'C'$ (§. 6. *d.*), und es sind folglich die Sinne der Kreisbewegungen $A'B'C'D'$ und $C'D'E'$ resp. einerlei oder verschieden.

Setzen wir nun noch, dass die Hülfspunkte D und E dem C unendlich nahe liegen, und dass daher der Kreis CDE, mithin auch der Kreis $C'D'E'$, unendlich klein wird, so sind nach der vorhin gemachten Annahme die Sinne von CDE und $C'D'E'$ stets gleichnamig, und wir ziehen daher den Schluss, *dass je zwei einander entsprechende Kreisbewegungen gleichnamigen Sinnes sind, oder nicht, jenachdem sie beide die C.punkte ihrer Ebene aus-, oder einschliessen.*

§. 8. Um die weiterhin folgenden Sätze in möglichster Allgemeinheit darstellen und begründen zu können, achte ich es für nöthig, die den Algorithmus mit Winkeln betreffenden Hauptformeln hier einzuschalten.

Alle in derselben Ebene enthaltenen Winkel sollen nach einerlei Sinne gerechnet werden, und man hat hiernach unter dem Winkel ABC immer denjenigen zu verstehen, um welchen in seiner Ebene die Gerade BA um B nach dem vorher in der Ebene bestimmten positiven Sinne gedreht werden muss, bis die von B nach A gehende Richtung mit der von B nach C gehenden zusammenfällt.

Indem der positive Sinn in einer Ebene durch den Sinn irgend einer Kreisbewegung in derselben, also durch die Nebeneinanderstellung dreier nach diesem Sinne auf einander folgender Punkte des Kreises, ausgedrückt wird, so ist, wenn A, B, C nicht in einer Geraden liegen, bei dem durch die Folge ABC ausgedrückten positiven Sinn der Ebene jeder der drei Winkel ABC, BCA, CAB erhaben; hohl dagegen, wenn CBA den positiven Sinn darstellt.

Je zwei um 360^0 unterschiedene Winkel oder Winkelsummen können stets als identisch betrachtet werden, und es wird daher $\pm 360^0$ mit 0,

-180° mit $+180^\circ$, -270° mit $+90^\circ$, etc. im Folgenden gleich geachtet werden.

Dieses vorausgeschickt, ist immer die Winkelsumme

$$(1)\quad ABC + CBA = 0, \text{ mithin } CBA = -ABC;$$

$$(2)\quad ABC + BCA + CAB = 180^\circ.$$

Liegt der Punkt D mit A, B, C in einer Ebene, so ist

$$(3)\quad ABC + CBD = ABC - DBC = CBD - CBA = ABD.$$

Dasselbe wird durch die Formeln

$$(3^*)\quad a^\wedge b + b^\wedge c = a^\wedge b - c^\wedge b = b^\wedge c - b^\wedge a = a^\wedge c$$

ausgedrückt, worin a, b, c drei in einer Ebene enthaltene und ihren positiven Richtungen nach bestimmte Gerade bedeuten.

Eben so wie (2), ist $CDA + ACD + DAC = 180^\circ$, und es kommt, wenn man diese Gleichung zu (2) addirt, mit Berücksichtigung von (3):

$$(4)\quad ABC + BCD + CDA + DAB = 0,$$

wie auch die vier Punkte $A, .. D$ in der Ebene liegen mögen.

Sind A, B, C drei Punkte einer Geraden, so ist

$$(5)\quad ABC = 0, \text{ oder } = 180^\circ,$$

jenachdem B ausserhalb, oder zwischen A und C liegt.

Sind A, B, C, D vier Punkte eines Kreises, so ist

$$(6)\quad ABC + CDA = ABC - ADC = 0, \text{ oder } = 180^\circ,$$

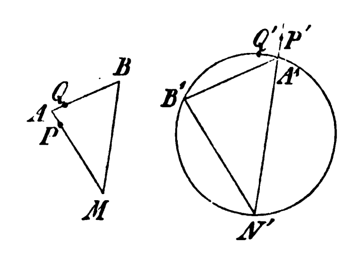
jenachdem B und D auf einerlei, oder verschiedenen Seiten der Sehne AC liegen, oder, was dasselbe sagt: jenachdem die Sehnen AC und BD sich ausserhalb oder innerhalb des Kreises schneiden.

Zusatz. Sind ABC und $A'B'C'$ zwei einander ähnliche Dreiecke, und sind ihre dadurch zugleich ausgedrückten Sinne gleichnamig, so ist der Winkel $A'B'C' = ABC$, $B'C'A' = BCA$, etc. Bei ungleichnamigen Sinnen ist $A'B'C' = -ABC = CBA$, etc.

Wenn daher ABC und $A'B'C'$ zwei in zwei kreisverwandten Figuren einander entsprechende Dreiecke von unendlich kleinen Seiten sind, so ist nach §. 5. und zufolge der in §. 7. gemachten Voraussetzung der Winkel $A'B'C' = ABC$, $B'C'A' = BCA$, etc.

§. 9. Lehrsatz. *Die zwei Dreiecke MAB und $N'B'A'$, welche zwei Punkte A und B der einen Ebene mit dem C.punkte M der letztern und die zwei ihnen entsprechenden in umgekehrter Folge genommenen Punkte A' und B' der andern Ebene mit deren C.punkte N' bilden, sind einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes.*

Beweis. Seien P und Q zwei dem A unendlich nahe Punkte, welche von A geradlinig nach M und nach B zu liegen. Alsdann werden auch P' und Q' dem A' unendlich nahe sein, und zwar P' in der Geraden $N'A'$ über A' hinaus (§. 6. *b.*); Q' aber wird ein Punkt des der Geraden AB entsprechenden Kreises $A'B'N'$ sein (§. 6. *a.*) und in diesem Kreise mit B' auf einerlei Seite der Sehne $A'N'$ liegen, weil $AQBN$ die Aufeinanderfolge der Punkte in dem entsprechenden unendlichenKreise ist (§. 2.).



Es ist nun der Winkel $MAB = PAQ = P'A'Q'$ (§. 8. Zus.) $= 180^0 - Q'A'N' = A'N'Q' + N'Q'A'$ (§. 8. (2)) $= N'Q'A'$, wegen der unendlichen Kleinheit von $A'N'Q'$. Ferner ist $N'Q'A' = N'B'A'$ (§. 8. (6)), und daher $MAB = N'B'A'$. Auf analoge Weise zeigt sich, dass der Winkel $ABM = B'A'N'$; folglich u. s. w.

Zusatz. Die aus den eben gemachten Schlüssen fliessende Gleichung $N'B'A' = P'A'Q'$ kann uns noch zu einer späterhin nützlich werdenden Formel hinleiten. Es ist nämlich $P'A'Q' = A'P'^{\wedge}A'Q' = N'A'^{\wedge}A'Q'$, weil $A'P'$ und $N'A'$ einerlei Richtung haben. Die Richtung $A'Q'$ aber ist einerlei mit der Richtung der Kreisbewegung $A'B'N'$ im Punkte A'. Man kann daher den Winkel $P'A'Q'$, $= N'B'A'$, auch durch $N'A'^{\wedge}A'B'N'$ vorstellen und erhält damit, A, B, C statt A', B', N' geschrieben, die für je drei Punkte gültige Formel

$$CBA = CA^{\wedge}ABC,$$

worin die Ternion ABC neben dem Winkelzeichen die Richtung bedeutet, welche der von A durch B nach C gehende Kreisbogen im Punkte A hat. Auch lässt sich diese Formel noch darstellen durch

$$ABC = ABC^{\wedge}CA \text{ oder}$$
$$ABC = ABC^{\wedge}AC + 180^0.$$

§. 10. Folgerungen. *a.* Wegen der Aehnlichkeit und des gleichnamigen Sinnes der Dreiecke MAB und $N'B'A'$ ist der Winkel $AMB = B'N'A' = -A'N'B'$, d. h. der Winkel, den in der einen Ebene zwei durch ihren C.punkt gelegte Gerade mit einander machen, ist dem von den entsprechenden und daher (§. 6. *b.*) durch den C.punkt der andern Ebene gehenden Geraden gebildeten Winkel gleich, nur von entgegengesetztem Zeichen.

b. Ist $MA = MB$, so ist auch $N'A' = N'B'$. Einem Kreise, dessen Mittelpunkt M ist, entspricht folglich ein Kreis, dessen Mittelpunkt N'; und zwei einander entsprechende Punkte, welche diese Kreise durchlaufen, beschreiben gleichzeitig ähnliche Bögen in ungleichnamigem Sinne (§. 7.).

c. Ueberhaupt verhält sich $MA : MB = N'B' : N'A'$. Die Abstände der Punkte der einen Ebene von deren C.punkte, oder kurz die Centralabstände dieser Punkte, sind demnach den Centralabständen der entsprechenden Punkte der andern Ebene umgekehrt proportional, oder, was dasselbe ausdrückt: von einem Paare entsprechender Punkte zum andern ist das Product aus ihren Centralabständen von constanter Grösse.

d. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MAB und $N'B'A'$ folgt noch die Proportion $AB : BM = B'A' : A'N'$;
und eben so hat man, wenn C und C', D und D' noch zwei andere Paare sich entsprechender Punkte sind, wegen der ähnlichen Dreiecke MBC und $N'C'B'$, etc.

$$MB : BC = N'C' : C'B',$$
$$CD : DM = D'C' : C'N',$$
$$MD : DA = N'A' : A'D'.$$

Die Zusammensetzung dieser vier Proportionen giebt

$$AB.CD : BC.DA = A'B'.C'D' : B'C'.D'A',$$

eine von den C.punkten freie zwischen vier Paaren entsprechender Punkte bestehende Proportion.

Uebrigens werden in diesen Proportionen — und so auch in allen später folgenden — alle einzelnen Linien, als welche im Allgemeinen in verschiedenen Geraden liegen, in absolutem d. i. positivem Sinne genommen.

e. Eine dieser Proportion analoge Gleichung lässt sich auch zwischen den Winkeln der beiden Figuren ableiten. Denn es ist der Winkel

$$ABM = B'A'N', \text{ und eben so}$$
$$MBC = N'C'B',$$
$$CDM = D'C'N',$$
$$MDA = N'A'D'.$$

Die Addition dieser vier Gleichungen giebt aber mit Berücksichtigung der Formel (3) in §. 8.:

$$ABC + CDA = B'A'D' + D'C'B', \text{ und dieses}$$
$$= A'B'C' + C'D'A',$$

weil nach (4) ebds. $B'A'D' + A'D'C' + D'C'B' + C'B'A' = 0$ ist.

f. Mittelst des Lehrsatzes in §. 9. und der jetzt aus ihm gezogenen Folgerungen lässt sich noch die Realität der bisher nur problematisch angenommenen Kreisverwandtschaft leicht darthun.

Wenn nämlich in den beiden Ebenen p und p' der positive Sinn einer jeden, ihre C.punkte M und N' und zwei einander entsprechende Punkte A und A' gegeben sind, so kann man nach §. 9. zu allen andern Punkten $B, C, D, \ldots$ in p die entsprechenden $B', C', D', \ldots$ in p' dadurch bestimmen, dass man die Dreiecke $N'A'B'$, $N'A'C'$, $N'A'D'$, etc. ähnlich und gleichnamigen Sinnes mit den Dreiecken MBA, MCA, MDA, etc. macht; und es ist nun noch zu zeigen, dass, wie es die Definition der Kreisverwandtschaft verlangt, von je vier Punkten in p oder p', welche in einem Kreise liegen, die entsprechenden in p' oder p gleichfalls in einem Kreise enthalten sind.

In der That sind in Folge der gemachten Construction erstens die Winkel $A'N'B'$, $A'N'C'$, $A'N'D'$, etc. $= -AMB$, $-AMC$, etc., und daher überhaupt jeder von zweien der Richtungen $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$,... gebildete Winkel $=$ dem von den zwei entsprechenden unter den Richtungen MA, MB, MC,... gebildeten Winkel, nur von entgegengesetztem Zeichen, z. B. $B'N'C' = CMB$; es sind zweitens die Längen $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$,... den Längen MA, MB, MC,... verkehrt proportional, z. B. $N'B' : N'C' = MC : MB$. Mithin sind die Dreiecke MBC und $N'C'B'$, und eben so nächst den vorhin genannten auch je zwei andere Dreiecke, welche an M und N' von zwei Paaren entsprechender Punkte in umgekehrter Folge gebildet werden, einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes. Es besteht folglich zwischen je vier Punkten, etwa $A, .. D$, der einen Ebene und den entsprechenden $A', .. D'$ in der andern die in *e.* erhaltene Winkelgleichung
$$ABC + CDA = A'B'C' + C'D'A'.$$

Liegen nun $A, .. D$ in einem Kreise, und ist daher nach §. 8. (6) die linke Seite dieser Gleichung $=0$, oder $=180^{\circ}$, so müssen zufolge dieser Gleichung und mit Anwendung des auch umgekehrt geltenden Satzes in §. 8. $A', .. D'$ gleichfalls in einem Kreise liegen, wie zu beweisen war. — Man bemerke nur noch, dass, nach demselben Satze, jenachdem sich die Sehnen AC und BD des erstern Kreises ausserhalb oder innerhalb desselben schneiden, ein Gleiches von den entsprechenden Sehnen des letztern geschieht, was damit übereinstimmt, dass die sich entsprechenden Punkte sich entsprechender Kreise in jedem nach einerlei Ordnung auf einander folgen (§. 2.).

§. 11. Um die in *d.* und *e.* des vor. §. erhaltenen Beziehungen zwischen kreisverwandten Figuren einfach ausdrücken zu können, wollen wir ein durch vier Punkte $A,\dots D$ einer Ebene bestimmtes Verhältniss von der Form $AB.CD:BC.DA$ ein Doppelverhältniss, und eine Winkelsumme von der Form $ABC+CDA$, die sich auch als der Winkelunterschied $ABC-ADC$ oder $CDA-CBA$ schreiben lässt, einen Doppelwinkel nennen.

Dieses festgesetzt, ist bei zwei kreisverwandten ebenen Figuren nach der Folgerung *d.* jedes Doppelverhältniss, und nach *e.* jeder Doppelwinkel der einen Figur dem auf gleiche Weise aus den entsprechenden Punkten der andern gebildeten Doppelverhältnisse oder Doppelwinkel gleich.

Weil D.verhältnisse und D.winkel die einfachsten von den C.punkten unabhängigen Grössen sind, welche bei der Kreisverwandtschaft von einer Figur zur andern gleiche Werthe haben, und weil sich deshalb erwarten lässt, dass diese Grössen bei unsern weitern Untersuchungen besonders häufig in Rechnung kommen werden, so wollen wir im Voraus einen Algorithmus uns zu bilden suchen, mit dessen Hülfe wir dergleichen Rechnungen möglichst kurz und bequem ausführen können.

Betrachten wir zuerst das D.verhältniss $AB.CD:BC.DA$, so ergiebt sich aus dessen erstem Gliede das zweite, wenn man im ersten statt dessen ersten, zweiten, dritten und vierten Buchstaben resp. den zweiten, dritten, vierten und ersten setzt. Wir wollen daher dieses D.verhältniss, um uns das doppelte Schreiben seiner Buchstaben zu ersparen, durch sein erstes Glied allein, das wir nach Weglassung des Multiplicationszeichens (.) mit Haken einschliessen, also durch

$$(ABCD)$$

ausdrücken.

Umgekehrt wird hiernach von dem abgekürzt ausgedrückten D.verhältnisse $(BCDA)$ das erste Glied $BC.DA$ und das zweite $CD.AB$ sein. Zugleich ersehen wir hieraus, dass $(BCDA)$ = dem reciproken Werthe von $(ABCD)$ ist, und dass daher, wenn man in dem Ausdrucke eines D.verhältnisses die cyklische Aufeinanderfolge der Buchstaben, auch dem Sinne nach, beibehält, zum ersten Buchstaben aber den ursprünglich zweiten nimmt, der Werth des neuen D.verhältnisses dem reciproken des ursprünglichen gleich ist. Man hat demnach

$$(ABCD)=\frac{1}{(BCDA)}=(CDAB)=\frac{1}{(DABC)}.$$

Lassen wir jetzt die Buchstaben nach einem dem ursprünglichen entgegengesetzten Sinne auf einander folgen, behalten aber den ersten Buchstaben als ersten bei, so verwandelt sich der Werth des D.verhältnisses gleichfalls in den reciproken. Denn aus $(ABCD)$ wird auf solche Weise $(ADCB), = AD.CB:DC.BA, = \frac{1}{(ABCD)}$. Gleicherweise findet sich $(BADC) = \frac{1}{(BCDA)} = (ABCD)$, und eben so

$$(CBAD) = \frac{1}{(ABCD)}, \; (DCBA) = (ABCD).$$

§. 12. Immer giebt es drei verschiedene Vierecke, welche dieselben vier Punkte A, B, C, D zu Ecken haben. Es sind diese Vierecke, wenn man stets D die vierte Ecke sein lässt:

$$ABCD, \; BCAD, \; CABD.$$

Jedes derselben lässt sich auf achterlei Weise ausdrücken, indem man die cyklische Folge seiner Ecken, nicht auch den Sinn dieser Folge, unverändert bleiben lässt, und man erhält somit die vier und zwanzig aus den vier Elementen $A, .. D$ zu bildenden Permutationen.

Der vorige §. hat uns gezeigt, dass je zwei der acht Ausdrücke des ersten Vierecks, und damit überhaupt je zwei der acht Ausdrücke eines und desselben Vierecks, als Ausdrücke von D.verhältnissen, entweder einander gleich sind, oder in reciproker Beziehung zu einander stehen. Dagegen sind je zwei Ausdrücke zweier verschiedenen Vierecke im Allgemeinen von einander unabhängig. Wohl aber giebt es eine Relation zwischen je drei Ausdrücken, deren jeder einem andern der drei Vierecke angehört; denn es ist, wenn diesmal auch auf die Zeichen bei der Entwickelung Rücksicht genommen wird:

$$(ABCD)\,(BCAD)\,(CABD) = -1.$$

Zusatz. In dem besondern Falle, wenn die vier Punkte in einer Geraden liegen, sind auch je zwei zu verschiedenen Vierecken gehörige Ausdrücke, und somit je zwei aller vier und zwanzig Ausdrücke, von einander abhängig. Denn, wie man leicht findet, ist alsdann mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen:

$$(ABCD) + (ACBD) = 1,$$

worin der erste Ausdruck zum ersten und der zweite zum zweiten Viereck gehört.

Letztere Formel stimmt übrigens ganz mit derjenigen überein, die sich, gleichfalls unter der Voraussetzung, dass die vier Punkte in einer Geraden enthalten sind, bereits in meinem baryc. Calcul S. 247, III. findet,

obgleich die Ausdrücke dort in einer etwas andern Bedeutung als hier genommen werden, indem das dortige (A, B, C, D) einerlei mit dem hiesigen ($ACBD$) ist. Ich habe aber jene ältere Bezeichnungsweise verlassen und diese neue gewählt, besonders um deswillen, weil die letztere auch den noch zusammengesetzteren Vieleckschnittsverhältnissen (Bar. Calc. S. 299) angepasst werden kann, indem man z. B. das Dreieckschnittsverhältniss

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA}$$

auf eine der vorigen entsprechende Weise durch ($ABCDEF$) ausdrückt.

§. 13. Ganz analoge Beziehungen, wie zwischen den bei einem System von vier Punkten einer Ebene sich bildenden D.verhältnissen, finden auch zwischen den durch ein solches System bestimmten D.winkeln statt. — In der That ist nach §. 8. (4) der D.winkel

$$BCD + DAB = -ABC - CDA.$$

Werde nun die Winkelsumme $ABC + CDA$ oder, was dasselbe ist, der Winkelunterschied $ABC - ADC$, der Kürze willen schlechthin durch

$$ABCD$$

ausgedrückt, so dass man, um hieraus die Winkelsumme oder den Winkelunterschied rückwärts abzuleiten, die drei ersten Buchstaben des Ausdrucks in ihrer Folge als ersten Winkel schreibt und als die drei Buchstaben des zweiten Winkels, wenn er additiv sein soll, den dritten, vierten und ersten Buchstaben des Ausdrucks setzt, ihn dagegen, soll er subtractiv sein, aus dem ersten Winkel dadurch folgert, dass man dessen mittlern Buchstaben in den vierten des Ausdrucks verwandelt.

Die vorige Gleichung ist hiernach zu schreiben

$$BCDA = -ABCD,$$

und daraus zu schliessen, dass, wenn man einen solchen Ausdruck, ohne die cyklische Folge seiner Buchstaben und den Sinn dieser Folge zu ändern, mit seinem zweiten Buchstaben anfangen lässt, sein Werth in den entgegengesetzten übergeht. Es ist daher

$$ABCD = -BCDA = CDAB = -DABC.$$

Gleicherweise verwandelt sich der Werth des Ausdrucks in den entgegengesetzten, wenn man, die Folge und den Anfangsbuchstaben beibehaltend, den Sinn der Folge umkehrt. Denn man hat

$$ADC + CBA = -ABC - CDA, \text{ also}$$

$$ADCB = -ABCD, \text{ und eben so}$$

$$BADC = -CBAD = DCBA = ABCD.$$

Alle acht Ausdrücke, welche einerlei cyklische Folge haben und daher ein und dasselbe der drei im vor. §. gedachten Vierecke ausdrücken, sind demnach ihren absoluten Werthen nach einander gleich; je zwei derselben sind aber mit einerlei oder verschiedenen Zeichen behaftet, jenachdem die zwei ihnen homologen Ausdrücke für D.verhältnisse entweder einander gleich sind, oder der eine das Reciproke des andern ist, — so dass die jetzigen D.winkel sich wie die Logarithmen der entsprechenden D.verhältnisse verhalten.

Eben so, wie im vor. §., sind ferner auch hier je zwei zu verschiedenen Vierecken gehörige Ausdrücke von einander unabhängig, wogegen zwischen je drei Ausdrücken, welche zu den drei verschiedenen Vierecken gehören, immer eine Relation statt hat. Denn es ist

$$ABC+BCA+CAB=180°, \text{ und}$$
$$CDA+ADB+BDC=0;$$

folglich, wenn man diese Gleichungen addirt:

$$ABCD+BCAD+CABD=180°,$$

eine Formel, die zu der entsprechenden im vor. §. gleichfalls in logarithmischer Beziehung steht.

§. 14. Zusätze. *a.* Liegen A, B, C, D in einem Kreise, so ist, jenachdem sich die Sehnen AC und BD ausserhalb, oder innerhalb des Kreises schneiden,

$$ABCD=0, \text{ oder } =180° \text{ (§. 8. (6))},$$

also überhaupt $\quad 2.ABCD=0;$

und umgekehrt folgt aus dieser Gleichung die Kreislage der vier Punkte.

b. Sind A, B, C, D, E irgend fünf Punkte einer Ebene, so hat man

$$ACBD=ACB-ADB, \; ADBE=ADB-AEB$$
$$\text{und } AEBC=AEB-ACB, \text{ folglich}$$
$$ACBD+ADBE+AEBC=0,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$ACBD+ADBE=ACBE.$$

Es lässt sich diese Formel leicht dadurch behalten, dass in jedem ihrer drei Glieder A der erste und B der dritte Buchstabe ist, und dass, wenn man diese zwei Buchstaben weglässt, die restirende Formel $CD+DE+EC=0$, oder $CD+DE=CE$ die bekannte Relation zwischen den durch drei Punkte in einer Geraden bestimmten Abschnitten darstellt.

Nachträglich werde hier noch die analoge zwischen D.verhältnissen obwaltende Relation bemerkt:

$(ACBD)(ADBE)(AEBC) = 1$ oder, was dasselbe ist,

$(ACBD)(ADBE) = (ACBE)$. (Vergl. Bar. Calc. S. 250.)

c. Der D.winkel $ABC-ADC$ kann mittelst derselben Buchstaben auch als ein einziger Winkel dargestellt werden. In der That ist nach §. 9. Zus. $CBA = CA^{\backprime}ABC$, $CDA = CA^{\backprime}ADC$.

Die erstere dieser Gleichungen von der letztern abgezogen, giebt aber mit Anwendung der Formel (3*) in §. 8.:

$$ABC-ADC = ABC^{\backprime}ADC,$$

worin die zwei Ternionen zur Rechten zwei Kreise oder vielmehr die Richtungen bedeuten, nach denen sich zwei, diese Kreise nach den zugleich mit ausgedrückten Sinnen derselben beschreibenden, Punkte beim Duchgange durch A bewegen.

d. Die identische Gleichung $ABCD = BADC$ lässt sich hiernach auch schreiben $ABC^{\backprime}ADC = BAD^{\backprime}BCD$,

wonach, *wenn durch je drei von vier in einer Ebene liegenden Punkten Kreise beschrieben werden, die Winkel, welche irgend zwei dieser vier Kreise mit einander machen, den von den jedesmal zwei übrigen Kreisen gebildeten Winkeln gleich sind.*

e. Dieselbe Transformation, auf die Gleichung $ABCD = A'B'C'D'$ (§. 10. *e.*) angewendet, giebt

$$ABC^{\backprime}ADC = A'B'C'^{\backprime}A'D'C'$$

und lehrt uns damit den Satz, dass bei zwei kreisverwandten Figuren je zwei sich schneidende Kreise der einen sich unter denselben Winkeln, wie die entsprechenden Kreise der andern Figur, schneiden; was übrigens schon aus der Erwägung hervorgeht, dass die Durchschnittswinkel zweier Kreise einerlei mit denen sind, welche die zwei in dem einen oder andern Durchschnitte zusammenstossenden Elemente des einen und des andern Kreises mit einander machen, und dass kreisverwandte Figuren in ihren Elementartheilen einander ähnlich sind (§. 5).

§. 15. Von den zwei in den letztvorhergehenden §§. betrachteten Grössenformen $(ABCD)$ und $ABCD$ ist jede von den vier durch vier Punkte einer Ebene bestimmten Linien BA, BC, DA, DC, und zwar die erstere bloss von den Längen, die letztere bloss von den Richtungen dieser Linien abhängig. Es ist nämlich $(ABCD)$ = dem Verhältnisse zwischen den Verhältnissen $BA:BC$ und $DA:DC$, und $ABCD$ = dem Unterschiede zwi-

schen den Unterschieden, um welche einerseits die Richtung BC von der BA, und andererseits die Richtung DC von der DA abweicht.

Zwischen der Verwandtschaft der Aehnlichkeit und der Kreisverwandtschaft findet hiernach, ausser der Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen kreisverwandter Figuren, noch eine andere merkwürdige Beziehung statt. Sowie nämlich bei zwei einander ähnlichen Figuren $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ die einfachen Linienverhältnisse $BA:BC$ und $B'A':B'C'$, desgleichen die Unterschiede zwischen den Richtungen dieser Linien oder die Winkel ABC und $A'B'C'$ von gleicher Grösse sind, so bleiben bei kreisverwandten Figuren Verhältnisse zwischen jenen einfachen Verhältnissen und nicht minder Unterschiede zwischen jenen einfachen Unterschieden oder Winkeln von einer Figur zur andern constant.

Zusatz. Sowie die D.verhältnisse, bleiben auch die in §. 12. Zus. angedeuteten noch zusammengesetzteren Verhältnisse zwischen Linien bei kreisverwandten Figuren von gleicher Grösse, indem sich jedes derselben in ein Product von D.verhältnissen auflösen lässt. Denn es ist, alle Linien in absolutem Sinne genommen:

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DA}\times\frac{AD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA},$$

oder mit Anwendung der abgekürzten Schreibart:

$$(ABCDEF)=(ABCD)\,(ADEF).$$

Analoges hat bei der Zusammensetzung von drei oder mehrern Winkeln statt. Denn versteht man unter $ABCDEF$ die Summe der drei Winkel ABC, CDE, EFA, so ist

$$ABCDEF=ABC+CDA+ADE+EFA=ABCD+ADEF.$$

Der dreitheilige Winkel $A\ldots.F$, als der Summe zweier D.winkel gleich, hat mithin ebenfalls in allen kreisverwandten Figuren denselben Werth.

Uebrigens sieht man leicht, dass die einfachen in §. 11. bei D.verhältnissen und in §. 13. bei D.winkeln bemerkten Relationen auch bei den zusammengesetzteren Verhältnissen und Winkeln obwalten, indem

$$(ABCDEF)=\frac{1}{(BCDEFA)}=(CDEFAB)=\text{etc.}$$

$$=(FEDCBA)=\frac{1}{(EDCBAF)}=\text{etc. und}$$

$$ABCDEF=-BCDEFA=CDEFAB=\text{etc.}$$

$$=FEDCBA=-EDCBAF=\text{etc. ist.}$$

§. 16. Merkwürdige Relationen bestehen noch zwischen den aus denselben vier Punkten gebildeten D.verhältnissen einerseits und den

D.winkeln andererseits. Um sie zu erhalten denke man sich zu einem beliebigen System von vier in einer Ebene liegenden Punkten A, B, C, D ein kreisverwandtes System $A', .. D'$ construirt und nehme dabei D als C.punkt jener Ebene, also D' unendlich entfernt an. Alsdann sind die D.verhältnisse und D.winkel der Figur $A..D$ den einfachen Verhältnissen zwischen den Seiten des Dreiecks $A'B'C'$ und dessen Winkeln gleich, und alle die bekannten Relationen, welche zwischen diesen einfachen Verhältnissen und Winkeln statt haben, müssen bei den entsprechenden D.verhältnissen und D.winkeln der Figur $A..D$ sich wiederfinden.

In der That verhält sich (§. 10. *d.*)

$$AB.CD:BC.DA = A'B'.C'D':B'C'.D'A' = A'B':B'C',$$

weil, wegen der unendlichen Entfernung des D', $C'D':D'A' = 1:1$ ist, und eben so

$$BC.AD:CA.DB = B'C':C'A'.$$

Ferner hat man

$$ABCD = A'B'C'D' = A'B'C',$$

weil aus demselben Grunde der Winkel $C'D'A' = 0$ ist; und gleicherweise

$$BCAD = B'C'A', \quad CABD = C'A'B'.$$

Die drei Winkel

$$ABCD, \; BCAD, \; CABD,$$

deren Summe wir bereits in §. 13. $= 180^0$ fanden, sind demnach die Winkel eines Dreiecks, dessen ihnen gegenüberliegende Seiten sich wie

$AC.BD$, $BA.CD$, $CB.AD$ verhalten.*)

Insbesondere ist daher

$$\sin ABCD : \sin BCAD = AC.BD : BA.CD = (CABD).$$

Folgerungen. *a.* Sind die drei D.winkel $ABCD$, $BCAD$, $CABD$ eines ebenen Vierecks den einfachen Winkeln $A'B'C'$, etc. eines Dreiecks gleich, so sind auch die drei D.verhältnisse $(ABCD)$, etc. beim Viereck den einfachen Verhältnissen $A'B':B'C'$, etc. beim Dreieck gleich, und umgekehrt.

b. Wenn der C.punkt D der Ebene ABC ausserhalb (innerhalb) des Kreises ABC liegt, so liegt auch der C.punkt der Ebene $A'B'C'$ ausserhalb

---

*) Ich habe diesen Satz bereits in meinem im Eingange zuerst erwähnten Aufsatze S. 49 aufgestellt und durch Anwendung complexer Grössen bewiesen. Ich hielt ihn damals für neu. Wie ich indessen durch meinen geehrten Freund, Herrn Dr. Balzer in Dresden, später benachrichtigt worden bin, ist derselbe Satz nebst mehreren aus ihm gezogenen interessanten Folgerungen schon in einer in Grunert's Archive der Math. Bd. II. S. 240 befindlichen Abhandlung des Herrn Prof. Bretschneider in Gotha enthalten.

(innerhalb) des Kreises $A'B'C'$ (§. 6. *c*.). Die Sinne der Kreisbewegungen ABC und $A'B'C'$ sind alsdann gleichnamig (ungleichn.) (§. 7.), und folglich die Winkel ABC und $A'B'C'$ gleichartig, d. i. beide hohl, oder beide erhaben (ungleichartig, d. i. der eine hohl, der andere erhaben) (§. 8. Zus.). Der Winkel $A'B'C'$ ist aber nach dem Obigen $=ABCD$, und folglich $ABCD$ gleichartig (ungleichartig) mit ABC.

Jenachdem daher von vier Punkten $A,..D$ in einer Ebene der eine D ausser- oder innerhalb des durch die drei übrigen A, B, C zu beschreibenden Kreises liegt, ist der D.winkel $ABCD$ gleichartig oder ungleichartig mit dem einfachen ABC.

---

§. 17. In §. 10. ist gezeigt worden, wie zu einem Systeme in einer Ebene p liegender Punkte A, B,... in einer andern Ebene p' ein ihm kreisverwandtes A', B',... construirt werden kann, wenn noch die positiven Sinne in p und in p', die beiden C.punkte M und N', sowie der Punkt A' gegeben sind. Somit sind von drei Punkten M, N, A in p die entsprechenden M', N', A' in p' gegeben, nur dass dabei N und M' unendlich entfernt liegen. Indessen kann man hiernach erwarten, dass überhaupt mit drei willkührlich angenommenen Punkten in p', welche irgend dreien des Systems in p entsprechen, das System in p' sich construiren lassen wird. — Nachfolgende Sätze werden diese Erwartung rechtfertigen.

Lehrsatz. Nach Feststellung der positiven Sinne in den Ebenen p und p' zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ kann in der Ebene des einen ABC ein Punkt M unzweideutig so bestimmt werden, dass die D.winkel des Vierecks $ABCM$ den Winkeln des Dreiecks $A'B'C'$ gleich werden, nämlich

$$ABCM = A'B'C',\quad BCAM = B'C'A',\ \text{also auch}\ CABM = C'A'B'.$$

Beweis. Nach §. 14. *c*. ist die erste dieser Gleichungen identisch mit

$$ABC^{\wedge}AMC = A'B'C',$$

und die zweite, wofür man auch $ACBM = A'C'B'$ schreiben kann, identisch mit

$$ACB^{\wedge}AMB = ABC^{\wedge}AMB + 180^{0} = A'C'B'.$$

Hiernach findet sich M, als der zweite Durchschnitt zweier Kreise, von denen der eine AMC, durch A und C gehend, mit dem Kreise ABC in A einen Winkel $= A'B'C'$ bildet, und der andere AMB, durch A und B gehend, mit demselben Kreise ABC in A einen Winkel $= A'C'B' + 180^{0}$ macht.

Zusatz. Die Sinne in den Ebenen p und p' sind von einander unabhängig. Wird der Sinn in p so angenommen, dass der Winkel ABC hohl ist, so kann nach der Bestimmung des Sinnes in p' der Winkel $A'B'C'$ entweder gleichfalls hohl, oder auch erhaben sein. Jede dieser zwei Bestimmungen giebt aber für den Punkt M einen andern Ort. Denn bei der erstern (letztern) ist der Winkel ABC mit $A'B'C'$, also auch mit $ABCM$ gleichartig (ungleichartig), und M liegt folglich (vor. §. Zus. *b*.) ausserhalb (innerhalb) des Kreises ABC.

§. 18. Lehrsatz. Werden, wie es nach vorigem Satze möglich ist, in den Ebenen zweier Dreiecke ABC und $A'B'C'$ resp. die Punkte M und N' so bestimmt, dass nach Festsetzung der Sinne in den beiden Ebenen die D.winkel des Vierecks $ABCM$ den Winkeln des Dreiecks $A'B'C'$, und ebenso die D.winkel des Vierecks $A'B'C'N'$ den Winkeln des Dreiecks ABC gleich werden, so sind die Dreiecke $N'A'B'$, $N'B'C'$, $N'C'A'$ resp. den Dreiecken MBA, MCB, MAC ähnlich und mit ihnen gleichnamigen Sinnes.

Beweis. Zu Folge der geforderten Lage von M und N' soll sein

$$ABC + CMA = A'B'C'^{*} \text{ und } A'B'C' + C'N'A' = ABC.$$

Die Addition dieser Gleichungen giebt $C'N'A' + CMA = 0$ oder

$$(a) \quad C'N'A' = AMC.$$

Aus derselben Gleichheit der D.winkel der Vierecke $ABCM$ und $A'B'C'N'$ mit den Winkeln der Dreiecke $A'B'C'$ und ABC folgt ferner (§. 16. Zus. *a*.)

$$AB.CM : BC.AM = A'B' : B'C' \text{ und}$$

$$A'B'.C'N' : B'C'.A'N' = AB : BC, \text{ mithin}$$

$$(b) \quad C'N' : A'N' = AM : CM.$$

Aus (a) in Verbindung mit (b) fliesst aber, dass die Dreiecke $N'C'A'$ und MAC einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes sind; und ähnlicherweise lässt sich dasselbe für die Dreiecke $N'A'B'$ und MBA, $N'B'C'$ und MCB beweisen.

§. 19. Lehrsatz. Soll zu einem Systeme von Punkten $A, B, C, D, \ldots$ in einer Ebene p ein ihm kreisverwandtes in einer Ebene p' construirt werden, so können drei Punkte des letztern, — es seien die den A, B, C entsprechenden A', B', C', — desgleichen die positiven Sinne in p und p' willkührlich genommen werden. Alsdann aber ist der jedem vierten

Punkte des erstern Systems entsprechende Punkt des letztern unzweideutig bestimmt.

Beweis. Man füge auf die in §. 17. bemerkte Weise zu den Dreiecken ABC und $A'B'C'$ die Punkte M und N' hinzu, so sind nach §. 18. die Dreiecke MBA und $N'A'B'$, sowie MCA und $N'A'C'$ einander ähnlich und gleichnamigen Sinnes. Und wenn auf gleiche Art zu jedem vierten Punkte D der entsprechende D' dadurch bestimmt wird, dass man dem Dreiecke MDA das Dreieck $N'A'D'$ ähnlich und gleichnamigen Sinnes macht, so sind die Figuren $ABCD\ldots$ und $A'B'C'D'\ldots$ kreisverwandt (§. 10. *f.*).

Zusätze. *a.* In den Fällen, wenn einer der beiden Kreise ABC und $A'B'C'$, oder auch beide, gerade Linien sind, ist die Bestimmung der C.punkte M und N' nach §. 17. mit Hülfe von D.winkeln nicht mehr statthaft, sondern es müssen D.verhältnisse angewendet werden.

In der That, liegen A, B, C in einer Geraden, und desgleichen auch A', B', C', so sind in denselben Geraden resp. auch M und N' begriffen, so dass

$$(ABCM) = (A'B'C'M') = -A'B':B'C'$$
$$\text{und } (A'B'C'N') = (ABCN) = -AB:BC.$$

Hiernach werden unter gehöriger Berücksichtigung der Vorzeichen, wenn das Verhältniss $-(A'B':B'C'):(AB:BC) = e:1$ gesetzt wird, M und N' mittelst der Proportionen

$$CM:MA = e:1 \text{ und } C'N':N'A' = 1:e \quad \text{gefunden.}$$

Liegen aber nur A', B', C' in einer Geraden, so ist M ein Punkt des Kreises ABC und darin nach derselben Proportion wie vorhin zu bestimmen. Es geschieht dieses mittelst eines die Linie CA rechtwinklig und harmonisch in dem Verhältnisse $e:1$ schneidenden Kreises (vergl. §. 22. *a.*), indem von den zwei Durchschnitten desselben mit dem Kreise ABC derjenige der Punkt M ist, von welchem aus A, B, C im Kreise in derselben Ordnung wie A', B', C' in der Geraden auf einander folgen. N' kann hierauf dadurch gefunden werden, dass man das Dreieck $N'A'B'$ ähnlich und gleichnamigen Sinnes mit MBA macht.

b. Der Punkt D' kann, ohne vorherige Ermittelung der C.punkte M und N', auch geradezu mit Hülfe der Formeln

$$ABC^{\wedge}ADC = A'B'C'^{\wedge}A'D'C' \text{ und } ACB^{\wedge}ADB = A'C'B'^{\wedge}A'D'B'$$

(§. 14. *e.*) gefunden werden, wonach D' der zweite Durchschnitt zweier Kreise ist, von denen der eine, durch A' und C' gehend, mit dem Kreise

$A'B'C'$ einen Winkel $= ABC \hat{} ADC$, und der andere, durch A' und B' gehend, mit dem Kreise $A'C'B'$ einen Winkel $= ACB \hat{} ADB$ macht.

§. 20. Sind von der Figur, welche mit der gegebenen $ABCDE\ldots$ kreisverwandt sein soll, bloss die Punkte A', B', C', nicht aber zugleich der positive Sinn ihrer Ebene p', gegeben, so ist der jedem vierten Punkte D in p entsprechende Punkt D' in p' im Allgemeinen zweideutig, und es können daher, jenachdem man den einen oder den andern Sinn der Drehung in p' für den positiven nimmt, zwei verschiedene die drei ersten Punkte gemein habende Figuren $A'B'C'D'E'\ldots$ und $A'B'C'D''E''\ldots$ construirt werden, deren jede mit $ABCDE\ldots$ kreisverwandt ist, und die es daher auch unter sich sind.

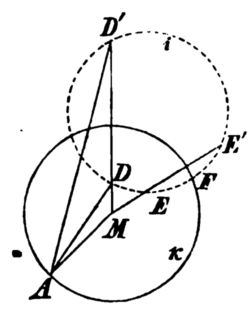
Zu jeder ebenen Figur $ABCDE\ldots$ lässt sich demnach in ihrer Ebene eine ihr kreisverwandte $A'B'C'D'E'\ldots$ construiren, von welcher mit drei Punkten A, B, C der erstern die entsprechenden Punkte A', B', C' zusammenfallen, während dadurch, dass man einen und denselben Sinn der Ebene als den positiven für die eine Figur und als den negativen für die andere nimmt, die übrigen Punkte D', E', ..., im Allgemeinen wenigstens, von den entsprechenden D, E, ... verschieden sind.

§. 21. Das gegenseitige Verhalten zweier solcher Figuren bietet mehreres Merkwürdige dar, was nicht nur an sich, sondern auch des später Folgenden willen, eine nähere Betrachtung verdient.

1) Bezeichnet man, wie bisher, die C.punkte der beiden Figuren mit M und N', so sind nach §. 9., weil jeder der Punkte A, B, C sich selbst entsprechen soll, die Dreiecke MAB und $N'BA$, MBC und $N'CB$, MCA und $N'AC$ einander ähnlich, aber auch gleich, weil $AB = BA$, etc.; folglich $MA = N'B$ und $MC = N'B$, folglich $MA = MC$, und ebenso $= MB$, sowie $N'A = N'B = N'C$. Es coincidirt daher N' mit M im Mittelpunkte des durch A, B, C zu beschreibenden Kreises, welchen man k nenne.

Allerdings kann den Proportionen $MA : MB : MC = N'A : \text{etc.} = 1 : 1 : 1$ auch dadurch genügt werden, dass man M und N' unendlich entfernt annimmt. Alsdann aber entspricht einem unendlich entfernten Punkte M oder N der einen Figur ein unendlich entfernter M' oder N' der andern, und die zwei Figuren sind folglich einander nicht bloss kreisverwandt, sondern auch ähnlich (§. 5.) und gleich und decken einander, da die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ coincidiren.

2) Nach dem Satze in §. 9. sind ferner die Dreiecke MAD und $N'D'A$, $=MD'A$, einander ähnlich und gleichnamigen, also jetzt entgegengesetzten Sinnes (wie es auch MAB und MBA, etc. waren), folglich der Winkel $AMD = -D'MA$ (§. 8. Zus.) $= AMD'$, und es verhält sich $MD:MA = MA:MD'$. Je zwei einander entsprechende Punkte D und D' liegen daher mit M in einer Geraden und auf einerlei Seite von M dergestalt, dass MA oder der Halbmesser des Kreises k die mittlere Proportionallinie zwischen MD und MD' ist, oder, was dasselbe ist: je zwei einander entsprechende Punkte liegen in einem Durchmesser des k und theilen ihn harmonisch.



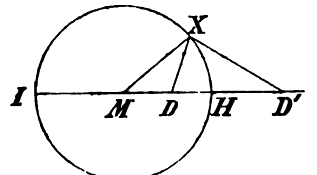
Ebenso wie A, B, C, entspricht daher auch jeder andere Punkt des Kreises k sich selbst, und jedem Punkte innerhalb des k entspricht ein Punkt ausserhalb, und umgekehrt. Der einem vierten Punkte D entsprechende D' ist folglich dann und nur dann unzweideutig bestimmbar, wenn D im Kreise ABC liegt.

3) Aus der in 2) erhaltenen Relation zwischen D und D' folgt, dass, wenn dem D in der einen Figur der Punkt D' in der andern entspricht, dem D', als einem Punkte der erstern Figur, der Punkt D in der letztern entsprechen wird. Das Entsprechen der beiden Figuren ist daher ein sogenanntes involutorisches.

4) Je zwei Paare entsprechender Punkte, wie D, D' und E, E', liegen in einem Kreise i; denn es ist $MD.MD' = MA^2 = ME.ME'$. Auf gleiche Weise erhellet, dass auch der jedem andern Punkte des i entsprechende Punkt in i enthalten ist, und daher i sich selbst zum entsprechenden Kreise hat. Ist F einer der beiden Durchschnitte des i mit k, so coincidirt F' mit F, und die Gerade MFF' wird eine Tangente des i. Der durch zwei Paare entsprechender Punkte zu beschreibende Kreis entspricht demnach sich selbst und schneidet den Kreis k rechtwinklig, sowie umgekehrt jeder den k rechtwinklig schneidende Kreis sich selbst entspricht.

5) Für je zwei einander entsprechende Kreise ist M der eine der beiden Aehnlichkeitspunkte. Dies erhellet am leichtesten in dem Falle, wenn M ausserhalb des einen, und damit auch ausserhalb des andern Kreises liegt (§. 6. *c.*). Denn die zwei alsdann von M an den einen Kreis zu ziehenden Tangenten müssen, als sich selbst entsprechende Gerade, auch den andern berühren; folglich u. s. w.

§. 22. Folgerungen und Zusätze. *a.* Ist X irgend ein Punkt des Kreises k und daher ein sich selbst entsprechender, so sind die Dreiecke MDX und MXD' einander ähnlich, und es verhält sich deshalb $MD:DX = MX:XD'$. Dies giebt den bekannten Satz, dass von einem Punkte X eines Kreises zum andern das Verhältniss $DX:XD'$ zwischen den Abständen des X von zwei festen Punkten D und D', durch welche ein Durchmesser des Kreises harmonisch getheilt wird, unverändert, $= MD:MX$, bleibt.



Mittelst derselben Figur lässt sich auch der umgekehrte Satz darthun, dass der ebene Ort eines Punktes X, dessen Abstände von zwei festen Punkten D und D' der Ebene in einem gegebenen Verhältnisse $= e:1$ stehen, ein Kreis ist, welcher die Linie DD' rechtwinklig und harmonisch schneidet. Denn bestimmt man in der Geraden DD' den Punkt M also, dass der Winkel $DXM = DD'X$ wird, so entstehen die zwei einander ähnlichen Dreiecke MDX und MXD', und es verhält sich daher

$$MD:MX = MX:MD' = DX:XD' = e:1,$$

mithin $MD:MD' = ee:1$, und es ist folglich M eben so, wie D und D', ein fester Punkt. Deshalb, und weil $MX = MD:e = e.MD'$, ist der Ort von X ein Kreis, welcher M zum Mittelpunkte hat. Bezeichnen endlich H und J die Durchschnitte dieses Kreises mit DD', so hat man $DH:HD' = DJ:JD' = e:1$, und es sind folglich D, D' und H, J zwei harmonirende Paare von Punkten.

b. Sowie daher, wenn A, B, C feste Punkte sind, der durch die Gleichung $2.ABCX = 0$ bestimmte Ort von X ein Kreis ist (§. 14. *a.*), so ist es auch der durch die Gleichung

$$(a) \quad (ABCX) = 1,$$

d. i. durch die Proportion $AX:XC = AB:BC$ bestimmte Ort. Bei ersterer Gleichung sind A, B, C Punkte des Kreises selbst; bei letzterer ist nur B ein solcher, indem der Proportion Genüge geschieht, wenn B statt X gesetzt wird, und durch A und C wird ein Durchmesser des Kreises harmonisch getheilt.

c. In vorliegender Abhandlung werden, wie schon erinnert worden (§. 10. *d.*), alle Linien in absolutem Sinne genommen, so dass zwischen AB und BA kein Unterschied statt hat. Berücksichtigt man aber diesen Unterschied, so kann das vorige $(A..X)$ ebensowohl $= -1$, als $= +1$ sein, da ein D.verhältniss nach der willkührlichen Annahme der von

einander unabhängigen Richtungen der vier Geraden, in denen seine vier Linien begriffen sind, ebensowohl einen negativen, als einen positiven Exponenten haben kann; und man muss daher, um beide gleich mögliche Werthe zusammenzufassen,

$$(ABCX)^2 = 1$$

statt des vorigen (a) schreiben.

Auf solche Weise tritt aber auch hier das schon in §. 13. bemerkte logarithmische Verhältniss der Gleichungen mit D.winkeln zu den entsprechenden Gleichungen mit D.verhältnissen wieder hervor, indem die Gleichung, welche mit Hülfe eines D.winkels ausdrückt, dass X irgend ein Punkt eines Kreises ist, nicht einfach $A..X = 0$, oder $= 180^0$, sondern $2.ABCX = 0$ war.

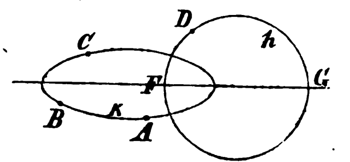
d. Wird der durch die Gleichung

$$(1) \quad (ADBX) = 1$$

bestimmte Ort von X im Raume überhaupt genommen, so ist er die Kugelfläche, welche durch Drehung des durch (1) zugleich ausgedrückten in der Ebene ADB enthaltenen Kreises um AB als Axe entsteht. Eben so sind

$$(2) \quad (CDAX) = 1 \quad \text{und} \quad (3) \quad (BDCX) = 1$$

die Gleichungen zweier anderer Kugelflächen, welche die Geraden CA und BC zu Axen haben und daher die Ebene ABC rechtwinklig schneiden. Da in jeder von ihnen beiden der Punkt D liegt, so schneiden sie einander in einem durch D gehenden die Ebene ABC rechtwinklig, es sei in F und G, treffenden Kreise h, von welchen FG ein Durchmesser ist.



Dieser Kreis wird demnach durch die Gleichungen (2) und (3) in Verbindung, also auch durch die damit identische Doppelproportion

$$(h) \quad AX:BX:CX = AD:BD:CD$$

ausgedrückt; und weil mit (h) auch der Gleichung (1) Genüge geschieht, so schneiden sich die drei Kugelflächen (1), (2) und (3) in einem und demselben Kreise h.

e. Weil F und G in h liegen, und sie daher Oerter von X in (h) sind, so verhalten sich

$$(4) \quad AF:BF:CF = AG:BG:CG = AD:BD:CD.$$

Deshalb, und weil F und G zugleich Punkte der Ebene ABC sind, ist der durch die Gleichung $\quad (k) \quad (FAGX) = 1$

ausgedrückte Kreis k der Kreis ABC selbst, indem die mit (k) identische Proportion $FX:GX = FA:GA$ erfüllt wird, nicht nur wenn A, sondern auch, wegen (4), wenn B oder C statt X gesetzt wird. Dabei fallen nach b. F und G in einen Durchmesser des Kreises und theilen ihn harmonisch.

Die Kreise k und h haben daher eine solche Lage gegen einander, *dass ihre Ebenen sich rechtwinklig schneiden, dass in die Durchschnittslinie dieser Ebenen zwei Durchmesser der Kreise fallen, und dass der eine dieser Durchmesser den andern harmonisch theilt.* Hiernach kann man, wenn der eine Kreis k, und von dem andern h der eine seiner beiden Durchschnitte F und G mit der Ebene des k gegeben sind, den Kreis h sofort construiren, und es muss folglich die ihn ausdrückende Proportion (h), in welcher A, B, C Punkte des k, und X, D Punkte des h sind, gültig bleiben, wo auch die Punkte A, B, C in k genommen werden mögen. Nennen wir daher zwei Kreise, die in der eben beschriebenen gegenseitigen Lage sind, zwei conjugirte Kreise, so können wir den Satz aufstellen:

Sind in zwei conjugirten Kreisen, A, B irgend zwei Punkte des einen, und X, Y irgend zwei Punkte des andern, so verhält sich

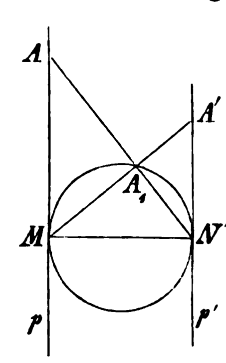
$AX:BX = AY:BY$*) und es ist daher $(AXBY) = 1$.

§. 23. Die im §. 21. betrachtete specielle gegenseitige Lage zweier kreisverwandten Figuren gewinnt dadurch ein allgemeineres Interesse, dass man je zwei kreisverwandte Figuren in jene specielle Lage gegen einander bringen kann. Man lasse zu dem Ende die Ebene p' der einen Figur mit der Ebene p der andern also zusammenfallen, dass der negative Sinn in p' mit dem positiven in p identisch wird, verschiebe sodann p' auf p, bis N' mit M coincidirt, und drehe zuletzt p' in sich um M, bis irgend zwei einander entsprechende Punkte, A und A', mit M in einer Geraden und auf einerlei Seite von M liegen. Denn dann werden dieselbe Lage gegen M auch je zwei andere einander entsprechende Punkte. B und B', etc. haben, und die mittleren Proportionallinien zwischen MA und MA', zwischen MB und MB', etc. werden von gleicher Grösse, die man c nenne, sein. Jeder Punkt des in p um M als Mittelpunkt und mit c als Halbmesser beschriebenen Kreises und kein anderer, wird folglich mit dem ihm entsprechenden Punkte zusammenfallen.

---

*) Chasles, Traité de géométrie supérieure, art. 795.

§. 24. In eine andere noch merkwürdigere Lage können wir die jetzt mit p auf besagte Weise coincidirende Ebene p' gegen p versetzen, wenn wir sie parallel mit p und ohne Drehung in sich fortführen, so dass ihr bisher mit M coincidirender C.punkt N' ein auf p in M errichtetes Perpendikel von einer Länge $=c$ beschreibt. Am Ende dieser Bewegung, wo $MN'=c$ geworden, haben MA und $N'A'$, ebenso wie anfangs, noch einerlei Richtung. Die Dreiecke AMN' und $MN'A'$ liegen daher in einer und derselben auf p und p' normalen Ebene, sind folglich resp. bei M und N' rechtwinklig und deshalb und wegen der Proportion $AM:MN'=MN':N'A'$ einander ähnlich. Mithin ist der Winkel $AN'M=MA'N'$ $=90^0-N'MA'$, und es schneiden sich daher MA' und $N'A$ rechtwinklig. Aus analogem Grunde schneiden sich auch MB' und $N'B$, MC' und $N'C$, etc. unter rechten Winkeln. Die Durchschnittspunkte selbst, die man resp. A_1, B_1, C_1, etc. nenne, liegen folglich auf einer Kugelfläche, von welcher MN' ein Durchmesser ist.



Somit erscheinen die zwei ebenen Figuren $ABC\ldots$ und $A'B'C'\ldots$ als die stereographischen Projectionen einer und derselben, das einemal aus N', das anderemal aus M betrachteten, sphärischen Figur $A_1B_1C_1\ldots$, und man sieht hieraus leicht, wie man mit Anwendung einer Kugelfläche und durch blosses Ziehen gerader Linien zu einem Systeme von Punkten A, B,... in einer Ebene p ein ihm in einer andern Ebene p' nach dem Gesetz entsprechendes System A', B',..., dass die Dreiecke MAB und $N'B'A'$, etc. einander ähnlich sind (§. 9.), construiren kann.

Man lege nämlich die zwei Ebenen p und p' mit ihren Punkten M und N' berührend an eine Kugelfläche, so dass MN' ein Durchmesser der Kugel wird, projicire hierauf die in p gegebenen Punkte A, B,... von N' aus auf die Kugelfläche, und diese Projectionen A_1, B_1,... von M aus auf die Ebene p', und es werden die damit erhaltenen Punkte die gesuchten A', B',... sein.

Zugleich entspringt aus dieser Construction ein neuer Beweis für die Kreisverwandtschaft der beiden Figuren. Denn es ist eine schon von Ptolemäus gekannte Eigenschaft der stereographischen Projection, dass bei ihr jeder Kreis auf der Kugelfläche sich wieder als Kreis projicirt, so wie umgekehrt jeder Kreis in der Projectionsebene, auf die Kugelfläche projicirt, einen Kreis giebt.

Eben so folgt aus einer andern Haupteigenschaft der stereographischen Projection, aus der Aehnlichkeit zwischen den kleinsten Theilen einer sphärischen Figur und den entsprechenden Theilen in der Projection, dass, wie schon in §. 5. gezeigt worden, dieselbe Eigenschaft auch kreisverwandten Figuren zukommen muss.

Da hiernach unter denselben Winkeln, unter welchen sich zwei Kreise auf der Kugel schneiden, sich auch die projicirten Kreise in der Ebene begegnen (vergl. §. 14. *e.*), so ist, wenn einem innerhalb der Kugelfläche befindlichen Auge die positiven Sinne, nach denen die Winkel auf dieser Fläche und die Winkel in der die Fläche berührenden Projectionsebene gerechnet werden, identisch erscheinen:

$$ABC^{\land}ADC = A_1B_1C_1{}^{\land}A_1D_1C_1.$$

Wenn man daher eben so, wie $ABC^{\land}ADC = ABCD$ war (§. 14. *c.*), auch den von zwei Kugelkreisen $A_1B_1C_1$ und $A_1D_1C_1$ in A_1 gebildeten Winkel kurz durch $A_1B_1C_1D_1$ ausdrückt, so werden zwischen Ausdrücken solcher Art bei einem System von Punkten auf einer Kugelfläche alle die Relationen statt finden, welche wir in §. 13. und §. 14. *a. b. d.* bei einer ebenen Figur zwischen D.winkeln erhalten haben. — So werden z. B., da durch vier nicht in einer Ebene begriffene Punkte immer eine Kugelfläche beschrieben werden kann, von den vier Kreislinien, welche man durch je drei solcher vier Punkte legen kann, je zwei sich unter denselben Winkeln, wie die jedesmal zwei übrigen schneiden.

§. 25. Eine sphärische Figur und ihre stereographische Projection haben aber mit kreisverwandten Figuren nicht bloss das gegenseitige Entsprechen von Kreisen und die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen gemein, sondern *es ist* auch, wie bei letztern Figuren, *jedes D.verhältniss zwischen vier Punkten auf der Kugel dem D.verhältnisse zwischen den stereographischen Projectionen dieser Punkte gleich.*

Der Beweis dieser, wie es scheint, bisher noch nicht bemerkten Gleichheit lässt sich folgendergestalt führen. — Wegen der rechten Winkel bei M und A_1 (vor. Fig.) ist

$$N'A \,.\, N'A_1 = MN'^2, \text{ und eben so } N'B \,.\, N'B_1 = MN'^2,$$
$$\text{folglich } N'A : N'B = N'B_1 : N'A_1.$$

Deshalb und wegen der Identität der Winkel $AN'B$ und $A_1N'B_1$ sind die Dreiecke $AN'B$ und $B_1N'A_1$ einander ähnlich; folglich

$$AB:N'B = B_1A_1:N'A_1, \text{ und eben so}$$
$$CB:N'B = B_1C_1:N'C_1; \text{ folglich}$$
$$AB:BC = (A_1B_1:B_1C_1):(N'A_1:N'C_1), \text{ und ebenso}$$
$$AD:DC = (A_1D_1:D_1C_1):(N'A_1:N'C_1); \text{ folglich}$$
$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1).$$

§. 26. Zusätze. *a.* Mit Hülfe dieser aus dem Begriffe der stereographischen Projection unmittelbar gefolgerten Gleichheit entsprechender D.verhältnisse in den Figuren $AB\ldots$ und $A_1B_1\ldots$ kann sehr leicht noch die Aehnlichkeit in den kleinsten Theilen und das Entsprechen von Kreisen bei diesen Figuren bewiesen werden.

Denn ist ABC, und daher auch $A_1B_1C_1$, ein unendlich kleines Dreieck, und sind resp. D und D_1 zwei endlich von diesen Dreiecken entfernte Punkte, so verhält sich $AD:DC = A_1D_1:D_1C_1 = 1:1$; folglich ist $(ABCD) = AB:BC$ und $(A_1B_1C_1D_1) = A_1B_1:B_1C_1$, folglich $AB:BC = A_1B_1:B_1C_1$; und eben so wird bewiesen, dass $BC:CA = B_1C_1:C_1A_1$. Mithin sind ABC und $A_1B_1C_1$, d. h. je zwei einander entsprechende unendlich kleine Dreiecke, einander ähnlich.

Liegen ferner die Punkte A_1, B_1, C_1, D_1 der Kugelfläche in der genannten Folge in einem Kreise, so ist nach einem Satze des Ptolemäus

$$A_1B_1 . D_1C_1 + A_1D_1 . B_1C_1 = B_1D_1 . C_1A_1 \text{ oder}$$
$$(A_1B_1D_1C_1) + (A_1D_1B_1C_1) = 1; \text{ folglich auch}$$
$$(\alpha) \quad (ABDC) + (ADBC) = 1,$$

woraus, da der Satz des Ptolemäus auch umgekehrt gilt, die Kreislage der Punkte A, B, C, D fliesst.

b. Der ptolemäische Satz und dessen Umkehrung können sehr einfach mit Hülfe des Satzes in §. 16. bewiesen werden, dass in einem Dreiecke, dessen Winkel $= ABCD$, $BCAD$, $CABD$ sind, die gegenüberliegenden Seiten sich wie $AC.BD$, $BA.CD$, $CB\,AD$ verhalten. Denn liegen die Punkte A, B, C, D in dieser Folge in einem Kreise, und ist daher

$$(1) \quad ABCD = 180^0,$$

also ein Winkel des Dreiecks $= 180^0$, so ist die ihm gegenüberliegende Seite der Summe der beiden andern gleich, folglich

$$(2) \quad BA.CD + CB.AD = AC.BD,$$

welches der directe Satz ist. Und da umgekehrt aus der Relation (2) zwischen den Seiten des Dreiecks die Winkelgleichung (1) folgt (§. 16. Folg. *a.*), so muss auch der umgekehrte Satz bestehen.

c. Der ptolemäische Satz und seine Umkehrung sind für die Kreisverwandtschaft insofern noch von besonderem Werthe, als ihnen zufolge diese Verwandtschaft auch dadurch definirt werden kann, dass jedes D.verhältniss zwischen je vier Punkten der einen Ebene dem D.verhältnisse zwischen den entsprechenden Punkten der andern gleich ist. Denn sind A, B, C, D vier in einem Kreise auf einander folgende Punkte, und besteht daher zwischen ihnen nach dem directen ptol. Satze die Gleichung (2) oder (α), so muss nach dieser Definition dieselbe Gleichung auch zwischen $A', .. D'$ Gültigkeit haben, und es müssen folglich nach dem umgekehrten Satze $A', .. D'$ in Kreislage sein.

Auf gleiche Art kann, wie hier noch bemerkt werden mag, die Kreisverwandtschaft auch durch die Gleichheit entsprechender D.winkel definirt werden; denn der Satz, dass, wenn $A, .. D$ in einem Kreise liegen, $A .. D = 0$, oder $= 180^\circ$ ist, gilt ebenfalls auch umgekehrt.

d. Bei dem vorhin gegebenen Beweise des umgekehrten Satzes des Ptolemäus wurde stillschweigend die Bedingung hinzugedacht, dass die vier Punkte $A, .. D$ in einer Ebene liegen. Es ist aber sehr bemerkenswerth, *dass diese Bedingung gar nicht zugesetzt zu werden braucht*, sondern eine Folge der Gleichung (2) oder (α) selbst ist. Denn beschreibt man durch A, B, C, D, was immer möglich ist, eine Kugelfläche und projicirt hierauf diese vier Punkte stereographisch auf eine Ebene nach $A_{,}, .. D_{,}$, so ist nach Obigem $(ABDC) = (A_{,}B_{,}D_{,}C_{,})$ und $(ADBC) = (A_{,}D_{,}B_{,}C_{,})$. Besteht daher zwischen $A, .. D$ die Gleichung (α), so wird diese auch durch die vier Punkte $A_{,}, .. D_{,}$ der Ebene erfüllt, und es müssen daher letztere, wie in *b.* gezeigt worden, in einem Kreise $k_{,}$ liegen. Es ist aber dieser Kreis die stereographische Projection des auf der Kugel durch A, B, C zu beschreibenden Kreises k, und da $D_{,}$ ein Punkt von $k_{,}$ ist, so muss D in k liegen; folglich u. s. w.

Eben so kann, wenn bei vier Punkten $A, .. D$ im Raume, $ABCD$ stets als abgekürzter Ausdruck des Winkels $ABC{}^\wedge ADC$ genommen wird, die Gleichung $A .. D = 0$, oder $= 180^\circ$, wie von selbst einleuchtet, nicht anders bestehen, als wenn $A, .. D$ in einer Ebene und darin in einem Kreise liegen.

Kreisverwandtschaft sphärischer Figuren.

§. 27. Nach §§. 24. und 25. hat eine sphärische Figur mit ihrer stereographischen Projection auf eine Ebene alle die Grössen und Beziehungen gemein, welche zwei ebenen kreisverwandten Figuren gemeinschaftlich zukommen. Wir können daher die Kreisverwandtschaft, die wir bisher auf ebene Figuren beschränkten, auch auf sphärische ausdehnen, indem wir eine ebene Figur und eine sphärische, oder zwei sphärische kreisverwandt nennen, wenn jedem Kreise der einen ein Kreis in der andern entspricht.

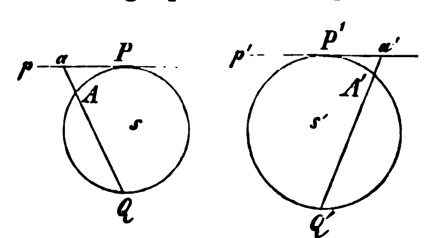
Bedeuten demnach σ und σ' zwei sphärische Figuren, π und π' ihre stereographischen Projectionen auf irgend welche Ebenen, so sind σ und π, ingleichen σ' und π', kreisverwandt. Sind es daher noch π und π', so sind es auch σ und σ', und umgekehrt folgt aus der Kreisverwandtschaft zwischen σ und σ' die zwischen π und π'. Hieraus können wir in Verbindung mit den Sätzen in §. 24. und 25. weiter schliessen:

In zwei kreisverwandten sphärischen Figuren sind je zwei einander entsprechende D.verhältnisse, so wie je zwei dergleichen D.winkel, einander gleich. Denn sind σ und σ', also auch π und π', kreisverwandt, so ist jedes D.verhältniss in σ dem entsprechenden in π, dieses dem entsprechenden in π', und dieses dem entsprechenden in σ' gleich. Eben so wird der Beweis für entsprechende D.winkel geführt, nur dass ein solcher hier stets in der am Ende des vor. §. angegebenen Bedeutung genommen wird. Und da hiernach je zwei Kreise der einen Figur sich unter Winkeln von derselben Grösse, wie die entsprechenden Kreise der andern schneiden, so sind, ebenso wie zwei kreisverwandte ebene Figuren (vergl. §. 14. *e.*), auch zwei sphärische in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

Ist umgekehrt in zwei sphärischen Figuren σ und σ' jedes D.verhältniss der einen dem entsprechenden der andern gleich, so sind die Figuren kreisverwandt. Denn unter der gemachten Voraussetzung ist auch jedes D.verhältniss in π dem entsprechenden in π' gleich; folglich sind π und π' kreisverwandt (§. 26. *c.*), folglich auch σ und σ'. — Auf gleiche Art folgt die Kreisverwandtschaft zwischen σ und σ' auch aus der Gleichheit je zweier entsprechender D.winkel.

§. 28. Ist ein System von Punkten $A, B, C, D, \ldots$ einer Kugelfläche s gegeben, und sind von den entsprechenden Punkten einer andern Kugelfläche s' irgend drei, etwa A', B', C', und überdies die Sinne beider Flächen (folg. §.) gegeben, so kann man eben so, wie bei ebenen Figuren, zu jedem vierten Punkte D in s den entsprechenden D' in s' unzweideutig finden.

Sind nämlich P und P' irgend zwei Punkte in s und s', Q und Q' deren Gegenpunkte, so lege man in P und P' an s und s' zwei berührende Ebenen p und p', projicire auf p von Q aus die Punkte A, B, C, D nach a, b, c, d, und auf p' von Q' aus die Punkte A', B', C' nach a', b', c', und bestimme nach §. 19. Zus. b. in p' den dem d entsprechenden Punkt d', indem man hierbei die Sinne in p und p' einerlei mit den Sinnen der in p und p' bei P und P' fallenden Elemente von s und s' nimmt. Die Projection des d' von Q' aus auf s' wird alsdann der gesuchte Punkt D' sein.

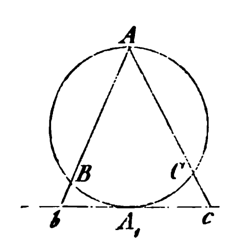


Auch kann man D' geradezu, wie in §. 19. Zus. b., durch Construction zweier Kreise $A'D'C'$ und $A'D'B'$ auf der Fläche s' erhalten, welche mit Rücksicht auf die vorausgetzten Sinne in s und s' den Winkelgleichungen $ABCD = A'B'C'D'$ und $ACBD = A'C'B'D'$ Genüge thun.

§. 29. Im Bisherigen ist bis auf §§. 24. und 28. bei Winkelbestimmungen stets nur der Sinn in einer Ebene, nicht aber der Sinn in einer Kugelfläche, in Betracht gekommen. Es ist aber der letztere ein von dem erstern wohl zu unterscheidender Begriff. Denn eben so, wie ein in einem Kreise sich nach einem und demselben Sinne bewegender Punkt von einem Elemente zum andern die Richtung seiner Bewegung ändert, und es deshalb angemessen erscheint, bei dieser Bewegung für den Begriff, welcher dem Begriffe der Richtung bei einem sich in einer Geraden bewegenden Punkte entspricht, ein anderes Wort Sinn zu gebrauchen: so ist auch bei einer Kugelfläche der Sinn von einem Flächenelemente zum andern verschieden, und es sollte eigentlich ein neuer Ausdruck gewählt werden, um den Complex dieser verschiedenen Sinne aller Elemente einer Kugelfläche zu bezeichnen, auf dieselbe Art, wie das Wort Sinn den Inbegriff der verschiedenen Richtungen aller Elemente eines Kreises darstellt. In Ermangelung eines mir hierzu geeignet

scheinenden Ausdrucks mag vor der Hand das Wort S i n n auch in dieser potenzirten Bedeutung angewendet werden.

Bei einer Kreisbewegung ist mit der Richtung, nach welcher ein Element des Kreises beschrieben wird, die Richtung des nächstfolgenden, mit dieser die Richtung des weiterhin folgenden, etc. und damit der Sinn der Bewegung gegeben. Sind daher *A* und *B* zwei einander unendlich nahe Punkte eines Kreises, so ist durch die Folge *AB* zugleich sein Sinn gegeben; es ist nämlich derjenige, nach welchem ein den Kreis beschreibender Punkt, nachdem er durch *A* gegangen, zunächst durch *B* geht. Ist dagegen *AB* ein endlicher Bogen des Kreises, so wird durch die Folge *AB* ohne weitere Bemerkung der Sinn noch nicht bestimmt, sondern erst nach Zutritt eines dritten Punktes *C*, also durch die Folge *ABC*, als wonach ein den Kreis beschreibender und dabei von *A* ausgehender Punkt zunächst nach *B* und dann erst nach *C* gelangen soll. Auch kann man, was auf dasselbe hinauskömmt, von *A* aus die Punkte *B* und *C* auf eine den Kreis im Gegenpunkte von *A* berührende Gerade nach *b* und *c* projiciren und, indem man durch die Folge *bc* die Richtung jedes Elements dieser Geraden ausgedrückt annimmt, den durch *ABC* ausgedrückten Sinn des Kreises als denjenigen definiren, der mit der Richtung des Elements übereinstimmt, welches der Kreis mit der Geraden gemein hat.



Aehnlicherweise lässt sich nun auch der Sinn einer Kugelfläche bestimmen. Wie beim Kreise, ist auch hier mit dem Sinne irgend eines Elements der Fläche der Sinn jedes an dasselbe grenzenden Elements, hiermit der Sinn jedes weiterhin folgenden Elements, und solchergestalt der Sinn der Fläche selbst gegeben, so dass, wenn *A*, *B*, *C* drei einander unendlich nahe Punkte der Fläche und daher in einem Elemente derselben begriffen sind, die jedoch nicht in einem Kreise von endlicher Grösse liegen dürfen, durch eine ihrer Combinationen, wie *ABC*, der Sinn der Kugelfläche bestimmt ist. Sind aber nicht alle drei Punkte einander unendlich nahe, so wird durch *ABC* zwar der Sinn des endlichen Kugelkreises, in dem sie enthalten sind, ohne Weiteres aber noch nicht der Sinn der Fläche selbst bestimmt. Dieses geschieht erst durch Hinzufügung eines vierten Punktes *D* der Fläche, welcher mit den drei erstern nicht in einem Kreise liegt.

Um nun den durch irgend eine Aufeinanderfolge aller vier Punkte, etwa durch *ABCD*, ausgedrückten Sinn der Fläche sich zur Anschauung zu bringen, lege man auf analoge Art, wie beim Kreise, durch den Gegenpunkt von A, welcher A_1 heisse, eine die Kugel berührende Ebene, projicire auf diese von A aus die Punkte B, C, D nach b, c, d und nehme als Sinn des Elements, welches die Kugelfläche mit der Berührungsebene gemein hat, den durch die Folge *bcd* bestimmten Sinn der Ebene. Denn somit ist, wie schon erinnert worden, der Sinn auch für jedes andere Element, so wie der Sinn der Fläche selbst bestimmt.

Wir wollen hiernach, wenn bei einer Lage der Kugel, in welcher A ihr oberster und A_1 ihr unterster Punkt ist, die Kreisbewegung *bcd*, also auch die *BCD*, nach der Rechten geht, den durch *ABCD* ausgedrückten Sinn der Kugelfläche einen Sinn nach der Rechten nennen. Es leuchtet aber ein, dass alsdann auch bei einer solchen Lage der Kugel, in welcher die Richtung von A nach B von oben nach unten geht, die Kreisbewegung *BCD* nach rechts, und die Richtung *CD*, wenn sie nach vorn liegt, nach rechts gehend erscheinen wird; und es lässt sich daher der nach rechts (links) gehende Sinn auch dadurch definiren, dass, wenn A oben, B unten und *CD* vorn liegt, die Linie *CD* nach der Rechten (Linken gerichtet ist.

§. 30. Untersuchen wir noch, bei welchen Veränderungen der Aufeinanderfolge der vier Buchstaben der durch *ABCD* ausgedrückte Sinn einer Kugelfläche sich in den entgegengesetzten verwandelt.

Weil die Folgen *cbd* und *bdc* den entgegengesetzten Sinn der Folge *bcd* ausdrücken, so wird auch jeder der Sinne *ACBD* und *ABDC* dem *ABCD* entgegengesetzt sein.

Man sieht ferner ohne Mühe, dass, wenn bei nach unten gerichteter Linie *AB* die *CD* nach rechts gehend erscheint, dieselbe *CD* bei nach unten gerichteter *BA* nach links gerichtet sich zeigen wird, und dass daher die Sinne *ABCD* und *BACD* einander entgegengesetzt sind.

Werden demnach im Ausdrucke des Sinnes einer Kugelfläche durch die Folge von vier Punkten der Fläche die zwei ersten, oder, wie wir vorhin sahen, die zwei mittlern, oder die zwei letzten Punkte gegenseitig vertauscht, so verwandelt sich damit der Sinn in den entgegengesetzten. Durch fortgesetzte Vertauschung je zweier nächstfolgenden Buchstaben des Ausdrucks *ABCD* können aber alle übrigen 23 aus $A, .. D$ zu bildenden Permutationen erhalten werden, und man wird somit in

den Stand gesetzt, diejenigen unter ihnen, welche mit *ABCD* einerlei Sinn ausdrücken, und deren es eilf giebt, von den übrigen zwölf, welche den entgegengesetzten Sinn darstellen, abzusondern. Man erhält auf solche Weise dieselben zwei Gruppen, die ich in meinem baryc. Calcul S. 23 aufgestellt habe.

§. 31. Ist zu einem System von Punkten auf einer Kugelfläche s_1 ein kreisverwandtes System $A, B, C, D, E, \ldots$ auf einer andern Kugelfläche s construirt worden, und dieses also, dass man, A, B, C willkührlich annehmend, jeden der übrigen Punkte $D, E, \ldots$ durch Uebertragung gewisser Winkel von s_1 auf s bestimmt hat (§. 28. zu Ende): so kann man, eben so wie in §. 20. bei ebenen Figuren, von denselben A, B, C ausgehend, für die übrigen Punkte von den vorigen $D, E, \ldots$ verschiedene Oerter $D', E', \ldots$ finden, indem man bei dieser zweiten Construction die Winkel auf s nach einem dem vorigen entgegengesetzten Sinne rechnet. Man erhält somit die zwei einander kreisverwandten Figuren $ABCDE\ldots$ und $ABCD'E'\ldots$ auf derselben Kugelfläche s, von denen die eine durch die andere unzweideutig bestimmt wird.

Um die gegenseitigen Beziehungen dieser zwei Figuren, welche man σ und σ' nenne, näher zu untersuchen, projicire man sie von einem beliebigen Punkte O der Kugelfläche aus auf eine die Fläche im Gegenpunkte von O berührende Ebene und bezeichne diese Projectionen mit π und π', die, weil σ und σ' einander kreisverwandt sind, es gleichfalls sein werden (§. 27.). Da ferner den Punkten A, B, C in σ dieselben Punkte in σ' entsprechen, so werden auch die Projectionen von A, B, C, als Punkte in π, sich selbst zu entsprechenden in π' haben, und die Figuren π und π' werden daher in derselben Beziehung, wie die in §. 21. betrachteten, zu einander stehen. Jeder der Punkte, welcher mit den Projectionen von A, B, C in einem Kreise liegt, und kein anderer Punkt der Ebene, wird hiernach sich selbst entsprechen; das Entsprechen überhaupt wird ein involutorisches sein; u. s. w. Wegen der Kreisverwandtschaft zwischen $\pi, \pi', \sigma, \sigma'$ müssen aber alle diese Beziehungen zwischen π und π' auch zwischen σ und σ' statt haben, und wir schliessen somit auf nachstehende Eigenschaften zweier in derselben Kugelfläche begriffenen kreisverwandten Figuren, welche drei Punkte A, B, C, als sich selbst entsprechend, gemein haben:

1) Ausser A, B, C entspricht auch noch jeder andere Punkt sich selbst, welcher mit diesen dreien in einem Kreise k liegt. Je zwei

andere einander entsprechende Punkte der Kugelfläche liegen auf verschiedenen Seiten dieses k.

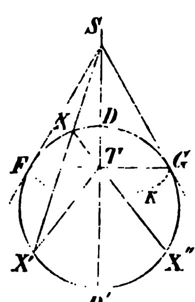
2) Die zwei Figuren sind in Involution.

3) Je zwei Paare entsprechender Punkte liegen in einem Kreise. Ein solcher Kreis entspricht sich selbst und schneidet den Kreis k rechtwinklig. Umgekehrt entsprechen sich alle Punkte eines den k rechtwinklig schneidenden Kreises paarweise, und somit der Kreis sich selbst.

Weitere Folgerungen. 4) Sei D einer der beiden Pole des k, so entspricht jeder durch D gelegte Hauptkreis sich selbst, weil er den k rechtwinklig schneidet; er enthält mithin auch den dem D entsprechenden und nach 1) von D verschiedenen Punkt D'. Da nun alle durch D gelegten Hauptkreise sich im Gegenpunkte von D schneiden, so ist D' mit diesem Gegenpunkte identisch, und es sind daher die Pole des k zwei einander entsprechende Punkte.

5) Wenn zwei in derselben Ebene enthaltene Systeme von Punkten in Involution sind, so fallen ihre C.punkte zusammen. Denn entspricht dem unendlich entfernten Punkte U der Ebene, als einem Punkte des zweiten Systems, der Punkt M im ersten, so entspricht auch dem U, als einem Punkte des ersten Systems, der Punkt M im zweiten.

Diesem Satze gemäss hat ein System von Punkten, welche in einem durch die Pole D und D' gehenden Hauptkreise oder Meridiane begriffen sind, mit dem ihm entsprechenden und daher in demselben Meridiane, also mit dem vorigen in einerlei Ebene enthaltenen Systeme einen gemeinsamen C.punkt M, den wir jetzt zu bestimmen suchen wollen.



6) Heissen F und G die Durchschnitte des in Betracht gezogenen Meridians mit dem Kreise k, so ist, weil jeder dieser zwei Punkte nach 1) sich selbst entspricht, das Dreieck MFG dem MGF ähnlich (§. 9.), folglich MFG ein gleichschenkliges Dreieck, und M ein Punkt der Axe DD'.

Die Bestimmung von M in DD' ist aber zweideutig, jenachdem man nämlich die gleichnamigen Sinne der zwei in derselben Ebene einander entsprechenden Systeme entweder einerlei, oder einander entgegengesetzt annimmt, und wonach zu jedem Punkte X der Meridianebene der entsprechende X' so zu bestimmen ist, dass die Dreiecke MFX und $MX'F$ einander ähnlich und entweder stets einerlei, oder stets verschiedenen Sinnes werden (§. 9.), X' selbst aber

nur dann unzweideutig sich ergiebt, wenn, wie gegenwärtig, X, und damit auch X', ein Punkt des Meridians ist.

7) Nun sind die Sinne der Dreiecke MFG und MGF stets einander entgegengesetzt, wo auch M in der Axe DD' liegen mag, den einzigen Fall ausgenommen, wenn M der Durchschnitt T von DD' mit FG ist, da durch drei in einer Geraden liegende Punkte T, F, G ein Sinn der Ebene nicht ausgedrückt wird. Bei der ersten der zwei vorhin gemachten Annahmen, dass nämlich die Sinne der Dreiecke MFX und $MX'F$ stets einerlei sein sollen, muss folglich M mit T coincidiren.

8) Bei der zweiten der vorigen Annahmen sind dieselben einander ähnlichen Dreiecke entgegengesetzten Sinnes, folglich der Winkel $FMX' = -XMF = FMX$, folglich $XMX' = 0$, und es liegen daher X und X' mit M in einer Geraden. Ist aber X ein dem F unendlich naher Punkt des Meridians, so ist, weil F sich selbst entspricht, auch X' ein solcher, und die Gerade XX' wird eine Tangente des Meridians. Der Ort von M für die zweite Annahme, welcher S heisse, ist folglich der Durchschnitt der in F an den Meridian gelegten Tangente mit DD'.

9) Die Punkte T und S kann man auch als den Mittelpunkt des Kreises k und als die Spitze der die Kugelfläche in demselben Kreise berührenden Kegelfläche definiren, und es erhellet aus dem Voranstehenden, wie man mittelst des einen oder des andern dieser zwei Punkte für jeden Punkt X eines jeden Meridians, d. i. für jeden Punkt X der Kugelfläche, den entsprechenden X' leicht finden kann. — Mit Hülfe von T geschieht dieses, wenn man, wegen der Aehnlichkeit und der Gleichsinnigkeit der Dreiecke TDX und $TX'D'$, in der Meridianebene des X den Winkel $D'TX' = XTD$ macht, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn man den zweiten Durchschnitt X'' von XT mit der Kugelfläche bestimmt und im Hauptkreise DX den Bogen $DX' = X''D$ macht. Und denselben Punkt X' erhält man mittelst S noch einfacher als zweiten Durchschnitt von SX mit der Kugelfläche.

10) Liegen die Punkte X, Y,... der Kugelfläche in einem Kreise, so sind auch X', Y',... in einem solchen enthalten, wegen der Kreisverwandtschaft beider Systeme; und da zu Folge der eben gemachten Construction X' und X'', und eben so Y' und Y'', etc. gegen die Axe DD' eine symmetrische Lage haben, so liegen X'', Y'',... in einem dem $X'Y'$... gleichen Kreise. Bezeichnen wir daher die drei Systeme, zu denen die Punkte X, X', X'' gehören, resp. mit σ, σ', σ'', so sind, ebenso wie

σ und σ', auch σ und σ'' kreisverwandt, und überdies auch in Involution, da dem X'', als einem Punkte des σ, der Punkt X in σ'' entspricht.

11) Für die zwei Systeme σ und σ'' sind T und S gleichfalls die beiden C.punkte, jedoch mit Vertauschung ihrer vorigen Rollen. Denn bedeuten X, Y zwei Punkte eines Meridiankreises, so sind in dessen Ebene die Dreiecke TXY und $TY''X''$ einander ähnlich und verschiedenen Sinnes, dagegen die Dreiecke SXY und $SY''X''$ einander ähnlich und einerlei Sinnes. Auch unterscheidet sich die Verwandtschaft zwischen σ und σ'' von der zwischen σ und σ' noch dadurch, dass in jedem Meridiane bei letzterer von gewissen zwei Punkten (F und G) ein jeder sich selbst entspricht, bei ersterer aber es keinen sich selbst entsprechenden Punkt giebt.

Dass übrigens durch T und S der Durchmesser DD' harmonisch getheilt wird, ist ohne Weiteres einleuchtend, und ich setze nur noch hinzu, dass, sowie S die Spitze einer die Kugel in einem Kreise, dessen Mittelpunkt T, berührenden Kegelfläche ist, T als die Spitze einer imaginären Kegelfläche angesehen werden kann, welche die Kugel in einem imaginären Kreise, dessen Mittelpunkt S ist, berührt, und dass die Summe der Quadrate der Halbmesser beider Kreise $= - ST^2$ ist.

12) Projicirt man, sei es von S, oder von T aus, als Centrum, einen Kugelkreis auf die Kugelfläche selbst, so erhält man nach 9) wiederum einen Kreis. Dies giebt, weil nach der verschiedenen Annahme des Kreises k der Punkt S jeder beliebige ausserhalb, und der Punkt T jeder beliebige innerhalb der Kugelfläche sein kann, den bemerkenswerthen Satz: *Ist von den zwei Schnitten einer Kegelfläche mit einer Kugelfläche der eine ein Kreis, so ist es auch der andere.*

Man kann hieraus noch folgern, *dass, wenn durch zwei Kreise, deren Ebenen nicht parallel sind, eine Kegelfläche beschrieben werden kann, sie auch in einer Kugelfläche liegen, und umgekehrt.*

Kreisverwandtschaft zwischen Figuren im Raume überhaupt.

§. 32. Unter der Annahme, dass die Kreisverwandtschaft auch auf den Raum von drei Dimensionen ausgedehnt werden kann, so dass, wenn bei zwei solchen Räumen irgend vier Punkte des einen in einem Kreise liegen, immer auch die vier entsprechenden des andern in einem Kreise begriffen sind, können wir, ohne noch die Realität dieser An-

nahme erwiesen zu haben, mit Hülfe der im Vorigen für kreisverwandte sphärische Figuren gefundenen Eigenschaften auf nachstehende Eigenschaften der Kreisverwandtschaft im Raume schliessen.

1) Liegen fünf Punkte A, B, C, D, E des einen Raumes r in einer Kugelfläche α, so lässt sich auch durch die entsprechenden fünf Punkte $A', \dots E'$ des andern r' eine Kugelfläche beschreiben, und es entspricht daher jeder Kugelfläche des einen Raums eine Kugelfläche im andern.

Beweis. Man beschreibe die Kreise ABC und ADE, die sich, als zwei in α enthaltene Kreise, ausser in A noch in einem zweiten Punkte F dieser Fläche schneiden werden. Unter der gemachten Annahme werden mithin auch A', B', C'; F' und A', D', E', F' in Kreisen liegen. Beschreibt man daher durch A', B', C', D' eine Kugelfläche, so liegt in dieser auch F', nämlich als Punkt des Kreises $A'B'C'$; in derselben Fläche liegt folglich auch der Kreis $A'D'F'$, mithin auch der Punkt E', als ein Punkt des letztern Kreises.

2) Da hiernach der durch irgend vier Punkte in r zu beschreibenden Kugelfläche die durch die entsprechenden vier Punkte in r' bestimmte Kugelfläche nach dem Gesetze der Kreisverwandtschaft entspricht, so ist nach §. 27. jedes zwischen vier Punkten des einen Raums stattfindende D.verhältniss dem von den entsprechenden vier im andern Raume gebildeten gleich. Und dasselbe gilt auch von D.winkeln, wenn diese in derselben Bedeutung wie auf Kugelflächen (ebds.) genommen werden; d. h. je zweien sich in zwei Punkten schneidenden Kreisen des Raumes r entsprechen in r' zwei Kreise, welche sich in zwei Punkten unter denselben Winkeln wie erstere schneiden.

3) Wenn A, B, C, also auch, wenigstens im Allgemeinen, A', B', C' einander unendlich nahe liegen, so sind die Dreiecke ABC und $A'B'C'$ einander ähnlich, da sie als Elemente zweier kreisverwandten Kugelflächen angesehen werden können (§. 27.). Mithin sind auch je zwei entsprechende nach allen Dimensionen unendlich kleine Tetraeder einander ähnlich, indem die vier das eine begrenzenden Dreiecke den entsprechenden vier Dreiecken des andern ähnlich sind. Ueberhaupt also sind je zwei kreisverwandte räumliche Figuren, ebenso wie ebene und sphärische, in ihren kleinsten Theilen einander ähnlich.

4) Hieraus folgt noch, dass die Winkel, unter denen sich in dem einen Raume zwei Kreise, — wenn auch nur in einem Punkte —, oder

ein Kreis und eine Kugelfläche, oder zwei Kugelflächen schneiden, den Winkeln gleich sind, unter denen sich die entsprechenden Kreise und Kugelflächen im andern Raume schneiden.

§. 33. Die in §. 3. in Bezug auf kreisverwandte ebene Figuren gemachten Schlüsse gelten, wie man leicht wahrnimmt, unverändert auch bei räumlichen Figuren, und es müssen daher, wenn die Kreisverwandtschaft mit der Aehnlichkeit nicht zusammenfallen soll, gewissen zwei endlich entfernten Punkten in r und r' — den C.punkten M und N' dieser Räume — zwei unendlich entfernte M' und N in r' und r nach unbestimmt bleibenden Richtungen entsprechen.

Hiernach entspricht der Kugelfläche $MABN$ die Kugelfläche $M'A'B'N'$, d. i. jeder durch M gelegten Ebene eine durch N' gehende Ebene, und ebenso jeder Geraden durch M eine Gerade durch N', und umgekehrt; wobei zugleich einleuchtet, dass von je zwei durch M und N' gelegten einander entsprechenden Ebenen die C.punkte, die ihnen für sich, als Ebenen, deren Punkte in kreisverwandter Beziehung stehen, zukommen, mit den C.punkten M und N' der beiden Räume identisch sind.

In Verbindung mit §. 9. folgt hieraus, dass für je zwei Paare entsprechender Punkte in r und r', wie A und A', B und B', die Dreiecke MAB und $N'B'A'$ einander ähnlich sind, dass mithin, wie bei zwei ebenen kreisverwandten Systemen von Punkten, so auch bei zwei räumlichen je zwei der Linien $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$,... Winkel von derselben Grösse mit einander bilden, wie die entsprechenden unter den Linien MA, MB, MC,..., und dass erstere Linien den letztern umgekehrt proportional sind.

§. 34. Soll daher zu einem Systeme von Punkten A, B, C,... im Raume r ein ihm kreisverwandtes System in r' construirt werden, und werden dabei noch die C.punkte M und N' beider Räume als gegeben vorausgesetzt, so ziehe man durch N' gerade Linien a', b', c',... nach solchen Richtungen, dass das System a', b', c',... dem von den Richtungen MA, MB, MC,... gebildeten gleich wird, dass also das eine System entweder geradezu, oder nach Verwandlung seiner Richtungen in die entgegengesetzten, mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann. Man nehme hierauf A' in a' willkührlich und bestimme dann B' in b', C' in c', etc. dergestalt, dass, auch hinsichtlich der durch die Richtungen bestimmten Vorzeichen, sich

$$N'B':N'A'=MA:MB,\ N'C':N'A'=MA:MC, \text{ etc.} \quad \text{verhält.}$$

Dass nun das auf solche Weise erhaltene System A', B', C',... dem gegebenen A, B, C,... in der That kreisverwandt ist, lässt sich auf nachstehende Weise darthun. — In Folge der Construction sind die Dreiecke $N'B'A'$, $N'C'B'$, $N'D'C'$, $N'A'D'$ resp. den Dreiecken MAB, MBC, MCD, MDA ähnlich. Hieraus fliesst eben so, wie in §. 10. *d.*, die Gleichheit der D.verhältnisse $(ABCD)$ und $(A'B'C'D')$, d. i. die Gleichheit je zweier D.verhältnisse zwischen entsprechenden Punkten. Liegen daher die Punkte A, B, C, D in dieser Folge in einem Kreise, und ist mithin

$$(ABDC)+(ADBC)=1 \quad (§.\ 26.\ a.),$$

so besteht dieselbe Gleichung auch zwischen A', B', C', D', woraus wir schliessen (§. 26. *d.*), dass, wie es die Kreisverwandtschaft erfordert, auch letztere vier Punkte in der genannten Folge in einem Kreise enthalten sind.

§. 35. Zusätze. *a.* Wie man sieht, ist hierdurch zugleich die Realität der Kreisverwandtschaft im Raume bewiesen (§. 32.), sowie auch der den Sätzen in §. 26. *c.* und §. 27. analoge Satz, dass die Kreisverwandtschaft im Raume durch die Gleichheit entsprechender D.verhältnisse definirt werden kann.

Da ferner bei zwei Systemen, deren jedes aus vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten besteht, durch die vier Punkte eines jeden sich eine Kugelfläche beschreiben lässt, und aus der Gleichheit entsprechender D.winkel in beiden Systemen auf die Kreisverwandtschaft (§. 27.) und damit auf die Gleichheit der D.verhältnisse beider Systeme geschlossen werden kann, so muss die im Früheren für ebene und sphärische Figuren erwiesene Definition der Kreisverwandtschaft durch Gleichheit entsprechender D.winkel auch für räumliche Figuren Geltung haben.

b. Bei der im vor. §. ausgeführten Construction bleiben folgende Stücke des Systems in r' der Willkühr überlassen: I. der Ort von A'; II. die durch $N'A'$ zu legende Ebene, in welcher B' enthalten sein soll; III. die Seite von $N'A'$ in dieser Ebene, auf welcher B', und IV. die Seite dieser Ebene selbst, auf welcher C' liegen soll. Nachdem man aber die Wahl über diese vier Stücke getroffen hat, ist das System in r' vollkommen bestimmt. Denn mit den drei ersten Stücken und dem Winkel AMB, welchem der Winkel $A'N'B'$ gleich ist, ist die Richtung $N'B'$ bestimmt, und mit dieser Richtung ist es der Ort von B' durch die Pro-

portion $MB:MA = N'A':N'B'$. Mit dem vierten Stücke und den Winkeln AMC und BMC ergiebt sich hierauf die Richtung von $N'C'$, indem der von $N'A'$, $N'B'$, $N'C'$ gebildete körperliche Winkel dem von MA, MB, MC gebildeten gleich sein muss; die Länge von $N'C'$ aber folgt aus einer der vorigen analogen Proportion. Eben so, wie C', lässt sich dann auch jeder der übrigen Punkte, z. B. D', unzweideutig finden, da, jenachdem C und D auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Ebene MAB sind, auch C' und D' auf einerlei oder verschiedenen Seiten der Ebene $N'A'B'$ liegen müssen, und somit die Seite letzterer Ebene, auf welcher D' liegt, bestimmt ist.

c. Sind in r' ausser dem C.punkte N' noch die Stücke I. und II. d. i. der Punkt A' und die Ebene $N'A'B'$, nicht aber auch die Bestimmungen III. und IV. gegeben, so kann man in r' vier verschiedene Systeme construiren, deren jedes mit dem gegebenen in r kreisverwandt ist. Denn den Punkt B' kann man in der Ebene $N'A'B'$ sowohl rechter als linker Hand von der Geraden $N'A'$, und den Punkt C' sowohl vor als hinter derselben Ebene annehmen.

§. 36. Es ist nicht schwer, bei der in §. 34. gezeigten Construction eines einem gegebenen Systeme kreisverwandten Systems die zu treffenden Abänderungen anzugeben, wenn nicht mehr die C.punkte des einen und des andern unter die gegebenen Stücke gehören, oder, was auf dasselbe hinauskommt, wenn die den gegebenen Punkten M und N' entsprechenden Punkte M' und N endlich entfernt liegen, und daher jetzt noch gegeben sein müssen, da sie auch vorher in ihrer unendlichen Entfernung als zwei gegebene Punkte zu betrachten waren.

Um diese allgemeinere Aufgabe zu lösen, construire man zunächst ein System von Kreisen $M'A'N'$, $M'B'N'$, $M'C'N'$, etc., von denen sich je zwei in M' und N' unter denselben Winkeln, wie die zwei entsprechenden unter den Kreisen MAN, MBN, MCN, etc. in M und N, schneiden. Zu dem Ende lege man an letztere Kreise in M die geradlinigen Tangenten a, b, c, ... und bestimme die positive Richtung einer jeden übereinstimmend mit der Richtung, welche das Element des von ihr berührten Kreises in M, gemäss dem durch die Aufeinanderfolge der drei Buchstaben (MAN, etc.) ausgedrückten Sinne des Kreises, hat. Man construire hierauf, wie in §. 34., ein dem Systeme der sich in M schneidenden Richtungen a, b, c, ... gleiches System durch den Punkt M' gehender Richtungen a', b', c', ... Das System von Kreisen, welche, durch M' und N'

gehend, in M' die a', b', c',... berühren und somit vollkommen bestimmt sind, — dieses System wird, wenn man noch die Sinne der Kreise übereinstimmend mit den Richtungen ihrer Tangenten a', b', c',... in M' annimmt, das verlangte sein.

Weil die Sinne letzterer Kreise auch durch die Folgen $M'A'N'$, $M'B'N'$, etc. ausgedrückt werden, so ist mit dem Sinne eines jeden zugleich noch bestimmt, auf welcher Seite der gemeinschaftlichen Sehne $M'N'$ im ersten der Punkt A', im zweiten der Punkt B', u. s. w. liegen muss.

Der Punkt A' kann im ersten Kreise auf der ihm zugehörigen Seite der Sehne $M'N'$ beliebig genommen werden. Wird alsdann das Verhältniss

$$\frac{M'A'}{A'N'} : \frac{MA}{AN} = \alpha$$

gesetzt, so hat man zufolge der auch im Raume statt findenden Gleichheit der D.verhältnisse zwischen entsprechenden Punkten:

$$\frac{M'B'}{B'N'} = \alpha.\ \frac{MB}{BN},\ \frac{M'C'}{C'N'},\ = \alpha.\ \frac{MC}{CN},\ \text{etc.}$$

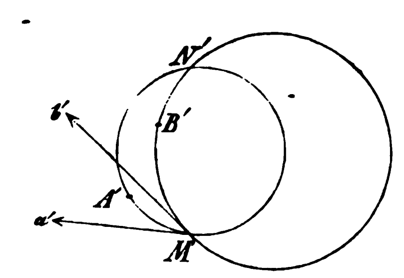
Hiermit aber lassen sich die Punkte B', C',..., da noch die Seiten von $M'N'$ bekannt sind, auf welchen sie in ihren Kreisen $M'B'N'$, etc. liegen müssen, unzweideutig finden, und die vorgesetzte Aufgabe ist daher gelöst.

§. 37. Zählen wir noch, wie in §. 35. *b.*, die Stücke auf, welche bei der eben gemachten Construction nach Willkühr bestimmt werden können. Sie sind, wenn wir von dem Systeme in r' gar nichts als gegeben voraussetzen:

I. die Punkte M', N' und A', wodurch zugleich der Kreis $M'A'N'$, die ihn in M' berührende Gerade a', und durch die letztgenannte Folge der drei Punkte die positive Richtung von a' gegeben sind;

II. die durch a' gehende Ebene, in welcher b' liegen soll, oder die Ebene $a'b'$. Weil a' und b' die Kreise $M'A'N'$ und $M'B'N'$ in M' berühren, so berührt diese Ebene die Kugelfläche $M'A'N'B'$, welche s' heisse, in M'. Der Mittelpunkt von s' ist der gegenseitige Durchschnitt der Axe des Kreises $M'A'N'$ und des in M' auf der Ebene $a'b'$ errichteten Perpendikels; denn beide Linien sind Axen von s'. Hiernach ist mit dem Kreise $M'A'N'$ und der Ebene $a'b'$ zugleich s' gegeben, und es kann daher als zweites Stück statt der Ebene $a'b'$ auch die Kugelfläche s' genommen werden;

III. die Seite von a' in der Ebene $a'b'$, auf welche der positive Theil der Richtung b' fallen soll, oder — weil der von M' durch B' bis N' gehende Kreisbogen und der positive Theil seiner Tangente b' auf einerlei Seite der Ebene $M'A'N'a'$ fallen — die Bestimmung, in welchem der zwei Theile der durch den Kreis $M'A'N'$ getheilten Kugelfläche s' der Punkt B' liegen soll;



IV. die Seite der Ebene $a'b'$, auf welche der positive Theil der Richtung c' fallen soll, die Bestimmung also, ob dieser Theil bei seinem Ausgange von M' zunächst in die von $a'b'$ in M' berührte Kugel s' eindringen soll, oder nicht, oder — weil bei statt findendem Eindringen, und nur dann, der von M' durch C' bis N' gehende Bogen im Innern von s' begriffen ist — die Bestimmung, ob C' innerhalb, oder ausserhalb der Kugelfläche s' liegen soll.

§. 38. Zusätze und Folgerungen. *a.* Dass die unter I. bis IV. aufgezählten Stücke nach Willkühr angenommen werden können, so dass nicht mittelst einiger derselben die übrigen in Folge der kreisverwandtschaftlichen Beziehungen zwischen beiden Figuren sich finden lassen. dies ist mit Rücksicht auf dasjenige, was bereits in §. 34. und §. 35. *b.* über die Construction des einem gegebenen Systeme in einem Punkte sich schneidender Richtungen gleichen Systems bemerkt worden, ohne Weiteres einleuchtend. Soll daher zu einem gegebenen Systeme im Raume ein kreisverwandtes construirt werden, und sind für irgend drei Punkte M, N, A des erstern die ihnen entsprechenden M', N', A' des letztern gegeben, so reichen diese noch nicht hin um zu den übrigen Punkten des erstern die entsprechenden des letztern zu finden. Wollte man dagegen die irgend vier Punkten des erstern Systems entsprechenden Punkte des letztern willkührlich gegeben sein lassen, so wären der gegebenen Stücke zu viel, da zwischen diesen vier Punkten sich D.verhältnisse und D.winkel bilden, welche den entsprechenden im erstern Systeme gleich sein müssen. Wohl aber kann man alle auf M', N', A' folgenden Punkte B', C',... des zweiten Systems unzweideutig finden, wenn nächst jenen drei Punkten noch eine durch sie gehende Kugelfläche s', die einer gewissen durch M, N, A gehenden, etwa der noch den Punkt B enthaltenden, Kugelfläche s entspricht, und ausserdem noch die zwei bloss Lagenverhältnisse betreffenden Stücke III. und IV. gegeben sind.

b. Sind nicht zugleich letztere zwei Stücke, sondern bloss die drei Punkte M', N', A' und die Kugelfläche s' gegeben, so lassen sich damit ähnlicherweise, wie in §. 35. *c.*, vier verschiedene Systeme construiren. Bezeichnet man nämlich die der s' entsprechende Kugelfläche $MANB$ mit s, die zwei Theile, in welche die Fläche s (s') durch den Kreis MNA ($M'N'A'$) getheilt wird, mit α und β (α' und β'), die von s und s' eingeschlossenen Räume mit γ und γ', die ausserhalb s und s' befindlichen Räume mit δ und δ', so kann man den Punkten in α und β entweder die Punkte in α' und β', oder die in β' und α', und dabei jedesmal den Punkten in γ und δ entweder die Punkte in γ' und δ', oder die in δ' und γ' entsprechend setzen.

c. Zu einem gegebenen Systeme von Punkten im Raume lassen sich daher immer noch drei andere ihm kreisverwandte construiren, dergestalt, dass erstens drei gewisse Punkte M, N, A des Systems mit den ihnen in jedem der drei andern Systeme entsprechenden Punkten identisch sind, und damit auch jeder andere Punkt des Kreises MNA, welcher k heisse, mit den drei ihm entsprechenden zusammenfällt, und dass zweitens eine gewisse durch M, N, A gehende Kugelfläche s in jedem der drei andern Systeme sich selbst zur entsprechenden hat. Den vorhin mit α, β, γ, δ bezeichneten Flächen und Räumen des gegebenen Systems können nämlich in dem zu construirenden

entweder β, α, γ, δ, oder β, α, δ, γ, oder α, β, δ, γ

entsprechend gesetzt werden.

Eine nähere mit keiner Schwierigkeit verbundene Untersuchung dieser drei Fälle, wobei ich von der Betrachtung in §. 31. ausging, hat mich zu nachstehenden Resultaten geführt.

Das gegenseitige Entsprechen der Punkte ist in jedem der drei Fälle ein involutorisches. Die zwei Systeme haben daher stets einen gemeinschaftlichen C.punkt (vergl. §. 31. 5)). Bezeichnen wir diesen mit O und einen beliebigen Punkt des Kreises k mit E, so ist in jedem der drei Fälle für je zwei einander entsprechende Punkte X und X'

$$OX.OX' = OE^2.$$

Im ersten Falle ist O die Spitze des Kegels, welcher die Kugel s im Kreise k berührt; X und X' liegen mit O in einer Geraden und auf einerlei Seite von O.

Im zweiten Falle ist O der Mittelpunkt des Kreises k, und der Winkel XOX' wird von der Ebene dieses Kreises rechtwinklig halbirt.

Im dritten Falle ist O der Mittelpunkt der Kugel s; X und X' aber liegen, wie im ersten, mit O in einer Geraden und auf einerlei Seite von O.

d. Zwei kreisverwandte Systeme $A, B, C, \ldots$ und $A', B', C', \ldots$ im Raume können immer in eine solche Lage gegen einander gebracht werden, dass erstens die Cpunkte beider in einem Punkte O zusammenfallen, und somit die Producte $OA.OA'$, $OB.OB'$, $OC.OC'$, etc. von gleicher Grösse sind, die man $= c^2$ setze; und dass zweitens von zwei Paaren entsprechender Punkte A und A', B und B' die zwei Punkte eines jeden mit O in einer Geraden und darin auf einerlei Seite von O liegen. Alsdann werden die zwei Punkte aller übrigen Paare C und C', D und D', etc. entweder dieselbe Lage gegen O, wie die jener zwei erstern, haben, oder es werden alle die Winkel COC', DOD', etc. von der Ebene $OAA'BB'$ rechtwinklig halbirt werden.

Im erstern dieser zwei Fälle entspricht jeder Punkt der um O als Mittelpunkt mit c als Halbmesser beschriebenen Kugelfläche, und kein anderer, sich selbst. Nächstdem entspricht ausser dieser Kugelfläche noch jede andere sie rechtwinklig schneidende Kugelfläche, und keine andere, sich selbst. — Im letztern Falle sind es die Punkte des um O mit c in der Ebene OAB zu beschreibenden Kreises, so wie die durch diesen Kreis zu legenden Kugelflächen, welche sich selbst entsprechen.

Von den aus der Kreisverwandtschaft entspringenden Aufgaben.

§. 39. Der Hauptnutzen, den die Lehre von den Verwandtschaften der Figuren gewährt, besteht unstreitig darin, dass, wenn zwei Systeme von Punkten als in einer gewissen Verwandtschaft zu einander stehend bewiesen werden sollen, es nicht nöthig ist, für jedes Stück des einen Systems, welches eben dieser Verwandtschaft willen dem entsprechenden Stücke des andern Systems gleich sein muss, diese Gleichheit besonders darzuthun, sondern dass immer aus einer viel geringern Anzahl n solcher Gleichheiten auf die Gleichheit je zweier der übrigen einander entsprechenden Stücke geschlossen werden kann; und dass daher zu Folge jeder Verwandtschaft bei einem Systeme von n Punkten aus irgend n von einander unabhängigen Stücken, welche von einer durch die jedesmalige Verwandtschaft bedingten Beschaffenheit sind, alle übrigen Stücke von derselben Beschaffenheit gefunden werden können. — Indem man nämlich ein zweites System von n Punkten construirt, in welchem die

ν Stücke, welche den ν gegebenen entsprechen, von gleicher Grösse mit den gegebenen sind. — Dabei ist ν eine von der Zahl n, von der Art der Verwandtschaft und von dem Umstande, ob das System in einer Geraden, oder in einer Ebene, oder im Raume enthalten ist, abhängige Zahl.

Aus jeder Verwandtschaft entspringt demnach eine besondere Classe geometrischer Aufgaben. Im zweiten Abschnitte meines «barycentrischen Calculs» habe ich die Classen von Aufgaben, welche aus den fünf dort behandelten Verwandtschaftsarten hervorgehen, einzeln aufgeführt. Dass nun auch die Kreisverwandtschaft zu einer besondern Classe von Aufgaben hinleitet, dies folgt im Betreff ebener Figuren sogleich aus dem Satze (§. 19.), dass, wenn zu einem Systeme von n Punkten $A, B, C, D, E, \ldots$ in einer Ebene ein ihm kreisverwandtes $A', B', \ldots$ construirt werden soll, die drei Punkte A', B', C' willkührlich angenommen werden können, und dass es hinreicht, wenn für jeden der $n-3$ übrigen Punkte $D', E', \ldots$ zwei D.winkel, für D' die D.winkel $ABCD$ und $ACBD$,
für E' die D.winkel $ABCE$ und $ACBE$,
u. s. w. gegeben sind. Hat man aber mit diesen $2n-6$ D.winkeln das kreisverwandte System construirt, so hat man damit zugleich alle übrigen D.winkel und alle D.verhältnisse des ursprünglichen Systems gefunden, indem diese Grössen in beiden Systemen gleiche Werthe haben. Wenn man daher D.winkel und D.verhältnisse, als Grössen, deren jede durch vier Punkte bestimmt wird, unter dem gemeinsamen Namen Q u a t e r n i o n e n begreift, so müssen von jenen $2n-6$ D.winkeln alle übrigen Quaternionen des Systems als Functionen darstellbar sein. Man wird folglich, indem man irgend $2n-5$ Quaternionen des Systems als Functionen jener $2n-6$ D.winkel ausdrückt und aus diesen $2n-5$ Gleichungen letztere D.winkel eliminirt, zwischen den $2n-5$ Quaternionen wenigstens Eine Gleichung erhalten, und zwar nur Eine, wenn je $2n-6$ derselben von einander unabhängig sind.

B e i e i n e m S y s t e m e v o n n P u n k t e n i n e i n e r E b e n e k ö n n e n demnach, w e n n v o n d e n d u r c h s i e g e b i l d e t e n Q u a t e r n i o n e n i r g e n d $2n-6$ v o n e i n a n d e r u n a b h ä n g i g e g e g e b e n s i n d, a l l e ü b r i g e n Q u a t e r n i o n e n g e f u n d e n w e r d e n.

§. 40. Ein anderer Beweis dieses Satzes, der uns zugleich zu der möglich einfachsten Lösung der aus dem Satze entspringenden Aufgaben führen wird, ist folgender.

Man denke sich zu dem Systeme der n Punkte $A, B, \ldots L, M$ ein ihm kreisverwandtes $A', B', \ldots L', M'$ hinzu und nehme an, dass einer der n Punkte des letztern — es sei M' — unendlich entfernt liege. Jeder Quaternion des erstern Systems, welche den Punkt M enthält, wird alsdann im letztern eine ihr gleiche Ternion, d. i. eine schon durch drei Punkte bestimmte Grösse, entsprechen, indem z. B. der D.winkel $MCBA = CMAB = BAMC = ABCM =$ dem einfachen Winkel $A'B'C'$, und das D.verhältniss $(MCBA) = (CMAB) =$ etc. $=$ dem einfachen Verhältnisse $A'B' : B'C'$ wird. Eben so ist umgekehrt jede Ternion von einer dieser beiden Formen im zweiten Systeme einer den Punkt M enthaltenden Quaternion im ersten gleich. Die Aufgabe: bei einem ebenen Systeme von n Punkten $A, B, \ldots L, M$ aus x Quaternionen desselben alle übrigen zu finden, wird somit darauf zurückgebracht: bei einem ebenen Systeme von $n-1$ Punkten $A', B', \ldots L'$ aus x Stücken desselben, welche theils Ternionen, theils Quaternionen und somit Functionen von Ternionen sind, alle übrigen Ternionen des Systems zu finden.

Bekanntlich aber können bei einem ebenen Systeme von $n-1$ Punkten aus $2(n-1)-4$ von einander unabhängigen Verhältnissen zwischen den gegenseitigen Abständen der Punkte, oder von solchen Verhältnissen abhängigen Grössen, also aus $2n-6$ Stücken, welche in ihrer einfachsten Form Ternionen von oben bemerkter Beschaffenheit sind, alle übrigen Stücke derselben Art gefunden werden. Es ist dieses nämlich der Satz, welcher der aus der Aehnlichkeit ebener Figuren entspringenden Classe von Aufgaben zu Grunde liegt (Baryc. Calc. S. 189). Mithin ist $x = 2n-6$, und es wird daher auch bei einem ebenen Systeme von n Punkten, von $2n-6$ von einander unabhängigen Quaternionen desselben jede $(2n-5)$te Quaternion abhängig sein. Die Gleichung aber, welche diese Abhängigkeit ausdrückt, wird einerlei sein mit derjenigen, welche zwischen den entsprechenden Stücken des kreisverwandten Systems von $n-1$ endlich gelegenen Punkten statt hat und nach den bekannten Vorschriften der Polygonometrie gefunden wird.

Diese Reduction der durch die Kreisverwandtschaft begründeten Aufgaben auf solche, die aus der Aehnlichkeit der Figuren entspringen, erhellet übrigens auch daraus, dass alle dem Systeme $A, B, \ldots M$ kreisverwandte und daher auch einander kreisverwandte Systeme $A', B', \ldots M'$ durch die Bedingung, dass bei allen der Punkt M' unendlich entfernt liegen soll, einander ähnlich werden (§. 5.).

§. 41. Um hiernach aus irgend $2n-6$ von einander unabhängigen Quaternionen eines Systems von n Punkten $A, .. L, M$ in einer Ebene irgend eine $(2n-5)$te desselben zu finden, oder, was dasselbe sagt, um die zwischen den $2n-5$ Quaternionen bestehende Relation zu ermitteln, können wir, die im vor. §. zunächst auf das System $A', ... L'$ sich beziehende Lösung auf das System $A, .. L, M$ selbst übertragend und mit letzterem operirend, als ob es das erstere wäre, folgende Regeln aufstellen:

1) In jeder der $2n-5$ Quaternionen, welche den Punkt M enthält, bringe man denselben, wenn er nicht bereits die vierte Stelle einnimmt, durch Versetzung der vier Punkte ohne Aenderung des Werthes der Quaternion an die vierte Stelle (vergl. vor. §.), lasse hierauf M weg und verwandele damit die Quaternion in eine Ternion, nämlich den D.winkel $ABCM$ in den einfachen Winkel ABC, und das D.verhältniss $(ABCM)$ in das einfache $AB:BC$.

2) Jede der Quaternionen, in welcher M nicht vorkommt, drücke man durch zwei Ternionen aus, wie etwa $ABCD$ durch $ABC+CDA$, und $(ABCD)$ durch $(AB:BC)$ $(CD:DA)$.

3) Man suche die Relation, welche bei dem Systeme von $n-1$ Punkten $A, B, ... L$ zwischen den $2n-5$ theils in Ternionen verwandelten, theils durch solche ausgedrückten Quaternionen besteht. Denn dieselbe Beziehung wird auch zwischen den $2n-5$ von den n Punkten $A, B, ... L, M$ gebildeten Quaternionen statt haben.

§. 42. Der kleinste Werth, den die Zahl n hierbei haben kann, ist 4, wodurch $2n-5=3$ wird. Bei einem Systeme von 4 Punkten wird daher aus je zwei von einander unabhängigen Quaternionen jede dritte sich finden lassen. In der That sind hier die Relationen zwischen

$$ABCD,\ BCAD,\ CABD,\ (ABCD),\ (BCAD),\ (CABD),$$

als worauf sich alle übrigen Quaternionen zwischen $A, .. D$ zurückführen lassen, einerlei mit den Relationen zwischen den durch Weglassung von D hervorgehenden Winkeln und Verhältnissen

$$ABC,\ BCA,\ CAB,\ AB:BC,\ BC:CA,\ CA:AB;$$

und man weiss aus der Trigonometrie, dass zwischen je dreien dieser sechs Stücke des Dreiecks ABC eine Relation besteht. Vergl. §. 16.

Für $n=5$ wird $2n-5=5$, und man wird daher bei einem Fünfeck $A ... E$ zwischen je 5 Quaternionen desselben wenigstens Eine Relation angeben können.

Werde z. B. die Relation zwischen den fünf D.winkeln

$$BCDE = \alpha,\ CDEA = \beta,\ DEAB = \gamma,\ EABC = \delta,\ ABCD = \varepsilon$$

verlangt. — Durch Weglassung des Punktes E wird

$$\alpha = BCD,\ \beta = DCAE = DCA,\ \gamma = ABDE = ABD,$$
$$\delta = CBAE = CBA,\ \varepsilon = ABC + CDA = -\delta + CDA,$$

und unsere Aufgabe ist somit darauf zurückgebracht: beim Viereck $ABCD$ die Relation zwischen den fünf Winkeln BCD, DCA, ABD, CBA, CDA zu finden.

Folgendergestalt dürfte diese Relation sich am einfachsten entwickeln lassen. — Es verhält sich

$$BA : AC = \sin BCA : \sin ABC,$$
$$CA : AD = \sin CDA : \sin ACD,$$
$$DA : AB = \sin DBA : \sin ADB,$$

worin, wenn alle Winkel, wie gehörig, nach einerlei Sinne gerechnet werden, die Exponenten aller Verhältnisse positiv sind. Aus der Zusammensetzung dieser Proportionen folgt daher

$$(a)\quad \sin BCA \sin CDA \sin DBA = \sin ABC \,.\, \sin ACD \,.\, \sin ADB.$$

Es ist aber (§. 8. (3))

$$BCA = BCD + DCA = \alpha + \beta,\ CDA = \delta + \varepsilon,\ DBA = -\gamma,$$
$$ABC = -\delta,\ ACD = -\beta;$$ ferner ist (§. 8. (4))
$$BAD = ABC + BCD + CDA = \varepsilon + \alpha,$$ und daher (ebds. (2))
$$ADB = 180^0 - DBA - BAD = 180^0 + \gamma - \varepsilon - \alpha,$$

so wie sich auch alle übrigen von den Seiten und den Diagonalen des Vierecks $A..D$ gebildeten Winkel als Aggregate von α, β, .. ε darstellen lassen.

Die Substitution dieser Werthe von BCA, etc. in (a) giebt nun die gesuchte Relation:

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\delta+\varepsilon)\sin\gamma + \sin\delta\sin\beta\sin(\varepsilon+\alpha-\gamma) = 0,$$

eine Gleichung, die mit Anwendung der identischen Formel

$$4\sin x \sin y \sin z = \sin(y+z-x) + \sin(z+x-y) + \sin(x+y-z) - \sin(x+y+z)$$

die, wie sich erwarten liess, symmetrische Gestalt

$$(A)\quad \sin(\alpha+\beta+\gamma-\delta-\varepsilon) + \sin(\beta+\gamma+\delta-\varepsilon-\alpha) + \sin(\gamma+\delta+\varepsilon-\alpha-\beta)$$
$$+ \sin(\delta+\varepsilon+\alpha-\beta-\gamma) + \sin(\varepsilon+\alpha+\beta-\gamma-\delta) = \sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon)$$

annimmt.

Suchen wir noch die der eben behandelten analoge Aufgabe zu lösen und die zwischen den fünf D.verhältnissen

$$(BCDE),\ (CDEA),\ (DEAB),\ (EABC),\ (ABCD)$$

obwaltende Relation zu bestimmen.

Durch die ähnlicherweise wie vorhin zu bewerkstelligende Entfernung des E reduciren sich die vier ersten D.verhältnisse auf

$$BC:CD,\ DC:CA,\ AB:BD,\ CB:BA,$$

und die gesuchte Relation ist daher identisch mit derjenigen, welche resp. zwischen diesen vier einfachen Verhältnissen und dem D.verhältnisse $$(AB.CD):(BC.DA)$$ bei einem Viereck $A..D$ statt findet.

Man sieht aber sogleich, dass, wenn die letztere Relation entwickelt wäre, man mit Hülfe derselben aus irgend fünf der sechs Linien, welche die vier Punkte $A,..D$ mit einander verbinden, die sechste würde finden können. Die letztere Relation muss sich daher unmittelbar aus der Gleichung ergeben, die zwischen den sechs Seiten eines vollständigen Vierecks $ABCD$ statt hat. Diese Gleichung ist, wenn man

$$BC=\sqrt{f},\ CA=\sqrt{g},\ AB=\sqrt{h},\ AD=\sqrt{f'},\ BD=\sqrt{g'},\ CD=\sqrt{h'}$$

setzt:

$$fgh-(g+h-f)ff'-(h+f-g)gg'-(f+g-h)hh'$$
$$-f(h'-f')(f'-g')-g(f'-g')(g'-h')-h(g'-h')(h'-f')=0.\text{*})$$

Man setze nun die fünf Verhältnisse $BC:CD$, etc., deren gesenseitige Relation gesucht wird, resp. $=\frac{1}{\sqrt{a}},\ \frac{1}{\sqrt{b}},\ \frac{1}{\sqrt{c}},\ \frac{1}{\sqrt{d}},\ \frac{1}{\sqrt{e}}$,

so wird $\frac{h'}{f}=a,\ \frac{g}{h'}=b,\ \frac{g'}{h}=c,\ \frac{h}{f}=d,\ \frac{ff'}{hh'}=e$,

und damit $g=abf,\ h=df,\ f'=adef,\ g'=cdf,\ h'=af$.

Substituirt man endlich diese Werthe für $g,\ h,\ f',\ g',\ h'$ in obiger Gleichung, so kommt nach Division derselben mit adf^3 die gesuchte zwischen $a,\ b,\ c,\ d,\ e$, d. i. zwischen $1:(BCDE)^2$, $1:(CDEA)^2$, etc., bestehende Relation:

$$(B)\quad 1-a-b-c-d-e+ab+bc+cd+de+ea$$
$$+(1-a)eab+(1-b)abc+(1-c)bcd+(1-d)cde+(1-e)dea$$
$$+abcde=0.$$

*) Denn bezeichnen $l,\ m,\ n$ die Cosinus der Winkel $BDC,\ CDA,\ ADB$, so ist

$$g'+h'-f=2l\sqrt{g'h'},\quad h'+f'-g=2m\sqrt{h'f'},\quad f'+g'-h=2n\sqrt{f'g'}$$

und $$1-l^2-m^2-n^2-2lmn=0.$$

Durch Elimination von $l,\ m,\ n$ aus diesen vier Gleichungen geht aber die obige zuerst wohl von Carnot in seiner *Géom. de posit.* entwickelte Gleichung hervor.

Zusatz. Hinsichtlich der letztern Formel verdient noch bemerkt zu werden, dass sie zugleich die zwischen den gegenseitigen Abständen von fünf Punkten im Allgemeinen geltende Bedingung darstellt, unter der, wenn vier der fünf Punkte in einer Ebene liegen, auch der fünfte in dieser enthalten ist.

In der That, liegen A, B, C, D in einer Ebene, und E ausserhalb derselben, so bestimme man ihr einen Punkt E_1 dergestalt, dass

$(BCDE_1) = (BCDE) = 1 : \sqrt{a}$ und

$(CDE_1A) = (CDEA) = 1 : \sqrt{b}$, dass mithin

(1) $DE_1 : E_1B = DE : EB$ und

(2) $DE_1 : E_1A = DE : EA$.

Dieses ist immer, und zwar auf doppelte Weise, möglich. Denn wegen (1) und (2) ist E_1 ein Punkt des durch die Doppelproportion

$$AX : BX : DX = AE : BE : DE$$

bestimmten durch E gehenden und von der Ebene ABD rechtwinklig halbirten Kreises (§. 22. *d.*); und weil E_1 zugleich in dieser Ebene liegen soll, so ist E_1 einer der beiden Endpunkte des Durchmessers, in welchem jener Kreis von der Ebene halbirt wird.

Haben nun die Buchstaben a, b, c, d, e die ihnen im Obigen durch die gegenseitigen Abstände der Punkte A, B, C, D, E zugewiesene Bedeutung, und bezeichnet man die auf gleiche Weise von den Punkten A, B, C, D, E_1 abhängigen Zahlen mit a_1, b_1, c_1, d_1, e_1, so ist wegen (1) und (2)

(3) $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, und überdies $e_1 = e$.

Weil aber A, B, C, D, E_1 in einer Ebene liegen, so besteht jetzt zwischen a_1, b_1, c_1, d_1, e_1 die vorhin zwischen a, b, c, d, e erhaltene Gleichung (B). Soll daher jene Relation zwischen $a, b, \ldots e$ selbst auch gegenwärtig noch statt haben, so muss wegen (3) noch $d_1 = d$, also

$$(E_1ABC) = (EABC) \text{ und daher } EC : E_1C = EA : E_1A$$

sein. Hieraus aber folgt in Verbindung mit den Proportionen (1) und (2), wofür wir auch $EB : E_1B = ED : E_1D = EA : E_1A$ schreiben können, dass in einer gewissen durch B, D, A gehenden Kugelfläche, deren Mittelpunkt in EE_1 fällt, auch C liegen muss, und dass mithin, wenn A, B, C, D in einer Ebene sind, E aber ausserhalb derselben liegt, die Gleichung (B) nur in dem speciellen Falle noch besteht, wenn jene vier Punkte in einem Kreise, als dem Durchschnitte der Kugelfläche mit der Ebene, enthalten sind.

§. 43. Eine besondere Betrachtung haben wir noch dem Falle zuzuwenden, wenn die n Punkte $A, \ldots M$ des Systems in einem Kreise liegen. Diese Bedingung wird vollständig dadurch ausgedrückt, dass von den $n-3$ D.winkeln, welche mit gewissen dreien der n Punkte jeder der übrigen bildet, ein jeder entweder $=0$, oder $=180^0$ ist. Von den im Allgemeinen erforderlichen $2n-6$ von einander unabhängigen Quaternionen sind daher $n-3$ schon durch die Bedingung der Kreislage als bekannt anzusehen, und es müssen folglich nur noch $n-3$ Quaternionen, und zwar D.verhältnisse, gegeben sein, so wie auch die gesuchte Quaternion nur ein D.verhältniss sein kann. Bei einem System von n Punkten eines Kreises können daher aus $n-3$ von einander unabhängigen D.verhältnissen alle übrigen D.verhältnisse gefunden werden.

Dasselbe erhellet ähnlicherweise, wie in §. 40., auch daraus, dass jede mit der Kreisfigur $A \ldots LM$ kreisverwandte Figur $A' \ldots L'M'$, wobei M' unendlich entfernt liegt, in einer Geraden enthalten ist, dass alle diese Figuren, deren jede aus $n-1$ Punkten $A', \ldots L'$ in einer Geraden besteht, einander ähnlich sind, und dass, um eine einer solchen Figur ähnliche construiren zu können, von ersterer $(n-1)-2$ von einander unabhängige Verhältnisse zwischen den gegenseitigen Abständen ihrer $n-1$ Punkte gegeben sein müssen.

Uebrigens kann man die Zahl $n-3$ auch noch daraus folgern, dass jede Relation zwischen D.verhältnissen, die von beliebig in einem Kreise liegenden Punkten gebildet werden, zufolge der Natur der Kreisverwandtschaft auch dann noch bestehen muss, wenn die Punkte in einer Geraden genommen werden, und dass aus $n-3$ von einander unabhängigen D.verhältnissen zwischen n Punkten in einer Geraden alle übrigen sich finden lassen (Baryc. Calc. §. 187.).

Die Formel, welche bei n Punkten eines Kreises die Relation zwischen $n-3$ gegebenen und einem gesuchten D.verhältnisse ausdrückt, ist hiernach die nämliche, wie bei n Punkten einer Geraden. So wie aber im letztern Falle, wenn die Formel allgemeine Gültigkeit haben soll, bei jedem D.verhältnisse nicht bloss sein absoluter Werth, sondern auch sein Zeichen zu berücksichtigen ist, so muss ein Gleiches auch bei einem System von Punkten in einem Kreise geschehen, und wir haben daher noch das Merkmal zu ermitteln, an welchem das Vorzeichen eines D.verhältnisses, dessen vier Punkte in einem Kreise liegen, erkannt wird.

Sind $A, B, C, \ldots$ Punkte einer Geraden, so ist das Verhältniss $AB:BC$ positiv oder negativ, jenachdem B zwischen oder ausserhalb A und C liegt, folglich das aus den zwei Verhältnissen $AB:BC$ und $CD:DA$ zusammengesetzte D.verhältniss $(ABCD)$ dann und nur dann negativ, wenn von den zwei Punkten B und D der eine zwischen, der andere ausserhalb A und C liegt, also wenn von den zwei Winkeln ABC und ADC der eine $=180^0$, der andere $=0$ ist, mithin wenn der D.winkel $ABCD$ $=180^0$ ist; dagegen wird das D.verhältniss positiv sein, wenn der gleichlautende D.winkel $=0$ ist. Wegen der Gleichheit entsprechender D.winkel in kreisverwandten Figuren wird folglich nach derselben Regel auch dann, wenn $A, \ldots D$ in einem Kreise liegen, das D.verhältniss $(ABCD)$ mit dem einen oder andern Zeichen zu nehmen sein, also (§. 14. *a.*) mit dem negativen oder positiven, jenachdem sich die Sehnen AC und BD innerhalb oder ausserhalb des Kreises schneiden, oder — wie man sich auch ausdrücken könnte — jenachdem die Bögen AC und BD, keiner von ihnen grösser als der Halbkreis genommen, in einander greifen, oder nicht.

§. 44. Um das Vorstehende durch ein Beispiel zu erläutern, wird es hinreichen, die einfachste unter den hierher gehörigen Aufgaben zu wählen und zu zeigen, wie bei vier in einem Kreise begriffenen Punkten $A, \ldots D$, und wo daher $n-3=1$ ist, aus einem der beiden D.verhältnisse

$$(ABCD)=a \text{ und } (ACBD)=b$$

das andere gefunden werden kann.

Angenommen, dass $A, \ldots D$ in einer Geraden liegen, und darin D unendlich entfernt ist, wird

$$a=(AB:BC)\,(CD:DA)=-AB:BC=BA:BC,$$

wegen $CD:DA=-1$, und eben so

$$b=-AC:CB=AC:BC;$$

folglich $a+b=1$, wegen $BA+AC=BC$.

Mithin ist auch dann, wenn die vier Punkte in einer Geraden und alle endlich entfernt liegen, so wie auch dann, wenn sie in einem Kreise enthalten sind:

$$(ABCD)+(ACBD)=1 \text{ (vergl. §. 26.)};$$

und diese Gleichung gilt bei gehöriger Berücksichtigung der Zeichen allgemein, für jede Aufeinanderfolge der vier Punkte. Ist z. B. $ABDC$ diese Folge, so greifen weder AC und BD, noch AB und CD in einander, und es sind daher a und b positiv. Dagegen findet sich bei der Folge $ABCD$ a negativ und b positiv.

Zusatz. In jeder Gleichung zwischen D.verhältnissen, deren Punkte in einem Kreise liegen, so wie in jeder andern mit einer solchen identischen Gleichung, z. B. in der nach A, B, C symmetrisch geordneten

$$AD.BC + BD.CA + CD.AB = 0,$$

kann man die Zeichen der einzelnen Glieder auch dadurch ermitteln, dass man zuerst die Zeichen der einzelnen Linien nach folgender Regel bestimmt. Man wähle beliebigwo im Kreise einen Punkt M und nehme jede der Sehnen AD, BC, etc. negativ oder positiv, jenachdem man, im Kreise selbst stets nach einem und demselben Sinne fortgehend, um von A bis D, von B bis C, etc. zu gelangen, durch M gehen muss, oder nicht. — Die Richtigkeit dieser Vorschrift wird sogleich einleuchten, wenn man in einer kreisverwandten geradlinigen Figur den Punkt M unendlich entfernt annimmt.

§. 45. Sowie in Folge der Theorie der Kreisverwandtschaft ebener Figuren jede Relation zwischen D.verhältnissen, die von Punkten einer Geraden gebildet werden, auch für ein System von Punkten eines Kreises gilt, so muss, den Sätzen gemäss, die in §. 32. u. folg. in Bezug auf die Kreisverwandtschaft im Raume entwickelt worden sind, auch jede Gleichung zwischen Quaternionen einer ebenen Figur unverändert von der Ebene auf eine Kugelfläche übergetragen werden können, wie auch schon aus der Theorie der stereographischen Projection (§. 24. und 25.) hervorgeht.

Bei einem Systeme von n Punkten einer Kugelfläche wird demnach gleichfalls (§. 39.) durch $2n-6$ von einander unabhängige Quaternionen jede der übrigen bestimmt; nur dass hierbei unter $ABCD$ der von den zwei Kreisen ABC und ADC gebildete Winkel zu verstehen ist.

Bei vier Punkten einer Kugelfläche, d. i. *bei vier im Raume beliebig liegenden Punkten* $A, .. D$, werden daher zwischen

den Producten $BC.AD$, $CA.BD$, $AB.CD$ und
den Winkeln $BAC^\wedge BDC$, $CBA^\wedge CDA$, $ACB^\wedge ADB$

dieselben Relationen, wie zwischen den Seiten und den gegenüberliegenden Winkeln eines ebenen Dreiecks, statt haben.

Desgleichen werden die zwei in §. 42. für ein ebenes Fünfeck entwickelten Formeln (A) und (B) auch bei einem Systeme von fünf Punkten auf einer Kugelfläche bestehen. Und da die Formel (B) auch als die

zwischen den gegenseitigen Abständen der fünf Punkte zu erfüllende Bedingung angesehen werden konnte, unter welcher, wenn vier der fünf Punkte in einer Ebene liegen, auch der fünfte in ihr begriffen ist, durch vier Punkte aber stet seine Kugelfläche beschrieben werden kann, so wird — den Gesetzen der Kreisverwandtschaft gemäss — dieselbe Formel (*B*) auch *die Bedingung* ausdrücken, *unter welcher die fünf Punkte in einer Kugelfläche enthalten sind;* wobei ich nur noch bemerke, dass der dort gedachte specielle Fall, in welchem dessen ungeachtet, dass der eine Punkt nicht in der Ebene der vier übrigen liegt, die Gleichung (*B*) dennoch gültig ist, hier keine Ausnahme begründet, indem alsdann die vier Punkte in einem Kreise liegen müssen, durch solche vier Punkte aber und jeden fünften sich immer eine Kugelfläche beschreiben lässt.

§. 46. Was noch die aus der Kreisverwandtschaft räumlicher Figuren hervorgehenden Aufgaben und insonderheit die Anzahl der Quaternionen anlangt, welche bei einem Systeme von n Punkten im Raume gegeben sein müssen, um alle übrigen Quaternionen finden zu können, so ergiebt sich diese Zahl auf eine den in §§. 39. und 40. bei ebenen Figuren angestellten Betrachtungen ganz analoge Weise.

Soll nämlich ein dem Systeme von n Punkten M, N, A, B, C,... kreisverwandtes construirt werden, so geschieht dieses nach §. 36. dadurch, dass man erstens an die $n-2$ Kreise MAN, MBN, MCN,... in M geradlinige Tangenten a, b, c,... legt und ein diesem Liniensystem gleiches System von Geraden a', b', c',... construirt, welche sich in dem willkührlichen Punkte M' schneiden. Hierbei kann a' beliebig durch M' gelegt werden; b' wird durch den Winkel $a'^\wedge b' = a^\wedge b$, und jede der $n-4$ übrigen Geraden c', d',... durch zwei Winkel, z. B. c' durch $a'^\wedge c' = a^\wedge c$ und $b'^\wedge c' = b^\wedge c$, bestimmt. Die Anzahl aller Winkel, welche somit dem ursprünglichen Systeme entnommen werden, ist $= 1 + 2(n-4)$, und jeder dieser Winkel ist eine Quaternion, z. B. $a^\wedge b = MAN^\wedge MBN = MANB$.

Nach willkührlicher Annahme von N' lassen sich nunmehr die $n-2$ Kreise $M'A'N'$, $M'B'N'$, $M'C'N'$, etc. beschreiben. In dem ersten derselben ist A' ein beliebiger Punkt; jeder der übrigen Punkte B', C',... aber wird in seinem Kreise durch ein D.verhältniss bestimmt, z. B. B' durch $(M'A'N'B') = (MANB)$. Die Anzahl der hierzu erforderlichen D.verhältnisse ist demnach $= n-3$.

Die Anzahl aller Quaternionen, welche zur Construction des kreisverwandten Systems nöthig sind, ist folglich $=1+2(n-4)+n-3$ $=3n-10$. Hieraus ist aber, wie in §. 39., zu schliessen, **dass bei einem Systeme von n Punkten im Raume aus irgend $3n-10$ von einander unabhängigen Quaternionen desselben alle übrigen Quaternionen gefunden werden können.**

Zu demselben Resultate kann man, wie in §. 40., auch dadurch gelangen, dass man das System von n Punkten auf ein anderes von $n-1$ Punkten reducirt, indem man für das erstere ein ihm kreisverwandtes setzt, dessen einer Punkt unendlich entfernt liegt. Jede diesen Punkt enthaltende Quaternion verwandelt sich damit auch hier in eine Ternion, und jede hierher gehörige Aufgabe in eine derjenigen, welche aus der Verwandtschaft der Aehnlichkeit entspringen. Wie man weiss, gilt aber hinsichtlich solcher Aufgaben, insofern sie den Raum betreffen, der Satz, dass bei einem System von $n-1$ Punkten aus $3(n-1)-7$, $=3n-10$, von einander unabhängigen Stücken, welche theils Ternionen, theils Functionen solcher sind, alle übrigen Stücke derselben Art sich finden lassen.

Es leuchtet übrigens von selbst ein, dass die in §. 41. gegebenen Vorschriften, um eine zur Kreisverwandtschaft in der Ebene gehörige Aufgabe auf eine gewöhnliche der Polygonometrie zurückzuführen, auch gegenwärtig anwendbar sind, und ich will nur noch bemerken, dass für $n=4$, wo $3n-10=2$ wird, die Aufgabe mit der bereits in §. 42. für denselben Werth von n aufgestellten zusammenfällt.

---

§. 47. Sowie im Letztvorhergehenden, um eine Relation zwischen Quaternionen einer Figur zu erhalten, einer der Punkte der Figur unendlich entfernt angenommen, und damit jede diesen Punkt enthaltende Quaternion in eine Ternion verwandelt wurde, so kann man auch aus denselben auf der Natur der Kreisverwandtschaft beruhenden Gründen, aus jeder Gleichung zwischen Ternionen, d. h. aus jedem Satze, welcher eine Relation zwischen einfachen Winkeln und Linienverhältnissen betrifft, dadurch, dass man jeder Ternion einen und denselben neuen Punkt hinzufügt, einen entsprechenden Satz zwischen

Quaternionen ableiten. — Die Kreisverwandtschaft wird auf solche Weise eine sehr ergiebige Quelle neuer Sätze, deren Beschaffenheit aus den nachfolgenden Beispielen genüglich erhellen wird.

1) Daraus, dass die Summe der drei Winkel eines Dreiecks $ABC + BCA + CAB = 180^0$ ist, folgt durch Zusetzung von D:

$$ABCD + BCAD + CABD = 180^0 \text{ (§. 13.)},$$

wofür wir auch schreiben können:

$$BCD`BAD + CAD`CBD + ABD`ACD = 180^0.$$

Also auch *in einem von drei Kreisbögen gebildeten Dreiecke ABC ist, wenn sich die drei Kreise noch in einem Punkte D schneiden, die Summe der drei Winkel zweien Rechten gleich.*

Die analogen Sätze für cyklische in einer Ebene oder auf einer Kugelfläche construirte Vierecke, Fünfecke u. s. w. folgen hieraus von selbst.

2) Aus der trigonometrischen Grundformel $CA:AB = \sin ABC : \sin BCA$ fliesst

$$(CABD) = \sin ABCD : \sin BCAD \text{ (§. 16.)}.$$

3) Ist $BAC = 180^0$, so ist $(AB:BC) + (AC:CB) = -1$. Ist daher $BACD = 180^0$, d. h. liegen die vier Punkte $B, .. D$ in der genannten Folge in einem Kreise, so hat man, weil für einen unendlich entfernten Punkt D $AD:DC = AD:DB = -1$ ist,

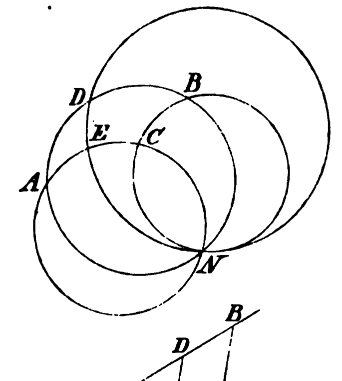
$$(ABCD) + (ACBD) = 1 \text{ (vergl. §§. 44. und 26.)}.$$

4) Ist $BAC = 90^0$, so ist $(AB:BC)^2 + (AC:CB)^2 = 1$. Aus $BACD = 90^0$ folgt daher $(ABCD)^2 + (ACBD)^2 = 1$, d. i.

$$AB^2 . CD^2 + AC^2 . BD^2 = AD^2 . BC^2.$$

Wenn demnach *bei einem ebenen Viereck die Summe zweier gegenüberliegenden Winkel einen Rechten beträgt,* oder allgemeiner: *wenn bei einem Viereck BACD, mag es eben sein, oder nicht, die damit bestimmten Kreise BAC, BDC, und folglich auch die Kreise ACD, ABD, sich rechtwinklig schneiden, so ist die Summe der Producte aus den Quadraten der gegenüberliegenden Seiten dem Producte aus den Quadraten der Diagonalen gleich;* ein neuer dem ptolemäischen ganz analoger Satz, der eben so aus dem pythagoräischen, wie der ptolemäische aus dem Satze fliesst, dass in einem Dreiecke, welches einen Winkel von 180^0 hat, die Summe der ihn bildenden Seiten der dritten Seite gleich ist.

5) Je zwei Seiten AB, AC eines Dreiecks werden von einer Parallele DE mit der dritten Seite in gleichen Verhältnissen geschnitten; oder, in Gleichungen ausgedrückt: Ist



$$(a)\quad ADB = 180^0,$$
$$(b)\quad AEC = 180^0,$$
$$(c)\quad CBD + BDE = 180^0,$$

so verhält sich

$$(d)\quad AD : DB = AE : EC;$$

woraus wir, den Punkt N hinzufügend, schliessen: Wenn

$[a]$ $ADBN = 180^0$, $[b]$ $AECN = 180^0$, $[c]$ $CBDN + BDEN = 180^0$,

so ist $\quad [d]$ $(ADBN) = (AECN)$.

Es ist aber $[c]$ identisch mit

$$BDN^{\wedge}BCN = 180^0 - DEN^{\wedge}DBN = BDN^{\wedge}DEN,$$

und daher $\quad [c^*]$ $BCN^{\wedge}DEN = 0$,

was man auch unmittelbar aus $BC^{\wedge}DE = 0$ hätte schliessen können.

Wenn man daher bei einem von drei sich in einem Punkte N schneidenden Kreisen ABN, ACN, BCN gebildeten Dreieck ABC durch N einen vierten Kreis DEN legt, welcher den einen jener Kreise BCN (wegen $[c^*]$) in N berührt und die beiden andern ABN und ACN (wegen $[a]$ und $[b]$) in D und E schneidet, so ist (nach $[d]$)

$$(AD : DB) BN = (AE : EC) . CN \text{ oder, was dasselbe ist (§. 12):}$$
$$(ADBNCE) = -1.$$

Eben so ergeben sich aus den Proportionen

$$BA : AD = CA : AE \text{ und } AD : DE = AB : BC$$

die Gleichungen $(BADN) = (CAEN)$ und $(DABCNE) = -1$.

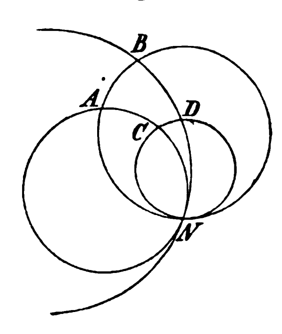
Auch sind bei der Kreisfigur, ebenso wie bei der geradlinigen, die zwei Dreiecke ABC und ADE gleichwinklig.

6) Wird von den drei Seiten BC, CA, AB eines Dreiecks eine vierte Gerade in F, G, H geschnitten, so ist bekanntlich

$$\frac{BF}{FC} \cdot \frac{CG}{GA} \cdot \frac{AH}{HB} = -1.$$

Dieselbe Gleichung besteht folglich (§. 15. Zus.) auch dann, wenn von den drei durch vier Punkte A, B, C, N bestimmten und daher, wo

nicht in einer Ebene, in einer Kugelfläche liegenden Kreisen *BCN*, *CAN*, *ABN* ein vierter durch *N* gehender und in derselben Fläche enthaltener Kreis in *F*, *G*, *H* geschnitten wird. — Dabei ist das Verhältniss $BF:FC$ positiv zu nehmen, wenn *BFCN*, negativ aber, wenn *FBCN*, oder *BCFN* die Aufeinanderfolge dieser vier Punkte in ihrem Kreise ist, weil, wenn *F* mit *B* und *C* in einer Geraden, und *N* in dieser Geraden unendlich entfernt liegt, das Verhältniss $BF:FC$ unter denselben Bedingungen einen positiven, oder negativen Exponenten hat. — Dass Analoges auch von den Verhältnissen $CG:GA$ und $AH:HB$ gilt, brauche ich nicht hinzuzufügen.



7) Wenn die Geraden *AB* und *CD*, und desgleichen *AC* und *BD* einander parallel sind, so ist $AB=CD$ und $AC=BD$, also $BA:AC=DC:CA$ und $CA:AB=DB:BA$. Hieraus folgt der Satz:

Legt man in einer Ebene oder einer Kugelfläche durch einen Punkt *N* zwei Paare einander daselbst berührender Kreise *ABN* und *CDN*, *ACN* und *BDN*, so verhält sich

$$AB:CD=AN.BN:CN.DN \text{ d. i. } (ABNCDN)=1$$

und $$AC:BD=AN.CN:BN.DN \text{ d. i. } (ACNBDN)=1.$$

Uebrigens ist, wie bei dem geradlinigen Parallelogramm *ABDC*, auch bei dem gleichnamigen von den vier Kreisen gebildeten Vierecke die Summe je zweier nächstfolgender Winkel $=180^0$.

8) Werden von vier sich in denselben zwei Punkten schneidenden Kreisen einer Ebene oder einer Kugelfläche zwei andere Kreise, deren jeder nur den einen jener zwei Punkte trifft, in *A*, *B*, *C*, *D* und in *F*, *G*, *H*, *J* geschnitten, so ist $(ABCD)=(FGHJ)$, wie aus dem bekannten Satze von vier sich in einem Punkte schneidenden und in einer Ebene liegenden Geraden hervorgeht. — Und da dieser Satz auch für ein System von vier sich in derselben Geraden schneidenden Ebenen gilt, *so wird auch von vier durch einen und denselben Kreis gelegten Kugelflächen jeder andere diesen Kreis einmal schneidende Kreis nach einem und demselben D.verhältnisse geschnitten.*

9) Werden die drei Seiten *BC*, *CA*, *AB* eines Dreiecks von einer vierten Geraden in *A'*, *B'*, *C'* geschnitten, so sind die zwei Systeme

$$A, B, C, A', B', C' \text{ und } A', B', C', A, B, C$$

einander kreisverwandt, wie sich, sei es durch die Gleichheit je zweier entsprechender D.winkel, oder je zweier entsprechender D.verhältnisse, leicht darthun lässt. Den vier Geraden *A'BC*, *AB'C*, *ABC'*, *A'B'C'* des einen Systems entsprechen daher im andern die vier Kreise *AB'C'*, *A'BC'*, *A'B'C*, *ABC*, die sich folglich in einem Punkte, dem C.punkte des andern, (der wegen der involutorischen Beziehung zwischen beiden Systemen auch der C.punkt des erstern ist,) schneiden müssen. Dies giebt den bekannten Satz, dass die vier Kreise, welche man um die vier von vier in einer Ebene enthaltenen Geraden gebildeten Dreiecke beschreibt, sich in einem Punkte schneiden.

Wir folgern hieraus weiter, dass, wenn vier in einer Ebene oder einer Kugelfläche liegende Kreise einen Punkt gemein haben, auch die vier neuen Kreise, welche um die von Bögen der erstern gebildeten Dreiecke beschrieben werden können, sich in Einem Punkte begegnen; oder mit andern Worten: ***Haben sechs Punkte A, B, C, A', B', C' eine solche Lage, dass sich die vier Kreise A'BC, AB'C, ABC', A'B'C' in einem Punkte schneiden, und weshalb die sechs Punkte, wo nicht in einer Ebene, in einer Kugelfläche liegen müssen, so schneiden sich auch die vier Kreise AB'C', A'BC', A'B'C, ABC in einem Punkte.***

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.



